

ОТКЛИК ПУЧКА НА ПЕРЕХОДНЫЙ ПРОЦЕСС В СИНХРОТРОНАХ С ЦИФРОВОЙ СИСТЕМОЙ ПОДАВЛЕНИЯ КОГЕРЕНТНЫХ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ

В. М. Жабичкий

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

В синхротронах с цифровой системой подавления когерентных поперечных колебаний исследуется реакция пучка на импульсное внешнее воздействие. Проанализированы экспериментальные данные по демпфированию когерентных поперечных колебаний сгустка в ЛНС, возбужденных дельта-импульсом. Показано совпадение экспериментальных и расчетных величин для декрементов затухания таких колебаний. Обсуждается метод тонкой настройки системы подавления когерентных поперечных колебаний, основанный на измерении отклика пучка на ограниченное во времени гармоническое воздействие.

The transient beam response to an externally applied impulse force in synchrotrons with a digital transverse feedback system is studied. Experimental data from the LHC on damping of coherent transverse oscillations excited by the discrete-time unit impulse are analysed. Good agreement on the measured and theoretically predicted decrements has been obtained. A method of feedback fine tuning, based on measurements of bunch response to harmonic excitation impulse, is discussed.

PACS: 29.20.Lq; 29.27.Bd

ВВЕДЕНИЕ

Системы подавления (СП) когерентных поперечных колебаний пучка в синхротронах (рис. 1) широко используются для демпфирования остаточных колебаний частиц после инжекции и для подавления когерентных неустойчивостей ускоряемых сгустков. При правильно настроенной СП достигается затухание когерентных поперечных колебаний частиц, инициированных различными внешними силами. В этом случае можно исследовать реакцию пучка на импульсное внешнее воздействие. Наблюдаемый при этом переходный процесс позволяет провести анализ динамических свойств и качества настройки рассматриваемой СП. Внешним воздействием может быть дельта-импульс или ограниченное во времени гармоническое возбуждение. На рис. 2 показан пример затухающих вертикальных колебаний сгустка, инициированных дельта-импульсом с помощью толкателя (К, kicker), в коллайдере ЛНС при энергии протонов 450 ГэВ [1]. Сигнал зафиксирован датчиком (ВРМ, beam position monitor), входящим в состав СП. Демпфирование колебаний осуществляется с помощью дефлектора (ДК, damper kicker). Дефлектор изменяет угол наклона траектории произвольного сгустка пропорционально отклонению

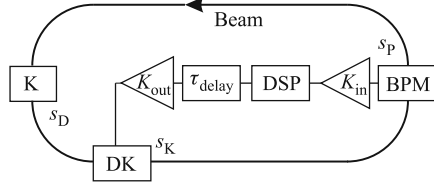


Рис. 1. Схема СП

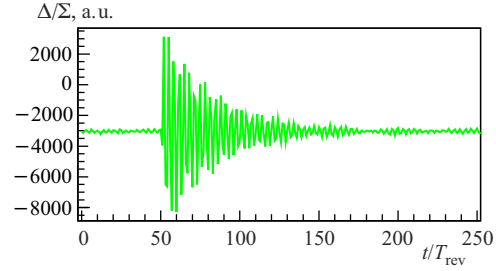


Рис. 2. Сигнал затухающих колебаний с BPM

этого же сгустка в датчике BPM. Необходимые амплитудные и фазовые соотношения ВЧ-сигналов на дефлекторе DK и измерительном датчике BPM обеспечиваются с помощью цифрового фильтра (DSP, digital signal processor), а синхронизация осуществляется с помощью задержки (τ_{delay}).

Время затухания когерентных поперечных (бетатронных) колебаний сгустка, частота которых сопоставима или выше частоты обращения, обычно составляет около сотни оборотов. Частота продольных (синхротронных) колебаний значительно ниже частоты обращения частиц в синхротроне. Поэтому в первом приближении для анализа поперечной динамики сгустков в синхротроне при наличии СП можно использовать традиционное предположение о независимости поперечного и продольного движений частиц. В рамках этого приближения ниже анализируется реакция пучка на импульсное внешнее воздействие. При этом используется оригинальный метод дискретного анализа СП, изложенный в [2, 3].

КОГЕРЕНТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СГУСТКА ПРИ НАЛИЧИИ СП

Пусть состояние центра тяжести сгустка на обороте n в произвольной точке s орбиты (см. рис. 1) описывается матрицей-столбцом $\hat{X}[n, s]$, в которой первый элемент есть $x[n, s]$ — смещение сгустка относительно расчетной орбиты с периметром C , а второй элемент $x'[n, s]$ — угол наклона траектории. Пусть толкатель K, расположенный в точке s_D орбиты, изменяет угол наклона траектории сгустка на величину $\Delta x'_D[n]$. После прохождения сгустком демпфирующего дефлектора DK в точке s_K для состояний сгустка на двух последовательных оборотах, следуя [2, 3], можем записать:

$$\hat{X}[n+1, s] \equiv \hat{X}[n, s+C] = \widehat{M}(s)\hat{X}[n, s] + \Delta x'_D[n, s_K]\widehat{M}_K\hat{E} + \Delta x'_D[n]\widehat{M}_D\hat{E}, \quad (1)$$

где в матрице-столбце \hat{E} имеем $E_1 = 0$ и $E_2 = 1$, а для матриц перехода $\widehat{M}(s_2|s_1)$ из s_1 в s_2 введены обозначения [4]: $\widehat{M}(s) \equiv \widehat{M}(s+C|s)$, $\widehat{M}_K \equiv \widehat{M}(s+C|s_K)$, $\widehat{M}_D \equiv \widehat{M}(s+C|s_D)$.

Величина демпфирующего толчка пропорциональна выходному напряжению V_{out} на усилителе в цепи обратной связи, а V_{out} линейно зависит от входного напряжения V_{in} :

$$\Delta x'_D[n, s_K] = S_K V_{\text{out}}[n] = S_K K_{\text{out}} K_{\text{in}} \sum_{m=0}^{N_F} h[m] V_{\text{in}}[n - \hat{q} - m] u[n - \hat{q} - m], \quad (2)$$

где S_K — передаточная характеристика демпфирующего дефлектора; K_{in} и K_{out} — коэффициенты усиления входного и выходного усилителей (см. рис. 1); $u[n]$ — функция

Хевисайда; $h[m]$ — коэффициенты цифрового фильтра в DSP; N_F — порядок этого фильтра с конечной импульсной характеристикой; \hat{q} — кратность задержки в цепи обратной связи (если τ_{PK} — время пролета густка от ВРМ до ДК, а T_{rev} — период его обращения, то $\tau_{delay} = \tau_{PK} + \hat{q}T_{rev}$, см. [1]).

В свою очередь величина V_{in} линейно зависит от смещения $x[n, s_P]$:

$$V_{in}[n] = (x[n, s_P] + \delta x_P)S_P u[n], \quad (3)$$

где δx_P — смещение электрического центра ВРМ относительно орбиты; S_P — чувствительность измерительного датчика. Для одиночного густка дискретное представление (3) сигнала с ВРМ в виде последовательности отсчетов, формируемых на каждом обороте, в соответствии с теоремой Котельникова [5] однозначно возможно для частот f ниже частоты обращения $f_{rev} = 1/T_{rev}$. Колебания с частотой $f = f_{rev}/2$ и фазами, при которых густок пролетает датчик без смещения, также будут регистрироваться как сигнал, совпадающий с δx_P . В итоге сигнал на выходе цепи обратной связи, пропорциональный $\Delta x'[n, s_K]$, является сверткой входного сигнала, пропорционального $x[n, s_P]$, с дискретной импульсной характеристикой цепи $K_{out}K_{in}h[n]$ и однозначно соответствует когерентным поперечным колебаниям густка с частотой $|\{Q\}|f_{rev}$, не совпадающей с $(mf_{rev}/2)$, где m — целое число, $|\{Q\}|$ — абсолютная величина отклонения от ближайшего целого числа для Q — числа бетатронных колебаний частицы за оборот в синхротроне (для отклонения $\{Q\}$ используется следующее определение: $-0,5 < \{Q\} \leq 0,5$).

