Письма в ЭЧАЯ. 2012. Т. 9, № 3(173). С. 495–509

ФИЗИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА И КОНДЕНСИРОВАННЫХ СРЕД

ПРОИЗВОЛЬНЫЕ ВАКУУМЫ КАК МОДЕЛЬ СТОХАСТИЧЕСКОГО ОКРУЖЕНИЯ (К ПРОБЛЕМЕ ИНКОРПОРАЦИИ ТЕРМОДИНАМИКИ В КВАНТОВУЮ ТЕОРИЮ)[1]

А. Д. Суханов[а,2], *О. Н. Голубева*[б,3]

[а] Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

[б] Российский университет дружбы народов, Москва

Предлагается подход, позволяющий сузить щель между макро- и микроописаниями природы (т. е. между термодинамикой и квантовой механикой), на основе введения модели квантотермостата в виде холодного и теплого вакуумов. Вместо стандартной квантовой механики мы исходим из развитого нами ранее микроописания в форме $(\hbar, k)$-динамики с использованием комплексной волновой функции вакуума. Мы подчеркиваем универсальную роль стохастического воздействия окружения в возникновении корреляций флуктуаций сопряженных параметров на микро- и макроуровнях при любых температурах.

We propose an approach that makes it possible to narrow the gap between the macro- and microdescriptions of nature (i.e., between thermodynamics and quantum mechanics). This approach is based on introducing a quantum-thermostat model in the form of cold and thermal vacua. In this case, we start from our previously developed microdescription in the form of $(\hbar, k)$ dynamics instead of standard quantum mechanics. It is based on using the complex wave function of vacuum. We stress the universal role of the stochastic environmental influence in the appearance of correlations between fluctuations of conjugate parameters on the micro- and macrolevels at any temperatures.

PACS: 11.10.-z

1. ПРОБЛЕМА ИНКОРПОРАЦИИ ТЕРМОДИНАМИКИ В КВАНТОВУЮ ТЕОРИЮ

Взаимоотношения между макро- и микроописаниями природы имеют давнюю историю. Сегодня они привлекают особое внимание благодаря тому, что существовавшая в XIX–XX вв. щель между этими описаниями непрерывно сужается. Методы фундаментальной макротеории — равновесной термодинамики — оказались весьма эффективными при описании малых объектов (наночастиц и т. п.). В то же время методы фундамен-

[1]Расширенная версия доклада на второй Международной конференции «Математическая физика и ее приложения» (Самара, Россия, август 2010 г.).

[2]E-mail: ogol@mail.ru

[3]E-mail: ogol@oldi.ru

тальной микротеории — квантовой динамики в широком смысле слова — все чаще используются для анализа макроскопических явлений.

В связи с этим рядом исследователей (например, Умэдзавой [1]) была поставлена проблема возможного слияния этих теорий путем инкорпорации термодинамики в квантовую теорию. Сам Умэдзава, однако, признал, что в рамках развитой им термополевой динамики эту проблему решить не удалось. В данной и последующей статьях мы покажем, что развиваемый нами подход, называемый $(\hbar, k)$-динамикой [2–6], по-видимому, позволяет максимально приблизиться к указанной цели.

Все дело в том, что в течение многих десятилетий равновесная термодинамика развивалась как бы в двух независимых формах. В исходной форме термодинамику принято рассматривать как безмодельную теорию, основанную на четырех постулатах — началах термодинамики. Сегодня ее наиболее продвинутый вариант — статистическая термодинамика [7–9], включающая теорию флуктуаций макропараметров. Она исходит из того, что в состоянии теплового равновесия объекта с окружением (термостатом) все макропараметры, в том числе и температура, являются случайными c-числовыми величинами, способными испытывать в определенных пределах флуктуации относительно своих средних значений. При этом какое-либо микроописание для макрообъектов не предполагается.

Параллельно с этой формой получила развитие и другая ее форма, существенно опирающаяся на модельное описание. В роли последнего используется статистическая механика, современный вариант которой — равновесная квантовая статистическая механика [10, 11]. Именно эта форма термодинамики во многих монографиях и учебниках принимается за основную. Это создает иллюзию возможности полного сведения макроописания к микроописанию.

Однако сам корифей «рационального объяснения термодинамики на основе статистической механики» Гиббс в гл. IX своей книги признал, что этой цели в полном объеме ему достичь не удалось [12, 13]. Он обратил внимание на то, что для объяснения флуктуаций макропараметров также необходимо использовать *статистическое* описание, но *качественно отличное* от того, что принято и в классической, и в квантовой статистической механике.

С современной точки зрения макроописание, основанное на квантовой статистической механике, строго говоря, вообще нельзя называть формой термодинамики. Фактически, это описание имеет смысл квантовой динамики при конечных температурах, т. е. микроописания на основе конкретных моделей макрообъектов, находящихся в термостате, но без использования волновых функций. В этой теории температура и другие интенсивные макропараметры не флуктуируют, а нулевое начало имеет вид равенства $T = T_0$, где T_0 — температура термостата в классической модели. Учет квантовых эффектов также осуществляется непоследовательно. Это приводит к тому, что вопреки исходной формулировке тепловой теоремы Нернста (третьего начала) энтропия в квантовой статистической механике при $T_0 = 0$ принимается равной нулю, что сегодня противоречит экспериментальным данным.

С точки зрения математики совершенно неудивительно, что статистическую механику и статистическую термодинамику не удалось соединить в целостную теорию. Дело в том, что в них используются качественно различные модели статистического ансамбля. В квантовой статистической механике в роли ансамбля используются совокупности конечного числа $N \gg 1$ микрообъектов, образующих макрообъект (assembly Больцмана). В то же время, статистическая термодинамика основана на принципиально ином типе ансамбля — ensemble Гиббса. В этой роли выступает совокупность бесконечного числа событий (однотипных процессов), которые происходят с целостным макрообъектом в фиксированных условиях.

Очевидно, что выход из возникшей ситуации можно найти, если для создания целостной теории использовать на микроуровне статистическую теорию, концептуально близкую к статистической термодинамике. На эту роль в принципе подходит квантовая механика сама по себе, также представляющая собой безмодельную теорию целостных микросистем. Действительно, еще в 1930-е гг. К. В. Никольским было убедительно показано [14] (см. также книгу Д. И. Блохинцева [15]), что она имеет смысл статистической теории, основанной на ensemble Гиббса. Это качественно отличает ее и от квантовой, и от классической статистической механики, но сближает со статистической термодинамикой, в которой используется тот же тип ансамбля.

