Письма в ЭЧАЯ. 2013. Т. 10, № 1(178). С. 45–50

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА. ТЕОРИЯ

ПОТЕНЦИАЛ, ОТВЕЧАЮЩИЙ ЗА МНОГОФОТОННЫЕ ОБМЕНЫ ПРИ РАССЕЯНИИ ЛЕГКОЙ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ НА ТЯЖЕЛОЙ МИШЕНИ

Ю. М. Быстрицкий [а, 1], *Э. А. Кураев* [а, 2], *М. Г. Шатнев* [б, 3]

[а] Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

[б] ННЦ Харьковский физико-технический институт, Харьков, Украина

Решение обратной классической задачи нахождения потенциала по дифференциальному сечению рассеяния было получено в 1953 г. О. Б. Фирсовым. С его использованием исследовано отклонение потенциала от кулоновского за счет обмена двумя и более фотонами при рассеянии электрона на внешнем поле, создаваемом тяжелым ядром с зарядом Z_e. Построен также эффективный потенциал, действующий на заряженную частицу в задаче плоскостного каналирования.

Classical solution of the inverse problem of determining the potential for differential scattering cross section was obtained by O. B. Firsov in 1953. We use it to investigate the deviation from the Coulomb potential due to the exchange of two or more photons in the scattering of an electron in an external field produced by a heavy nucleus with charge Z_e. We also construct the effective potential acting on a charged particle in the problem of planar channeling.

PACS: 13.60.-r; 12.20.Ds; 13.40.-f; 13.88.+e

ВВЕДЕНИЕ

Сечение рассеяния электрона на ядре заряда Z_e в пренебрежении эффектом отдачи описывается формулой Резерфорда

$$\frac{d\sigma^{(1)}}{d\theta} = \pi\frac{r_0^2}{4}\frac{\cos\theta/2}{\sin^3\theta/2}, \quad r_0 = \frac{Z\alpha}{E}, \quad \alpha = \frac{1}{137}, \tag{1}$$

где $E = mv^2/2$; θ — энергия и угол рассеяния электрона на покоящемся ядре, v — скорость электрона на большом расстоянии от рассеивающего центра, где потенциал становится пренебрежимо малым. Кулоновский потенциал взаимодействия имеет вид

$$\frac{U(r)}{E} = \frac{Z\alpha}{Er} = \frac{1}{z}, \quad z = \frac{r}{r_0}, \tag{2}$$

[1] E-mail: bystr@theor.jinr.ru

[2] E-mail: kuraev@theor.jinr.ru

[3] E-mail: mshatnev@yahoo.com

где r — расстояние между электроном и ядром. С точки зрения квантовой теории поля этот потенциал отвечает однофотонному обмену между ядром и электроном. Поправка низшего порядка теории возмущений отвечает обмену двумя фотонами. (Эта поправка отвечает на языке диаграмм Фейнмана однопетлевой диаграмме. Поскольку разложение по числу петель в амплитуде соответствует разложению по постоянной Планка h, она называется квантовой и не может быть получена в рамках классической механики.) Другими типами квантовых поправок будут поправки, связанные с учетом поляризации вакуума второго, четвертого порядка и высших порядков для функции Грина виртуального фотона. Мы не будем рассматривать их ниже. Поправка за счет излучения двух фотонов была вычислена в [1]:

$$\begin{gathered} \frac{d\sigma^{(1)} + d\sigma^{(2)}}{dO} = \frac{r_0^2}{16} \frac{1}{\sin^4 \theta/2} \left[1 + 4\pi (Z\alpha) \eta \left(\frac{\theta}{2} \right) \right], \\ \eta \left(\frac{\theta}{2} \right) = \sin \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \right), \quad dO = 2\pi \sin\theta \, d\theta. \end{gathered} \tag{3}$$

Учет поправок высших порядков, включая поправку второго порядка, сводится, как показано в работах [2], к замене

$$4\pi Z\alpha \to \Lambda, \quad \Lambda = 4\pi x \cos\phi(x), \quad x = \frac{Z\alpha c}{v} \approx Z\alpha, \tag{4}$$