Внешним воздействием с амплитудой a_D , возникающим на обороте n_D , может быть дельта-импульс или ограниченное во времени гармоническое возбуждение с частотой $Q_D f_{rev}$, продолжительностью $N_D T_{rev}$ и фазой ϕ_D :

$$\Delta x'_D[n] \sqrt{\hat{\beta}_D \hat{\beta}_P} = \begin{cases} a_D \delta[n - n_D], \\ a_D \cos(2\pi(n - n_D)Q_D + \phi_D)(u[n - n_D] - u[n - n_D - N_D]), \end{cases} \quad (4)$$

где $\hat{\beta}_i \equiv \hat{\beta}(s_i)$ — бета-функция Твисса [4, 6].

Система линейных разностных уравнений (1), (2), (3) и (4) может быть решена с использованием одностороннего \mathcal{Z} -преобразования [5]:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(z, s) = \mathcal{Z}\{y[n, s]\} &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} y[n, s]z^{-n}, \quad y[n, s] = 0 \quad \forall n < 0, \quad s \in [0, C), \\ y[n, s] = \mathcal{Z}^{-1}\{\mathbf{y}(z, s)\} &\equiv \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \mathbf{y}(z, s)z^{n-1}dz = \sum_k \text{Res}[\mathbf{y}(z_k, s)z_k^{n-1}], \end{aligned} \quad (5)$$

т. е. последовательность $y[n, s]$ определена вычетами аналитической функции $\mathbf{y}(z, s)$. Для аналитической функции $\hat{\mathbf{X}}(z, s) = \mathcal{Z}\{\hat{X}[n, s]\}$ нетрудно получить

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{X}}(z, s) = \frac{z\hat{I} - \hat{\mathbf{M}}^{-1} \det \hat{\mathbf{M}}}{\det(z\hat{I} - \hat{\mathbf{M}})} &\left(z\hat{X}[0, s] + \frac{gz^{-\hat{q}}\mathbf{K}(z)\delta x_P}{(1 - z^{-1})(\hat{\beta}_K \hat{\beta}_P)^{1/2}K_0} \hat{M}_K \hat{E} + \right. \\ &\left. + \mathcal{Z}\{\Delta x'_D[n]\} \hat{M}_D \hat{E} \right), \quad (6) \end{aligned}$$

где \widehat{I} — единичная матрица; $\mathbf{K}(z) = \mathbf{K}_{\text{out}}H(z)\mathbf{K}_{\text{in}}$ — передаточная функция цепи обратной связи; $H(z) = \mathcal{Z}\{h[n]\}$, $g = (\widehat{\beta}_K\widehat{\beta}_P)^{1/2}K_0S_KS_P$ — коэффициент обратной связи (gain), причем величина K_0 задана так (см. далее), что $g > 0$ отвечает затухающим колебаниям. Матрица $\widehat{\mathbf{M}}$ имеет вид

$$\widehat{\mathbf{M}} \equiv \widehat{\mathbf{M}}(z, s) = \widehat{\mathbf{M}}(s) + \frac{gz^{-\hat{q}}\mathbf{K}(z)}{(\widehat{\beta}_K\widehat{\beta}_P)^{1/2}K_0} \widehat{\mathbf{M}}_K \widehat{\mathbf{T}} \widehat{\mathbf{M}}(s_P|s),$$

где $\widehat{\mathbf{T}}$ — квадратная 2×2 матрица, в которой $T_{21} = 1$, а все остальные элементы равны нулю. Собственные значения z_k при $a_D = 0$ есть решения алгебраического уравнения

$$\begin{aligned} \det(z_k \widehat{I} - \widehat{\mathbf{M}}(z_k, s)) &\equiv z_k^2 - z_k \operatorname{tr} \widehat{\mathbf{M}}(z_k, s) + \det \widehat{\mathbf{M}}(z_k, s) = \\ &= z_k^2 - \left(2 \cos(2\pi Q) + \frac{gz^{-\hat{q}}\mathbf{K}(z)}{K_0} \sin(2\pi Q - \psi_{PK}) \right) \times \\ &\quad \times z_k + 1 - \frac{gz^{-\hat{q}}\mathbf{K}(z)}{K_0} \sin \psi_{PK} = 0, \quad (7) \end{aligned}$$