Однако сегодня стандартная квантовая механика представляет собой микроописание только при нулевой температуре, к тому же без последовательного учета влияния вакуума. Для учета тепловых явлений, по нашему мнению, ее необходимо обобщить на случай конечных температур, но сохранив при этом принципиальные черты ее аппарата.

Как известно, попытки учета тепловых явлений непосредственно в динамике насчитывают уже около ста лет. В частности, одной из первых в этом направлении была теория Ланжевена для броуновского движения. По тому же пути, фактически, предлагал идти и Умэдзава. В своей термополевой динамике он использовал стандартный аппарат квантовой механики, но при этом модифицировал гамильтониан, включив в него наряду с обычными дополнительные члены, ответственные за тепловые степени свободы.

Поскольку все попытки модификации наблюдаемых в квантовой динамике и, прежде всего, гамильтониана для учета тепловых эффектов привели лишь к ограниченным успехам, возникает идея более внимательно подойти к учету второй стороны квантовой теории — понятию состояния. Тем более, что симметрия гамильтониана системы довольно часто не совпадает с симметрией основного состояния, порождаемого стохастическим воздействием окружения.

В своем подходе мы опираемся на тезис Боголюбова [16], согласно которому для применимости стохастического описания природы и на микро-, и на макроуровнях в равной степени необходимо явным образом учесть целостное стохастическое воздействие окружения. Чтобы этого добиться, в рамках квантовой динамики мы вводим соответствующие операторы, что позволит непосредственно сравнивать симметрию гамильтониана системы с симметрией основного состояния в условиях стохастического воздействия окружения разных типов.

Наша цель на данном этапе — модифицировать квантовую механику при нулевой и конечных температурах таким образом, чтобы она была максимально пригодна для инкорпорации в нее термодинамики. При этом мы исходно отказываемся от использования типичного для равновесной квантовой статистической механики аппарата матрицы плотности с вещественными матричными элементами. Он, на наш взгляд, имеет ограниченную область применимости.

Для описания состояний объектов, находящихся в равновесии со стохастическим окружением, мы вводим универсальную совокупность произвольных вакуумов, связанных (u, v)-преобразованиями Боголюбова [17, 18]. Мы показываем, что в общем случае эти состояния описываются комплексными волновыми функциями в координатном представлении.

2. ВОЛНОВАЯ ФУНКЦИЯ ИСХОДНОГО (ХОЛОДНОГО) ВАКУУМА В КООРДИНАТНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

Понятие вакуума традиционно вводится в представлении чисел заполнения в рамках аппарата вторичного квантования. Оно соответствует состоянию без частиц. Для дальнейшего анализа его можно рассматривать как собственное состояние, описываемое невырожденным нормированным вектором $|0\rangle$ оператора числа частиц (квантов) $\hat{N}$ с нулевым собственным значением

$$\hat{N}|0\rangle = 0 \cdot |0\rangle = 0. \tag{1}$$

Поскольку предполагается, что температура $T_0 = 0$, такое состояние можно назвать *исходным* (т. е. холодным) *вакуумом* [19].

Для сближения с более привычным аппаратом первичного квантования, свойственным квантовой механике, мы в дальнейшем вместо представления чисел заполнения будем использовать преимущественно координатное представление. Однако для связи между ними необходимо учесть, что оператор числа частиц $\hat{N}$ выражается через два неэрмитовых оператора $\hat{a}$ и $\hat{a}^+$, называемых соответственно операторами уничтожения и рождения, следующим образом: $\hat{N} = \hat{a}^+\hat{a}$. Здесь

$$\hat{a} = \frac{\hat{p} - i\eta\hat{q}}{\sqrt{2\eta\hbar}}, \quad \hat{a}^+ = \frac{\hat{p} + i\eta\hat{q}}{\sqrt{2\eta\hbar}}, \tag{2}$$

где оператор импульса $\hat{p} = \dfrac{\hbar}{i}\dfrac{d}{dq}$, оператор координаты $\hat{q} = q \cdot \hat{I}$, $\hat{I}$ — единичный оператор, а η — произвольный вещественный параметр. Иными словами, вакуум $|0\rangle$ является также собственным состоянием оператора уничтожения с нулевым собственным значением

$$\hat{a}|0\rangle = 0 \cdot |0\rangle = 0.$$

Подставляя в это выражение явный вид операторов $\hat{a}, \hat{p}$ и $\hat{q}$ из (2) и переходя к волновой функции исходного вакуума $\psi_0(q)$, эквивалентной $|0\rangle$, получим

$$\hat{a}\psi_0(q) = 0 \Rightarrow \hbar\frac{d\psi_0}{dq} + \eta q\psi_0 = 0. \tag{3}$$

Эту формулу можно рассматривать как уравнение для нахождения $\psi_0(q)$. Его решение универсально для любой системы и имеет вид *вещественной* гауссоиды

$$\psi_0(q;\eta) = A\exp\left\{-\frac{\eta}{2\hbar}q^2\right\}. \tag{4}$$

Стандартное условие нормировки связывает параметры A и η, так что $A = (\pi\hbar/\eta)^{-1/4}$ с точностью до произвольного фазового множителя.

В импульсном представлении волновая функция исходного вакуума имеет аналогичный вид с заменой q на p и η на η^{-1}

$$\psi_0(p;\eta) = (\pi\hbar\eta)^{-1/4}\exp\left\{-\frac{p^2}{2\eta\hbar}\right\}. \tag{5}$$

Тем самым волновые функции $\psi_0(q,\eta)$ и $\psi_0(p,\eta)$ описывают совокупность бесконечного числа состояний исходного вакуума, характеризуемых непрерывным параметром η. Изменяя его, мы можем моделировать различные характеристики внешней макрообстановки, в которой находится объект. Фактически, таким образом понятие вакуума распространяется на ситуации, когда под окружением подразумевается некий термостат, что характерно для термодинамики. При этом исходный (холодный) вакуум соответствует чисто квантовым процессам, исследованием которых занимается квантовая механика.