где

$$\cos(\phi(x)) = \mathrm{Re} \left[\frac{\Gamma(1/2 + ix)\Gamma(1 - ix)}{\Gamma(1/2 - ix)\Gamma(1 + ix)} \right], \tag{5}$$

$$\phi(x) = -4(\ln 2) x + 4\zeta_3 x^3 + \ldots \tag{6}$$

Здесь и ниже мы полагаем $\beta = v/c = 1$. Функция $\phi(x)$ определена в (6). Одним из следствий является отличие сечений рассеяния электронов и позитронов на одном и том же ядре Y. Этот факт может быть проверен в опытах по измерению асимметрии,

$$A(\theta) = \frac{d\sigma^{e^+ Y \to e^+ Y} - d\sigma^{e^- Y \to e^- Y}}{d\sigma^{e^+ Y \to e^+ Y} + d\sigma^{e^- Y \to e^- Y}} = \Lambda(x) \sin\frac{\theta}{2} \left(1 - \sin\frac{\theta}{2} \right). \tag{7}$$

1. ОТКЛОНЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА ОТ КУЛОНОВСКОЙ ФОРМЫ

Ниже мы исследуем вопрос об отклонении потенциала взаимодействия электрона с ядром от его значения в борновском приближении:

$$u(r) = \frac{Z\alpha}{r} + \delta u(r). \tag{8}$$

Задача нахождения вида потенциала по виду дифференциального сечения рассеяния была решена О. Б. Фирсовым в 1953 г. [3]. Решение имеет вид (потенциал предполагается отталкивающим $u(r) > 0$):

$$W^2 = 1 - \frac{u(r)}{E} = \exp\left[-\frac{2}{\pi} \int\limits_{rW}^{\infty} \frac{\theta(\rho) d\rho}{\sqrt{\rho^2 - (rW)^2}} \right], \tag{9}$$

где $\rho(\theta)$ — прицельное расстояние. Этим уравнением задается потенциал в неявной форме. Преобразуем выражение интеграла в показателе экспоненты к виду

$$\int\limits_{rW}^{\infty} \frac{\theta(\rho)\,d\rho}{\sqrt{\rho^2-(rW)^2}} = \int\limits_{0}^{\kappa_0} \frac{\kappa\,d\kappa|d\rho/d\kappa|}{\sqrt{\rho^2(\kappa)-(rW)^2}}, \quad \rho(\kappa_0)=rW. \tag{10}$$

Рассмотрим вначале кулоновский потенциал $W^2=1-1/z$. Используя известное выражение

$$\pi\rho^2(\kappa) = \int\limits_{\kappa}^{\pi} \frac{d\sigma}{d\theta}d\theta, \quad \rho(\kappa)=(r_0/2)\,\mathrm{ctg}\,(\kappa/2), \tag{11}$$

получим замечательное тождество

$$\ln\left(1-\frac{1}{z}\right) = -\frac{4}{\pi}\int\limits_{0}^{\arcsin\frac{1}{2z-1}} \frac{x\,dx}{\sin^2 x\sqrt{\mathrm{ctg}^2 x-4z(z-1)}}, \quad z\geqslant 1, \tag{12}$$

в справедливости которого можно убедиться численным интегрированием. В общем случае $\delta u(r)\neq 0$ с введением обозначения $y(z)=\delta u(zr_0)/E$ уравнение приобретает вид

$$\ln\left(1-\frac{1}{z}-y(z)\right) = -\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\kappa_1} \frac{\kappa\,d\kappa\,(d\sigma/d\kappa)}{\sqrt{\rho^2(\kappa)-z^2r_0^2(1-1/z-y(z))}}, \tag{13}$$

где κ_1 находится из соотношения

$$\rho^2(\kappa_1) = z^2r_0^2\left(1-\frac{1}{z}-y(z)\right). \tag{14}$$

Для сечения рассеяния с учетом обменов одним и многими фотонами используем

$$\begin{gathered}\frac{d\sigma}{d\kappa} = \frac{d\sigma^{(1)}}{d\kappa}\left[1+\Lambda\eta\left(\frac{\kappa}{2}\right)\right], \quad \eta(x)=\sin x(1-\sin x);\\ \rho^2(\kappa)=\frac{r_0^2}{4}\left[\mathrm{ctg}^2\frac{\kappa}{2}+2\lambda\psi\left(\frac{\kappa}{2}\right)\right], \quad \psi(x)=\frac{1}{\sin x}-1+\ln(\sin(x)).\end{gathered} \tag{15}$$