где ψ_{PK} — набег фазы бетатронных колебаний между измерительным датчиком ВРМ и демпфирующим дефлектором ДК. При $g = 0$ имеем $z_{\pm} = \exp(\pm j 2\pi Q)$, т.е. хорошо известное решение для бетатронных колебаний. При $g \neq 0$ для описания состояний смещений центра тяжести сгустка $\widehat{X}[n, s] = \widehat{M}(s|s_K)\widehat{X}[n, s_K]$ физический смысл имеют решения (рис. 3), в которых компоненты $\widehat{X}[n, s_K]$ после каждого прохождения демпфирующего толкателя могут быть представлены в виде суммы гармоник с амплитудами $A_k \widehat{\beta}_K^{1/2}$, фазами Φ_k , логарифмическими декрементами затухания за оборот $\alpha_k \equiv -\ln |z_k|$ и набегам фазы за оборот $2\pi\{Q_k\} \equiv \arg z_k$ такими, что, например, для текущего смещения центра тяжести сгустка после ДК согласно (5) можем записать:

$$x[n, s_K] = \sum_k A_k \widehat{\beta}_K^{1/2} \exp(-n\alpha_k) \exp(j(2\pi n\{Q_k\} + \Phi_k)).$$

Это справедливо при выполнении следующих условий:

$$|z_k| < 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{X}[n, s] = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)\widehat{\mathbf{X}}(z, s) = 0 \Rightarrow \mathbf{K}(z = 1) = 0.$$

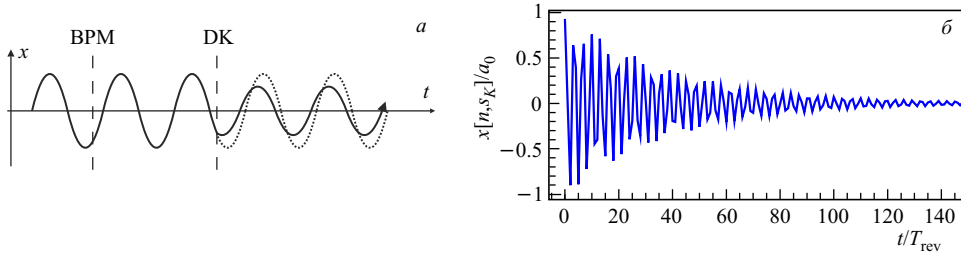
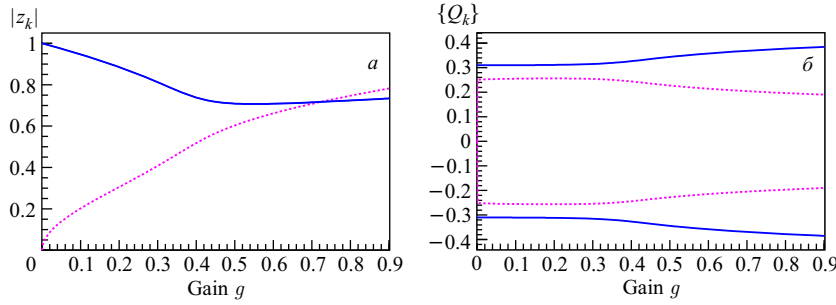


Рис. 3. Траектория $x(t)$ центра тяжести сгустка вдоль орбиты (а) и величина смещения $x[n, s_K]$ в месте расположения ДК на разных оборотах $n = t/T_{\text{rev}}$ (б)

Рис. 4. Графики зависимостей $|z_k|$ (а) и $\{Q_k\}$ (б) от g

Таким образом, все полюса z_k функции $\widehat{\mathbf{X}}(z, s)$ должны лежать внутри окружности единичного радиуса, а влияние смещения δx_{P} в $\widehat{\mathbf{X}}(z, s)$ должно быть исключено. Последнее достигается благодаря применению в цепи обратной связи узкополосного заграждающего фильтра (notch filter), передаточная функция которого $H_{\text{NF}}(z) = (1 - z^{-1})$.