Очевидно, что в вакуумных состояниях (5) средние значения координаты и импульса равны нулю, а их дисперсии имеют вид

$$(\Delta q_0)^2 = \frac{\hbar}{2\eta}, \quad (\Delta p_0)^2 = \frac{\hbar\eta}{2}. \tag{6}$$

Отсюда следует, что в них произведение неопределенностей координаты и импульса (uncertainties product) $\mathcal{UP}_{p_0q_0}$ не зависит от η:

$$\mathcal{UP}_{p_0q_0} \equiv \Delta p_0 \cdot \Delta q_0 = \frac{\hbar}{2}. \tag{7}$$

Чтобы придать физический смысл параметру η, в качестве модели системы, для которой можно ввести понятие вакуума, рассмотрим квантовый осциллятор с частотой ω_0. Заметим, что предложенная модель обладает достаточной общностью, потому что практически для любой системы потенциальная энергия вблизи минимума может быть аппроксимирована параболой. Гамильтониан системы в этом случае имеет вид

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2\hat{q}^2}{2}. \tag{8}$$

После обратного перехода от операторов $\hat{p}$ и $\hat{q}$ к операторам $\hat{a}^+$ и $\hat{a}$ его можно представить в форме

$$\hat{\mathcal{H}} = \hbar\omega_0\left(\hat{N} + \frac{1}{2}\hat{I}\right). \tag{9}$$

Очевидно, что основное состояние гамильтониана для квантового осциллятора совпадает с состоянием вакуума $|0\rangle$, причем среднюю энергию в этом состоянии U_0, совпадающую с минимальным собственным значением ε_0 гамильтониана

$$U_0 = \langle\psi_0|\hat{\mathcal{H}}|\psi_0\rangle = \varepsilon_0 = \frac{\hbar\omega_0}{2}, \tag{10}$$

можно найти непосредственно из опыта, не решая уравнение Шредингера, но используя, например, формулу (7).

Учитывая квадратичную зависимость кинетической K и потенциальной энергии Π осциллятора соответственно от импульса и координаты, для их средних значений получим одинаковые величины, равные $(1/2)\varepsilon_0$:

$$\langle\psi_0|\hat{K}|\psi_0\rangle = \frac{(\Delta p_0)^2}{2m} = \frac{\hbar\omega_0}{4} = \langle\psi_0|\hat{\Pi}|\psi_0\rangle = \frac{1}{2}m\omega_0^2(\Delta q_0)^2. \tag{11}$$

Отсюда следует, что для квантового осциллятора

$$(\Delta p_0)^2 = \frac{\hbar m\omega_0}{2}, \quad (\Delta q_0)^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}, \tag{12}$$

так что с учетом (6) $\eta = m\omega_0$.

Тем самым в рассматриваемой модели мы имеем дело с конкретной реализацией вакуума, зависящей от двух параметров — массы осциллятора m и его частоты ω_0. Поскольку параметр η непрерывен, каждому его возможному значению мы можем сопоставить условную частоту ω, фиксировав параметр $m = 1$. Это позволяет рассматривать совокупность состояний исходного вакуума, описываемых волновыми функциями $\psi_0(q;\omega)$, как бесконечный набор квантовых нормальных мод всех частот *вещественного скалярного* поля. Оно представляет собой аналог предельного случая (при $T_0 = 0$) равновесного теплового излучения.

3. ГАМИЛЬТОНИАН ИСХОДНОГО ВАКУУМА

Для более последовательного изложения на языке первичного квантования мы имеем возможность ввести оператор энергии, который будем называть гамильтонианом исходного вакуума

$$\hat{\mathfrak{H}}_0 \equiv \hbar\omega\hat{N}. \tag{13}$$

Тогда ввиду линейной связи данных операторов исходному вакууму можно дать еще одну интерпретацию, рассматривая его теперь как собственное состояние оператора $\hat{\mathfrak{H}}_0$ с нулевым собственным значением

$$\hat{\mathfrak{H}}_0\psi_0(q;\omega) = 0\cdot\psi_0(q;\omega) = 0. \tag{14}$$

В состоянии равновесия данное уравнение имеет смысл уравнения Шредингера для исходного вакуума. С учетом определения (13) и формулы (9) мы имеем возможность установить связь между операторами $\hat{\mathfrak{H}}_0$ и $\hat{\mathcal{H}}$

$$\hat{\mathfrak{H}}_0 = \hat{\mathcal{H}} - \frac{1}{2}\hbar\omega\hat{I} = \hat{\mathcal{H}} - \omega\hat{j}_0. \tag{15}$$

Здесь гамильтониан системы $\hat{\mathcal{H}}$ имеет вид (8) и введен специальный оператор:

$$\hat{j}_0 \equiv \frac{\hbar}{2}\hat{I}. \tag{16}$$

Как видно, этот оператор не зависит от системы, на которую оказывается воздействие, а его собственное значение $\hbar/2$, совпадающее в состоянии $\psi_0(q;\omega)$ со средним

$$\langle\psi_0|\hat{j}_0|\psi_0\rangle \equiv J_0^{\mathrm{inf}}, \tag{17}$$

не зависит от выбора ω и определяется только постоянной Планка — константой квантового воздействия. На этом основании $\hat{j}_0$ мы называем *оператором квантового стохастического воздействия окружения*.

Поскольку согласно (14) среднее значение гамильтониана вакуума $\hat{\mathfrak{H}}_0$ в состоянии $\psi_0(q;\omega)$ равно нулю, из выражения (15) следует равенство

$$\langle\psi_0|\hat{\mathcal{H}}|\psi_0\rangle = \langle\psi_0|\omega\hat{j}_0|\psi_0\rangle = \omega\langle\psi_0|\hat{j}_0|\psi_0\rangle. \tag{18}$$

Согласно (10) левая часть (18) равна U_0.

В то же время левая часть равенства (18) имеет смысл средней энергии стохастического воздействия окружения. Иначе говоря, состояние исходного вакуума выделено тем, что в нем средняя энергия системы U_0, моделируемой квантовым осциллятором, в условиях равновесия совпадает со средней энергией квантового стохастического воздействия окружения.

Учитывая формулы (10) и (12), равенство (18) можно переписать в виде, совпадающем с (7),

$$\frac{U_0}{\omega} = \Delta p_0 \cdot \Delta q_0 = \frac{\hbar}{2} = J_0^{\inf}. \tag{19}$$

Тогда исходный вакуум можно трактовать иначе, а именно, как состояние, в котором в условиях равновесия системы с окружением оказываются равными две различные величины — U_0/ω (как мера ответной реакции системы на воздействие окружения) и $J_0^{\inf}$ (как мера самого воздействия):

$$\frac{U_0}{\omega} = J_0^{\inf}. \tag{20}$$

4. ПЕРЕХОД К ПРОИЗВОЛЬНОМУ ВАКУУМУ

С физической точки зрения нас, прежде всего, интересует переход от совокупности состояний исходного вакуума $\psi_0(q;\omega)$ к совокупности произвольных вакуумных состояний, характеризующих равновесие с окружением. При этом в общем случае температура окружения может не равняться нулю.