Тогда уравнение (13) приобретает вид

$$\begin{aligned}&\ln\left(1-\frac{1}{z}-y(z)\right) = \\ &= -\frac{4}{\pi}\int\limits_{0}^{x_1} \frac{x\,dx(1+\Lambda\eta(x))}{\sin^2 x\sqrt{1+2\Lambda\psi(x)\,\mathrm{tg}^2 x}\sqrt{\mathrm{ctg}^2 x+2\Lambda\psi(x)-4z(1-z-yz)}},\end{aligned} \tag{16}$$

где верхний предел x_1 есть корень уравнения

$$\mathrm{ctg}^2(x_1)+2\Lambda\eta(x_1) = 4z^2\left(1-\frac{1}{z}-y(z)\right). \tag{17}$$

Для конечных значений $\Lambda\sim 1$ аналитическое решение получить не удается. Для малых значений Λ решение можно выразить в квадратурах. Разлагая левую и правую части уравнения в ряд при малых значениях y, Λ, получим

$$\begin{gathered} y\frac{z}{z-1} = \Lambda\phi_1(z) + I_1 - I_0, \\ \phi_1(z) = \frac{4}{\pi}\int\limits_0^{x_0} \frac{x\,dx}{R\sin^2 x}(\eta(x) - \psi(x)\,\mathrm{tg}^2 x), \\ I_1 = \frac{4}{\pi}\int\limits_0^{x_0} \frac{x_1\,dx}{R_1\sin^2 x}, \quad I_0 = \frac{4}{\pi}\int\limits_0^{x_0} \frac{x\,dx}{R\sin^2 x}, \\ R_1 = \sqrt{\mathrm{ctg}^2 x + 2\Lambda\psi(x) - 4z(z-1-yz)} = \sqrt{a(x) - a_1}, \\ a_1 = a(x_1) = \mathrm{ctg}^2 x_1 + 2\Lambda\psi(x_1) = 4z(z-1-yz), \\ R = \sqrt{\mathrm{ctg}^2 x - 4z(z-1)}. \end{gathered} \tag{18}$$

Чтобы избежать фиктивных расходимостей, интеграл, входящий во второе слагаемое в правой части, представим в виде

$$\int\limits_0^{x_1} \frac{x}{\sin^2 x}\frac{1}{R_1}dx = -2\frac{\partial}{\partial a_1}\int\limits_0^{x_1} \frac{x}{\sin^2 x}\sqrt{a(x) - a_1}\,dx = \\ = -2\int\limits_0^{x_1}\left(\frac{d}{dx}\frac{x}{a(x)'\sin^2 x}\right)\sqrt{a(x) - a_1}\,dx. \tag{19}$$

Заметим, что верхний предел интегрирования можно заменить его значением при $y = \Lambda = 0$, т. е. $x_1 = x_0 = \arcsin(1/(2z-1))$. Разлагая подынтегральное выражение при малых y, Λ

$$\begin{gathered} \sqrt{a(x) - a_1} = R + \frac{2z^2 y + \Lambda\psi(x)}{R}, \\ \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{a'\sin^2 x}\right) = -\frac{d}{dx}\left[\frac{x\sin x}{2\cos x}(1 - \Lambda\eta(x))\right] \end{gathered} \tag{20}$$

и проводя интегрирование по частям, получим

$$\begin{gathered} I_1 - I_0 = \Lambda(\phi_2 + \phi_3) + 2z^2\phi_4, \\ \phi_2(z) = \frac{4}{\pi}\int\limits_0^{x_0} \frac{dx}{R}\psi(x)(x + \sin x\cos x), \\ \phi_3(z) = -\frac{4}{\pi}\int\limits_0^{x_0} \frac{x\eta(x)\,dx}{R\sin^2 x}, \\ \phi_4(z) = \frac{4}{\pi}\int\limits_0^{x_0} \frac{dx}{R\cos^2 x}(x + \sin x\cos x). \end{gathered} \tag{21}$$