Текущее состояние ступка $\widehat{X}[n, s_{\text{K}}]$ после ДК определено согласно (5) и (7) собственными значениями z_k , число которых зависит от порядка цифрового фильтра N_{F} и кратности задержки \hat{q} . Например, при $\hat{q} = 0$ и использовании в СП цифрового фильтра второго порядка с $H(z) = (1 - z^{-1})(1 + 0,576z^{-1})$ имеем четыре решения. Графики возникающих в этом случае зависимостей $x[n, s_{\text{K}}]$ от n (см. рис. 3, б), $|z_k|$ и $\{Q_k\}$ от g (рис. 4) соответствуют $Q = 59,31$, $\psi_{\text{PK}} = 2\pi \cdot 59,25$, $K_0 = 1,576$. Величины $x[n, s_{\text{K}}]$ вычислены по формулам (1), (2) и (3) при $x[0, s_{\text{P}}] = a_0$, $x'[0, s_{\text{P}}] = 0$, $\delta x_{\text{P}} = 0$, $g = 0,05$. Для матриц $\widehat{M}(s_2|s_1)$ в уравнении (1) использовались следующие величины функций Твисса: $\hat{\beta}_{\text{P}} = \hat{\beta}_{\text{K}} = 71,538$ м, $\hat{\alpha}_{\text{P}} = \hat{\alpha}_{\text{K}} = 0$. Сплошные линии соответствуют собственным значениям $z_{1,2}$ с частотами $|\{Q_{1,2}\}|f_{\text{rev}}$, незначительно отличающимися от $|\{Q\}|f_{\text{rev}}$ при $g < 0,3$. Пунктирные линии для $z_{3,4}$ соответствуют быстро затухающим модам колебаний при $g < 0,3$. Излом траектории центра тяжести ступка после прохождения демпфирующего толкателя при малых g в основном определяется модами колебаний с наименьшим декрементом затухания и частотами, практически совпадающими с бетатронной. К этим двум основным модам колебаний добавляются быстро затухающие компоненты с частотами, отличными от бетатронной, причем число этих мод колебаний зависит от порядка цифрового фильтра N_{F} и кратности задержки \hat{q} .

Следует подчеркнуть, что выше предполагалась независимость передаточных функций \mathbf{K}_{in} и \mathbf{K}_{out} от частоты. Однако реальные входные и выходные усилители имеют ограниченную полосу пропускания. Вместе с тем в современных СП амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики этих усилителей слабо зависят от частоты в рабочей полосе частот от $|\{Q\}|f_{\text{rev}}$ до $K_{\text{b}}f_{\text{rev}}$, где K_{b} — число ступков в синхротроне. Поэтому в каждой ограниченной полосе частот от $m f_{\text{rev}}$ до $(m + 1)f_{\text{rev}}$, где m — целое число, влияние параметров входных и выходных усилителей можно учитывать в зависимостях $H(z = \exp(j 2\pi(Q + m)))$ от Q и m , вводя добавки, измеренные в реальной СП. Так, в системе подавления когерентных поперечных колебаний пучка в ЛНС [1, 7] отклонения измеренных фаз $\arg \mathbf{K}$ от расчетных величин $\arg H$ в цифровой части СП не превосходят 5° для всех рабочих частот вблизи частот бетатронных колебаний и их обертонов. Таким образом, в реальной ситуации каждая мода колебаний, отвечающая z_k , может иметь отклонения с изменением m . Вместе с тем ясно, что наибольшее влияние на динамику

сгустка будут оказывать моды колебаний с минимальным декрементом затухания, которые при правильно настроенной СП соответствуют частотам бетатронных колебаний и ее обертонам (см. рис. 4).

В итоге при $g \ll 1$ для затухающих когерентных колебаний, незначительно отличающихся по частоте от частоты бетатронных колебаний и ее обертонов, имеем из (7):

$$\begin{aligned} \alpha_m &= \frac{g |\mathbf{K}(\omega_m)|}{2K_0} \sin \Psi_{\text{PK}}, \quad \{Q_m\} = \{Q\} - \frac{g |\mathbf{K}(\omega_m)|}{4\pi K_0} \cos \Psi_{\text{PK}}, \\ \Psi_{\text{PK}} &= \psi_{\text{PK}} + 2\pi \hat{q} Q - \arg \mathbf{K}(\omega_m), \\ \mathbf{K}(\omega_m) &= \mathbf{K}_{\text{in}}(\omega_m) \mathbf{K}_{\text{out}}(\omega_m) H(z = \exp(j2\pi Q)), \\ \omega_m &= \frac{2\pi(Q + m)}{T_{\text{rev}}}, \quad |K_0| = |\mathbf{K}(m = 0)|, \quad K_0 \sin \Psi_{\text{PK}}(m = 0) > 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где m — положительное или отрицательное целое число. Оптимальная настройка СП соответствует балансу фаз Ψ_{PK} , когда $|\sin \Psi_{\text{PK}}| = 1$, так что $\{Q_m\} = \{Q\}$.