Мы предлагаем для этого перейти от модели *исходного* к модели *произвольного* вакуума, состоящей из бесконечной совокупности нормальных мод, но уже *не вещественного, а комплексного скалярного поля*.

Для получения состояний произвольного вакуума в координатном представлении может быть эффективно использована группа (u,v)-преобразований Боголюбова. Она представляет собой группу Ли $SU(1,1)$-преобразований матриц 2×2 вида

$$g = g(u,v) = \begin{pmatrix} u & v \\ v^* & u^* \end{pmatrix} \tag{21}$$

с детерминантом

$$|u|^2 - |v|^2 = 1, \tag{22}$$

локально изоморфную группе Лоренца $O(2,1)$.

В общем случае [20] u и v — это *комплексные* функции, которые могут быть заданы тремя вещественными параметрами (τ,θ,φ):

$$u = \operatorname{ch}\tau\, \mathrm{e}^{i\varphi}, \quad v = \operatorname{sh}\tau\, \mathrm{e}^{-i(\varphi+\theta)}. \tag{23}$$

Эти параметры выражаются через углы Эйлера, используемые для параметризации группы вращений $O(3)$, причем без ограничений общности в данном случае можно положить $\theta = 0$.

Для достижения поставленной цели еще раз воспользуемся языком вторичного квантования. Перейдем от операторов рождения $\hat{a}^+$ и уничтожения $\hat{a}$ исходных частиц и вакуума $|0\rangle$, описываемого вещественной волновой функцией $\psi_0(q;\omega)$, к операторам рождения $\hat{b}^+$ и уничтожения $\hat{b}$ квазичастиц и соответствующему произвольному вакууму $|0_{\tau,\varphi}\rangle$, описываемому комплексной волновой функцией

$$|0_{\tau,\varphi}\rangle \equiv \psi_{\tau,\varphi}(q;\omega). \tag{24}$$

Для этого положим

$$\hat{b} = u\hat{a} + v\hat{a}^+, \quad \hat{b}^+ = v^*\hat{a} + u^*\hat{a}^+, \tag{25}$$

где функции u и v определены (при $\theta = 0$) формулами (23).

Такой переход, хотя и сохраняет форму канонических перестановочных соотношений $[\hat{b}, \hat{b}^+] = \hat{I}$, но приводит к их унитарно неэквивалентным представлениям, поскольку исходный и произвольный вакуумы — это системы с бесконечным числом степеней свободы. Разумеется, при $\tau = 0$ и $\varphi = 0$ операторы $\hat{b}$ и $\hat{b}^+$ переходят в операторы $\hat{a}$ и $\hat{a}^+$ и, соответственно, вакуум $\psi_{\tau,\varphi}(q;\omega)$ переходит в вакуум $\psi_0(q;\omega)$.

Подставляя определения (1) операторов $\hat{a}$ и $\hat{a}^+$ с $\eta = \omega$ в формулу (25) для оператора $\hat{b}$ и действуя этим оператором на волновую функцию произвольного вакуума $\psi_{\tau,\varphi}(q,\omega)$, вместо уравнения (3) получим аналогичное уравнение

$$\hat{b}\psi_{\tau,\varphi}(q,\omega) = 0 \tag{26}$$

или

$$(u - v)\hbar\frac{d\psi_{\tau,\varphi}}{dq} + (u + v)\,\omega q\psi_{\tau,\varphi} = 0. \tag{27}$$

Его решение при произвольных τ и φ в отличие от (4) имеет вид комплексной гауссоиды

$$\psi_{\tau,\varphi}(q,\omega) = \left[2\pi(\Delta q_0)^2|u - v|^2\right]^{-1/4} \exp\left\{-\frac{q^2}{4(\Delta q_0)^2}\frac{u + v}{u - v}\right\}, \tag{28}$$

где u и v — комплексные функции вида (23), или

$$\psi_{\tau,\varphi}(q,\omega) = \left[2\pi(\Delta q_{\tau,\varphi})^2\right]^{-1/4} \exp\left\{-\frac{q^2}{4(\Delta q_{\tau,\varphi})^2}(1 - i\alpha_{\tau,\varphi})\right\}. \tag{29}$$

Здесь

$$\alpha_{\tau,\varphi} = \operatorname{sh} 2\tau \cdot \sin 2\varphi, \tag{30}$$

а

$$(\Delta q_{\tau,\varphi})^2 = (\Delta q_0)^2(\operatorname{ch} 2\tau - \operatorname{sh} 2\tau \cdot \cos 2\varphi). \tag{30а}$$

Аналогично можно показать, что вакуумная функция в импульсном представлении $\psi_{\tau,\varphi}(p,\omega)$ также имеет форму комплексной гауссоиды с той же характеристикой $\alpha_{\tau,\varphi}$ и

$$(\Delta p_{\tau,\varphi})^2 = (\Delta p_0)^2(\operatorname{ch} 2\tau + \operatorname{sh} 2\tau \cdot \cos 2\varphi), \tag{30б}$$

причем Δq_0^2 и Δp_0^2 согласно (12) зависят от ω.

Заметим, что произведение дисперсий $(\mathcal{UP})^2$

$$(\Delta q_{\tau,\varphi})^2 \cdot (\Delta p_{\tau,\varphi})^2 = (\Delta q_0)^2 \cdot (\Delta p_0)^2(\operatorname{ch}^2 2\tau - \operatorname{sh}^2 2\tau \cdot \cos^2 2\varphi) \tag{31}$$

в общем случае отличается от величины $\hbar^2/4$ в (7) для исходного вакуума и совпадает с ней только для вещественных волновых функций, когда $\alpha_{\tau,\varphi} = 0$.

Далее, вычисление средних значений эффективных кинетической и потенциальной энергий квантового осциллятора в равновесии с произвольным вакуумом дает

$$\begin{aligned} K_{\tau,\varphi} &= \frac{\hbar\omega}{4}(\operatorname{ch} 2\tau + \operatorname{sh} 2\tau \cdot \cos 2\varphi), \\ \Pi_{\tau,\varphi} &= \frac{\hbar\omega}{4}(\operatorname{ch} 2\tau - \operatorname{sh} 2\tau \cdot \cos 2\varphi), \end{aligned} \tag{32}$$

т. е. $K_{\tau,\varphi} \neq \Pi_{\tau,\varphi}$. Иными словами, эти выражения совпадают только для тех комплексных волновых функций, у которых $\varphi = \pi/4$, а τ произвольно. Для всех остальных функций произвольного вакуума совпадение возможно только при $\tau = 0$, т. е. в предельном случае исходного вакуума.