Окончательное выражение для $y(z)$ в случае малых Λ имеет вид

$$y(z) = \Lambda \frac{z-1}{z} \frac{\phi_1 - \phi_2 - \phi_3}{1 + 2z(z-1)\phi_4}. \tag{22}$$

Функция $y(z)/\Lambda$ представлена на рис. 1. Для случая плоскостного каналирования с потенциалом локального взаимодействия $y(z)$ возникает эффективный потенциал [4]

$$V_{\text{eff}}(\rho) = E \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt\, \delta u(r), \quad r = z r_0 = \sqrt{\rho^2 + t^2 d^2}, \tag{23}$$

где d — расстояние между плоскостями кристалла. Функция $V_{\text{eff}}(\rho)$ для некоторых значений ρ приведена на рис. 2.

Авторы выражают благодарность за поддержку грантом за 2011 г. Белорусскому фонду фундаментальных исследований. Один из нас (Ю. М. Б.) выражает благодарность Объединенному институту ядерных исследований за поддержку грантом молодых ученых за 2011 г.

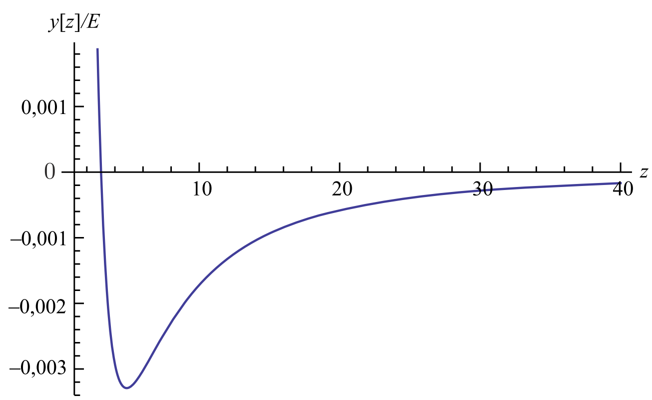

Рис. 1. График функции $y(z)/\Lambda$ (см. (22))

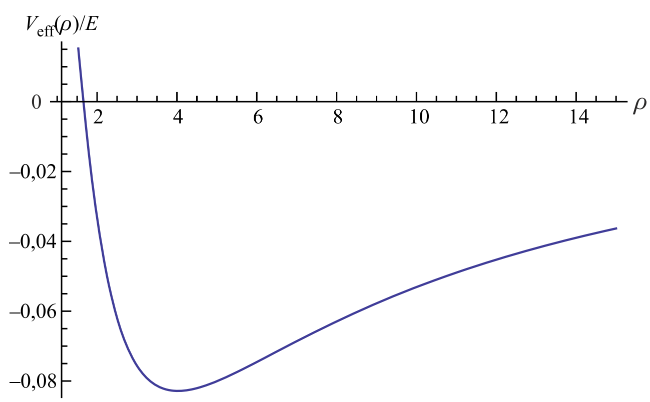

Рис. 2. График функции $V_{\text{eff}}(\rho)$ (см. (23))

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *McKinley W. A., Feshbach H.* // Phys. Rev. 1948. V. 74. P. 1759.
2. *Бажанов В. В. и др.* // ТМФ. 1977. Т. 33, вып. 2. С. 218;
Байер В., Катков В. // Докл. АН СССР. 1976. Т. 227. С. 325;
Ахиезер А. И., Болдышев В. Ф., Шульга Н. Ф. // ТМФ. 1975. Т. 23, вып. 1. С. 11;
Ахиезер А. И., Шульга Н. Ф. Электродинамика высоких энергий в веществе. М.: Наука, 1993;
Арбузов А. Б. и др. // ЭЧАЯ. 2011. Т. 42, вып. 1. С. 101.
3. *Фирсов О. Б.* // Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций: Сб. ст. Т. 3. М.: Изд-во АН СССР, 1958. С. 327;
Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 1. Механика. М.: Физматлит, 2002. С. 71.
4. *Gemmel D. S.* // Rev. Mod. Phys. 1974. V. 46. P. 129.

Получено 17 января 2012 г.