Наконец, по аналогии с (10) примем, что средняя внутренняя энергия квантового осциллятора имеет вид

$$\begin{aligned} U_{\tau,\varphi} &\equiv \omega(\Delta q_{\tau,\varphi}) \cdot (\Delta p_{\tau,\varphi}) = \omega(\Delta q_0) \cdot (\Delta p_0)\sqrt{\operatorname{ch}^2 2\tau - \operatorname{sh}^2 2\tau \cdot \cos^2 2\varphi} = \\ &= \frac{\hbar\omega}{2}\sqrt{(\operatorname{ch}^2 2\tau - \operatorname{sh}^2 2\tau) + \operatorname{sh}^2 2\tau(1 - \cos^2 2\varphi)} = \frac{\hbar\omega}{2}\sqrt{\operatorname{sh}^2 2\tau \cdot \sin^2 2\varphi + 1} = \\ &= \frac{\hbar\omega}{2}\sqrt{\alpha^2_{\tau,\varphi} + 1}, \end{aligned} \tag{33}$$

одинаковый для всех волновых функций $\psi_{\tau,\varphi}(q,\omega)$.

Очевидно, что в общем случае выражение (33) для $U_{\tau,\varphi}$ определяется фазой волновой функции произвольного вакуума, зависящей от $\alpha_{\tau,\varphi}$. И только для вещественных волновых функций, когда $\alpha_{\tau,\varphi} = 0$, вместо (33) имеем $U_0 = \hbar\omega/2$, что характерно для исходного вакуума.

Для комплексных волновых функций произвольного вакуума полезный для дальнейшего анализа выбор выражения (33) достигается только при $\varphi = \pi/4$, когда

$$U_{\tau,\varphi} = \frac{\hbar\omega}{2}\sqrt{\operatorname{sh}^2 2\tau \cdot \sin^2 \frac{\pi}{2} + 1} = \frac{\hbar\omega}{2}\operatorname{ch} 2\tau. \tag{34}$$

Отметим, что в формуле (34) зависимость от фазы сохраняется, ибо по-прежнему $\alpha_{\tau,\phi} = \operatorname{sh} 2\tau \neq 0$, хотя эта зависимость оказывается скрытой.

Эту скрытую зависимость можно обнаружить при использовании традиционного способа вычисления средней внутренней энергии квантового осциллятора. Если не обращать внимания на существенный физический факт (неравенство $K_{\tau,\varphi} \neq \Pi_{\tau,\varphi}$), следующий из формулы (32), и ввести $U_{\tau,\varphi}$ выражением

$$U_{\tau,\varphi} = \langle\psi_{\tau,\varphi}|\hat{\mathcal{H}}|\psi_{\tau,\varphi}\rangle = K_{\tau,\varphi} + \Pi_{\tau,\varphi},$$

то члены в сумме, зависящие от произвольного значения φ, сокращаются. В итоге для $U_{\tau,\phi}$ получается то же самое значение (34), так что оно формально имеет место для любых значений φ, а не только при $\varphi = \pi/4$. Однако это вовсе не означает, что соответствующие состояния произвольного вакуума являются вещественными, ибо для них по-прежнему $\alpha_{\tau,\phi} \neq 0$.

5. ГАМИЛЬТОНИАН ПРОИЗВОЛЬНОГО ВАКУУМА И ОПЕРАТОР ЦЕЛОСТНОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

Для прояснения физического смысла наших действий полезно заметить, что выражение $\omega\hat{j}_0$ в формуле (15) представляет собой эрмитов оператор энергии квантового стохастического воздействия окружения, так что для него целесообразно ввести специальное обозначение

$$\hat{\mathfrak{H}}_0^{\mathrm{inf}} \equiv \omega\hat{j}_0.$$

С учетом сказанного формула (15) для гамильтониана исходного вакуума принимает вид

$$\hat{\mathfrak{H}}_0 = \hat{\mathcal{H}} - \hat{\mathfrak{H}}_0^{\mathrm{inf}}. \tag{35}$$

В нем явно выделен вклад энергии квантового воздействия окружения.

Обобщая формулу (14) для исходного вакуума, можно утверждать, что волновая функция вида (29) $\psi_{\tau,\varphi}(q,\omega)$ является собственной функцией соответствующего гамильтониана произвольного вакуума $\widehat{\mathfrak{H}}_{\tau,\varphi}$ с нулевым собственным значением

$$\widehat{\mathfrak{H}}_{\tau,\varphi}\psi_{\tau,\varphi}(q,\omega) = 0\cdot\psi_{\tau,\varphi}(q,\omega) = 0. \tag{36}$$

При произвольных параметрах τ и φ этот оператор имеет вид

$$\widehat{\mathfrak{H}}_{\tau,\varphi} \equiv \hat{\mathcal{H}}_{\tau,\varphi} - \hat{\mathfrak{H}}_{\tau,\varphi}^{\mathrm{inf}}. \tag{37}$$

Здесь с учетом формул (26), (32), (30а) и (30б) введены обозначения:

$$\hat{\mathcal{H}}_{\tau,\varphi} \equiv (\operatorname{ch}2\tau - \operatorname{sh}2\tau\cdot\cos 2\varphi)\hat{K}_{\tau,\varphi} + (\operatorname{ch}2\tau + \operatorname{sh}2\tau\cdot\cos 2\varphi)\hat{\Pi}_{\tau,\varphi} \tag{38}$$

— гамильтониан системы в произвольном состоянии $\psi_{\tau,\varphi}(q,\omega)$, а

$$\hat{\mathfrak{H}}_{\tau,\varphi}^{\mathrm{inf}} = \omega\hat{\sigma}_{\tau,\varphi} + \hat{\mathfrak{H}}_0^{\mathrm{inf}}, \tag{39}$$

где

$$\hat{\sigma}_{\tau,\varphi} \equiv (\operatorname{sh}2\tau\cdot\sin 2\varphi)\frac{1}{2}(\hat{p}\,\hat{q} + \hat{q}\hat{p}),$$

и, как и выше, $\hat{\mathfrak{H}}_0^{\mathrm{inf}} = \omega\hat{j}_0$. Оператор (39) можно трактовать как оператор энергии целостного стохастического воздействия окружения в произвольном вакуумном состоянии. При $\tau = 0, \varphi = 0$ он, разумеется, переходит в $\widehat{\mathfrak{H}}_0^{\mathrm{inf}}$ исходного вакуума.

Переходя в формуле (39) от операторов энергии снова к операторам стохастического воздействия, нетрудно видеть, что помимо универсального оператора $\widehat{j}_0$, характеризующего квантовое стохастическое воздействие исходного вакуума, в общем случае в выражение (39) входит существенно новый оператор

$$\widehat{\sigma} \equiv \frac{1}{2}(\hat{p}\,\hat{q} + \hat{q}\hat{p}). \tag{40}$$

Он характеризует дополнительное воздействие, возникающее при переходе от исходного вакуума к произвольному, допускающему ситуации с ненулевой температурой окружения. При высоких температурах окружения, когда операторы $\widehat{p}$ и $\widehat{q}$ можно приближенно заменить на c-числа, среднее значение оператора $\hat{\sigma}$ принимает вид коррелятора случайных значений координаты и импульса

$$\Sigma_{\tau,\varphi} \equiv \langle \psi_{\tau,\varphi} | \widehat{\sigma} | \psi_{\tau,\varphi} \rangle \approx \overline{p\,q},$$

известного из классической теории вероятностей. В этом пределе квантовыми эффектами можно пренебречь, так что в этом частном случае при некотором выборе параметров τ и φ величина $\Sigma_{\tau,\varphi}$ может играть роль характеристики чисто теплового стохастического воздействия окружения.

В общем случае при усреднении по волновой функции $\psi_{\tau,\varphi}(q,\omega)$ вида (29) с учетом формулы (30)

$$\Sigma_{\tau,\varphi} = \langle \psi_{\tau,\varphi} | \hat{\sigma} | \psi_{\tau,\varphi} \rangle = \frac{\hbar}{2} \mathrm{sh}\, 2\tau \cdot \sin 2\varphi = \frac{\hbar}{2} \alpha_{\tau,\varphi}. \tag{41}$$

Таким образом, характеристика фазы комплексной волновой функции $\alpha_{\tau,\varphi}$, по существу, управляет корреляцией флуктуаций координаты и импульса $\Sigma_{\tau,\varphi}$. Так, для вещественных волновых функций, когда $\varphi = 0$, коррелятор обращается в нуль, а для комплексной волновой функции с $\varphi = \pi/4$ и произвольным τ он равен $(\hbar/2)\mathrm{sh}\, 2\tau$. Иными словами, использование вещественных волновых функций не позволяет полностью учесть стохастическое воздействие произвольного вакуума. Они обеспечивают только учет квантового воздействия исходного вакуума.

6. НЕКОМПАКТНАЯ ГРУППА СИММЕТРИИ ПРОИЗВОЛЬНОГО ВАКУУМА

Для выяснения роли оператора дополнительного стохастического воздействия $\hat{\sigma}$ вида (40) в квантовой теории в целом сравним свойства симметрии гамильтониана системы $\hat{\mathcal{H}}$, моделируемой квантовым осциллятором, и гамильтониана произвольного вакуума $\hat{\mathfrak{H}}_{\tau,\varphi}$. Для этого проанализируем алгебраические свойства входящих в них операторов. Как было показано в работе [21], группой симметрии квантового осциллятора является некомпактная группа Лоренца $O(2,1)$. Мы покажем, что эта группа имеет прямое отношение к выяснению роли операторов $\hat{\sigma}$ и $\hat{j}_0$ в описании равновесия с произвольным вакуумом.

С этой целью перейдем к безразмерным переменным $\hat{\mathcal{P}} = \dfrac{1}{i}\dfrac{d}{d\mathcal{Q}}$ и $\hat{\mathcal{Q}}$ и введем стандартным образом квадратичные комбинации этих операторов

$$\begin{cases} \widehat{S}_0 \equiv \dfrac{1}{4}\left(\hat{\mathcal{Q}}^{\,2} - \dfrac{d^2}{d\mathcal{Q}^2}\right), \\ \widehat{S}_1 \equiv \dfrac{i}{4}\left(\hat{\mathcal{Q}}\dfrac{d}{d\mathcal{Q}} + \dfrac{d}{d\mathcal{Q}}\hat{\mathcal{Q}}\right), \\ \widehat{S}_2 \equiv -\dfrac{1}{4}\left(\hat{\mathcal{Q}}^{\,2} + \dfrac{d^2}{d\mathcal{Q}^2}\right) \end{cases} \tag{42}$$

и выясним их физический смысл. Для этого сравним их (при $\hbar = m = \omega = 1$) с безразмерными гамильтонианом $\hat{\mathcal{H}} = \hat{K} + \hat{\Pi}$, лагранжианом $\hat{\mathcal{L}} = \hat{K} - \hat{\Pi}$ одномерного квантового осциллятора и оператором энергии стохастического воздействия $\omega\hat{\sigma}$ (при $\omega = 1$), где $\hat{\sigma}$ имеет вид (40).

В итоге получим, что с точностью до множителя 1/2 эти операторы совпадают с операторами из совокупности (42)

$$\hat{S}_0 = \frac{1}{2}\hat{\mathcal{H}}, \quad \hat{S}_1 = -\frac{1}{2}\hat{\sigma}, \quad \hat{S}_2 = \frac{1}{2}\hat{\mathcal{L}}. \tag{43}$$

Подчеркнем: тот факт, что не только операторам $\hat{S}_0$, $\hat{S}_2$, но и оператору $\hat{S}_1$ можно придать самостоятельный физический смысл, до сих пор в литературе не отмечался.

Составим далее коммутаторы операторов $\hat{S}_i$. Они имеют вид

$$[\hat{S}_0, \hat{S}_1,] = i\hat{S}_2, \quad [\hat{S}_1, \hat{S}_2,] = -i\hat{S}_0, \quad [\hat{S}_2, \hat{S}_0,] = i\hat{S}_1. \tag{44}$$

Из этих соотношений следует, что данные три оператора образуют алгебру Ли, в которой оператор $\hat{j}_0 = (1/2)\hat{I}$ играет роль единицы.

Заметим, что в отличие от алгебры Ли аналогичных операторов группы вращений $O(3)$ второй коммутатор в (44) имеет знак «минус». Это соответствует тому, что группа Лоренца $O(2,1)$, генерируемая операторами (43), оставляет инвариантной индефинитную форму $(\mu, \nu = 0, 1, 2)$

$$x^2 = g^{\mu,\nu}x_\mu x_\nu = x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = \mathrm{inv}. \tag{45}$$

Гамильтониан $\hat{\mathcal{H}}$ в этом случае имеет смысл генератора обычного поворота в плоскости (1–2), а оператор энергии стохастического воздействия $\omega\hat{\sigma}$ и лагранжиан $\hat{\mathcal{L}}$ — генераторов лоренцевых поворотов (бустов) в плоскостях (0–1) и (0–2). Тем самым операторы $\omega\hat{\sigma}$ и $\hat{\mathcal{L}}$ оказываются совершенно равноправными.

Из проведенного рассмотрения следует, что оператор $\omega\hat{\sigma}$ является столь же существенным элементом квантовой теории, как и гамильтониан $\hat{\mathcal{H}}$ и лагранжиан $\hat{\mathcal{L}}$, которые выражаются через стандартные операторы кинетической и потенциальной энергий. Как указывалось выше, оператор $\omega\hat{\sigma}$ имеет физический смысл оператора энергии дополнительного стохастического воздействия (при $T_0 \neq 0$), т. е. в отличие от операторов $\hat{\mathcal{H}}$ и $\hat{\mathcal{L}}$ он является характеристикой внешней макрообстановки. Нетрудно также видеть, что операторы $\hat{\mathfrak{H}}_{\tau,\varphi}$ и $\hat{\mathcal{H}}_{\tau,\varphi}$ не имеют общих собственных функций, поскольку операторы $\omega\hat{\sigma}_{\tau,\varphi}$ и $\hat{\mathcal{H}}_{\tau,\varphi}$ согласно первому из равенств (44) не коммутируют.

Иначе говоря, не существует даже одного состояния, в котором одновременно точно заданы энергия воздействия и энергия системы. В силу стохастичности воздействия говорить об определенности его энергии не приходится, так что неизбежно это понятие переносится также и на энергию системы — она становится «размазанной». Таким образом, в другой форме мы имеем подтверждение неизолированности системы в этих условиях. Учет этого обстоятельства как раз требует специального описания в форме оператора дополнительного стохастического воздействия.

Это обстоятельство позволяет по-новому истолковать уравнение (36) для волновой функции произвольного вакуума с $\hat{\mathfrak{H}}_{\tau,\varphi}$ вида (37). По форме оно напоминает стандартное условие, присущее механике Дирака со связями. В данном случае оператор $\hat{\mathfrak{H}}^{\mathrm{inf}}$ вида (39) представляет собой сумму двух операторов, отражающих наличие стохастического воздействия окружения. С физической точки зрения это означает наложение на исследуемую систему в состоянии равновесия связей с произвольным вакуумом как с системой с бесконечным числом степеней свободы.

Отметим, что поскольку операторы $\hat{\mathcal{H}}$ и $\hat{j}_0$ коммутируют, соответствующая квантовая связь является универсальной связью II рода, имеющей место и в исходном вакууме. Она не ограничивает выбор пространства состояний вакуума. В то же время операторы $\hat{\mathcal{H}}$ и $\hat{\sigma}$ согласно (44) не коммутируют. Поэтому связь, отвечающая оператору $\hat{\sigma}$, является связью I рода, играющей существенную роль в выборе пространства состояний произвольных вакуумов.

7. ФИЗИЧЕСКИ ЗНАЧИМЫЕ ПОДГРУППЫ (u,v)-ПРЕОБРАЗОВАНИЙ БОГОЛЮБОВА И СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ПРОИЗВОЛЬНЫЕ ВАКУУМЫ

Для более подробного анализа совокупности состояний произвольного вакуума введем, следуя [20], полезные физические характеристики исследуемых состояний. К ним относятся две величины: k — коэффициент сжатия дисперсий координаты и импульса (в безразмерных единицах)

$$k = \frac{(\Delta Q_{\tau,\varphi})^2}{(\Delta P_{\tau,\varphi})^2} = \frac{\operatorname{ch} 2\tau - \operatorname{sh} 2\tau \cdot \cos 2\varphi}{\operatorname{ch} 2\tau + \operatorname{sh} 2\tau \cdot \cos 2\varphi} \tag{46}$$

и r — коэффициент корреляции флуктуаций координаты и импульса,

$$r = \frac{\Sigma_{\tau,\varphi}}{\Delta p_{\tau,\varphi} \Delta q_{\tau,\varphi}} = \sin 2\varphi \, (\operatorname{cth}^2 2\tau - \cos^2 2\varphi)^{-1/2}, \tag{47}$$

где $\Sigma_{\tau,\varphi}$ — среднее значение коррелятора (41) при любых τ и φ. Отметим, что при произвольных значениях параметров τ и φ состояния вакуума могут быть частично сжатыми и частично коррелированными одновременно. Однако при этом коэффициенты k и r не достигают экстремально возможных значений.

Все состояния произвольного вакуума, которым в q-представлении соответствуют комплексные гауссоиды вида (29), относятся к числу когерентных состояний, обеспечивающих насыщенность соотношения неопределенностей Шредингера «координата-импульс». Предложенные коэффициенты k и r позволяют выделить из группы произвольных (u,v)-преобразований Боголюбова две физически значимые подгруппы и тем самым выделить из когерентных состояний (29) соответствующие им вакуумные состояния, отвечающие либо чистому сжатию, либо чистой корреляции:

а) Подгруппу гиперболических поворотов на псевдоевклидовой плоскости ($\tau \neq 0, \varphi = 0, \theta = 0$), когда нет корреляции, но есть сжатие ($r = 0, k \neq 1$) с вещественными функциями $u = \operatorname{ch}\tau$ и $v = \operatorname{sh}\tau$. Этой подгруппе соответствуют чисто сжатые когерентные состояния (СКС) с минимальным значением $k = \exp\,(-4\tau)$.

б) Подгруппу обратимых линейных канонических преобразований, когда есть корреляция, но нет сжатия ($r \neq 0; k = 1$). Этому случаю соответствуют чисто коррелированные когерентные состояния (ККС) с максимальным значением $r = (\operatorname{cth} 2\tau)^{-1}$.

Отметим, что реализация подгруппы б) при произвольном τ в принципе возможна двумя способами: либо $\varphi = 0, \theta = \pi/2$, либо $\varphi = \pi/4, \theta = 0$. В первом из них функция u вещественная, а v — чисто мнимая. Во втором, предложенном нами [3], более симметричном и единственном при $\theta = 0$, обе функции комплексные

$$u = \operatorname{ch}\tau \, \exp\left(i\frac{\pi}{4}\right), \quad v = \operatorname{sh}\tau \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right). \tag{48}$$

Физический смысл совокупностей СКС (с $\varphi = 0$) и ККС (с $\varphi = \pi/4$) проясняется при их использовании в качестве вакуумных волновых функций. Для этого изменим параметризацию этих состояний и положим

$$\operatorname{ch} 2\tau = \operatorname{cth}\left(\beta\frac{\hbar\omega}{2}\right), \quad \operatorname{sh} 2\tau = \left[\operatorname{sh}\left(\beta\frac{\hbar\omega}{2}\right)\right]^{-1}. \tag{49}$$

В этом случае роль единственного нефиксированного параметра τ $(0 \leqslant \tau < \infty)$ перейдет к другому параметру $\beta\,(\infty > \beta \geqslant 0)$.

Поскольку формула (35) для средней внутренней энергии не зависит от φ, она, казалось бы, в равной мере может быть использована как для СКС, так и для ККС. С учетом (49) она принимает вид

$$U_\beta = \langle\psi_\beta|\hat{\mathcal{H}}|\psi_\beta\rangle = \frac{\hbar\omega}{2}\operatorname{cth}\left(\beta\frac{\hbar\omega}{2}\right). \tag{50}$$

Сопоставление ее с формулой Планка позволяет связать параметр β с обратной кельвиновой температурой $\beta = (k_B T_0)^{-1}$. Однако равноправие СКС и ККС оказывается обманчивым.

Действительно, если принять во внимание, что для СКС $\operatorname{sh} 2\tau = 0$, ибо для вещественных вакуумных функций корреляция отсутствует, то в этих состояниях $U_\beta = U_0 = \hbar\omega/2$. Тем самым СКС описываются *холодными* вакуумными функциями, которые характеризуют только исходный вакуум (с $T_0 = 0$).

В итоге для описания теплого вакуума (с $T_0 \neq 0$) оказываются пригодными только комплексные вакуумные функции ККС с $\varphi = \pi/4$, в которых корреляция максимальна. По этой причине их естественно назвать *тепловыми* ККС. При $T_0 \to 0$, разумеется, они переходят в волновые функции исходного вакуума.

8. НЕКОТОРЫЕ ИТОГИ

1. Как заметил в своей последней работе Дирак [22], он посвятил многие годы жизни поиску гамильтониана, наиболее пригодного для квантовой теории. Однако постепенно возникло понимание того, что знание только одного гамильтониана системы для описания природы недостаточно. Сам Дирак настойчиво предлагал учесть в теории более полно вклад квантового стохастического воздействия вакуума. Развивая эту программу, мы, тем не менее, отказались от идеи совершенствовать гамильтониан *системы* и пошли по пути введения *самостоятельных* операторов энергии $\omega\hat{\sigma}$ и $\omega\hat{j}_0$, учитывающих воздействие вакуума. Этот маневр позволил отнести тепловые степени свободы не к самой системе, а к *воздействию окружения* (квантотермостата).

2. Нами показано, что волновые функции холодного ψ_0 и произвольного $\psi_{\tau,\varphi}$ вакуумов в q-представлении можно найти на основе (u, v)-преобразований Боголюбова без прямого использования уравнения Шредингера.

3. Введен гамильтониан произвольного вакуума $\hat{\mathfrak{H}}$ и установлена его связь с операторами стохастического воздействия окружения квантового $\hat{j}_0$ и теплового $\hat{\sigma}$ типов, реализующими связи II и I рода.

4. Установлено, что данные операторы являются органичной частью последовательной квантовой теории, образуя вместе с гамильтонианом и лагранжианом замкнутую алгебру Ли.

5. Продемонстрировано, что физически значимые подгруппы группы (u, v)-преобразований Боголюбова при произвольном значении параметра τ, но с $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/4$ порождают соответственно вещественные сжатые когерентные и комплексные коррелированные когерентные состояния, обеспечивающие описание равновесия с холодным ($T_0 = 0$) и теплым ($T_0 > 0$) окружением.

Авторы выражают благодарность участникам конференции в Самаре, научных семинаров в Институте теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова (Киев), на кафедрах теоретической физики РУДН и функционального анализа МГУ им. М. В. Ломоносова за плодотворные дискуссии, а также персонально А. Г. Загороднему, В. Г. Барьяхтару, И. В. Воловичу, Н. М. Плакиде, Ю. П. Рыбакову, О. Г. Смолянову и М. Л. Фильченкову за полезные идеи, стимулировавшие завершение данной работы. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 10-01-90408).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Umezawa H.* Advanced Field Theory. Micro-, Macro- and Thermal Physics. N. Y.: AIP, 1993.
2. *Суханов А. Д.* // ТМФ. 2006. Т. 148, вып. 2. С. 295.
3. *Суханов А. Д.* // ТМФ. 2008. Т. 154, вып. 1. С. 185.
4. *Суханов А. Д., Голубева О. Н.* // ТМФ. 2009. Т. 160, вып. 2. С. 369.
5. *Sukhanov A. D., Golubjeva O. N.* Modern Stochastic Thermodynamics // Thermodynamics / Ed. T. Mizutani. Vienna: InTech, 2011. P. 73.
6. *Sukhanov A. D., Golubjeva O. N., Bar'jakhtar V. G.* // Ukr. J. Phys. 2011 (in press).
7. *Эйнштейн А.* // Собр. науч. тр. Т. 3. М.: Наука, 1966. С. 67.
8. *Эйнштейн А.* // Там же. С. 210.
9. *Суханов А. Д.* // ЭЧАЯ. 2005. Т. 36, вып. 6. С. 1281.
10. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 5: Статистическая физика. Ч. 1. М.: Физматлит, 2001.
11. *Ансельм А. И.* Основы статистической физики и термодинамики. СПб.; М.: Лань, 2007.
12. *Гиббс Дж.* Основные принципы статистической механики // Термодинамика. Статистическая механика. М.: Наука, 1982. С. 350.
13. *Суханов А. Д., Рудой Ю. Г.* // УФН. 2006. Т. 176, № 5. С. 551.
14. *Никольский К. В.* Квантовые процессы. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1940.
15. *Блохинцев Д. И.* Принципиальные вопросы квантовой механики. М.: Наука, 1966. С. 54.
16. *Боголюбов Н. Н.* // Собр. науч. тр. Т. 6. М.: Наука, 2006. С. 432.
17. *Боголюбов Н. Н.* Там же. С. 9.
18. *Боголюбов Н. Н.* // Собр. науч. тр. Т. 8. М.: Наука, 2007. С. 398.
19. *Медведев Б. В.* Начала теоретической физики. М.: Наука, 2006.
20. *Додонов В. В., Манько В. И.* // Тр. ФИАН. 1987. Т. 183. С. 71.
21. *Barut A. D., Fronsdal G.* // Proc. Roy. Soc. A. 1965. V. 287, No. 1411. P. 532.
22. *Дирак П. А. М.* // Собр. науч. тр. Т. 3. М.: Физматлит, 2004. С. 71.

Получено 9 сентября 2011 г.