При нарушении баланса фаз уменьшается скорость убывания амплитуды, а циклическая частота затухающих колебаний $\omega = 2\pi |\{Q_m\}| f_{\text{rev}}$ может быть как больше, так и меньше циклической частоты бетатронных колебаний $\omega_0 = 2\pi |\{Q\}| f_{\text{rev}}$, поскольку $\omega = \omega_0 - \alpha_m / (T_{\text{rev}} \text{tg} \Psi_{\text{PK}})$ и сдвиг частот пропорционален $g \cos \Psi_{\text{PK}}$. В то же время в классической механике малые колебания при наличии диссипативных процессов всегда происходят с уменьшением частоты: $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$, где λ — коэффициент затухания [8].

Таким образом, при наладке СП необходимо настроить режим, отвечающий затуханию когерентных поперечных колебаний центра тяжести сгустка, и осуществить тонкую настройку, соответствующую малому отрицательному сдвигу частот $(\{Q_m\} - \{Q\}) f_{\text{rev}}$.

ОТКЛИК ПУЧКА НА ДЕЛЬТА-ИМПУЛЬС

Соответствие расчетных и измеренных декрементов затухания поперечных колебаний можно установить, выявляя экспоненциальный закон затухания сигнала с ВРМ для остаточных колебаний после инъекции. Однако из выражения для $\hat{\mathbf{X}}(z, s)$ следует, что в течение нескольких оборотов после инъекции сигнал с ВРМ зависит не только от начальных условий $\hat{X}[0, s]$, но и от смещения δx_{P} измерительного датчика относительно орбиты. Вследствие этого форма сигнала зависит от процессов в цифровом фильтре при переходе от нулевых начальных условий к реальным, отвечающим δx_{P} .

Внешнее воздействие в виде дельта-импульса приводит к появлению в выражении для $\hat{\mathbf{X}}(z, s)$ слагаемого, пропорционального $\mathcal{Z}\{\Delta x'_{\text{D}}[n]\} = a_{\text{D}} z^{-n_{\text{D}}} / (\hat{\beta}_{\text{P}} \hat{\beta}_{\text{K}})^{1/2}$. Это слагаемое отвечает затухающим колебаниям, возникающим в момент времени $n_{\text{D}} T_{\text{rev}}$, с теми же декрементами и частотами, что и для остаточных колебаний сгустка после инъекции, однако форма сигнала с ВРМ не зависит от δx_{P} . Пример расчетной зависимости сигнала с ВРМ от $n = t/T_{\text{rev}}$ показан на рис. 5, а. Здесь первый ВЧ-импульс соответствует остаточным колебаниям после инъекции, а второй — затухающим колебаниям после толчка, инициированного дельта-импульсом (параметры расчета такие же, как на рис. 3, однако $x[0, s_{\text{P}}] = -a_0$, $\delta x_{\text{P}} = a_0$, $n_{\text{D}} = 300$, $a_{\text{D}} = a_0$, $g = 0,05$).

Отклик пучка на два толчка показан на рис. 5, б. Затухание колебаний, обусловленных первым толчком в момент времени $100 T_{\text{rev}}$, соответствует коэффициенту обратной связи

$g = 0,08$. Из (7) имеем $\alpha_{\min} = -\ln |z_k^{(\max)}| = T_{\text{rev}}/\tau = 0,0429$, что отвечает более высокому темпу подавления когерентных колебаний по сравнению с $g/2$ — линейным приближением (8). Для второго толчка при $t = 400 T_{\text{rev}}$, где $g = 0,02$, имеем $\alpha_{\min} = 0,01$ из (7), что согласуется с (8). Огибающие ВЧ-сигналов (штриховые линии) вычислены согласно величинам $\alpha_{\min}(g)$ и хорошо их аппроксимируют.

Таким образом, осуществляя «подгонку» (фитирование) расчетных кривых под экспериментальные данные для колебаний, инициированных дельта-импульсом, можно оценить величину декремента затухания колебаний. Эта процедура использовалась на коллайдере LHC для определения декрементов затухания колебаний протонного сгустка при энергии инжекции 450 ГэВ [1] и после ускорения при энергии 3,5 ТэВ [7]. Например, на рис. 6, *a* показано, что экспериментальные данные для декрементов затухания когерентных вертикальных колебаний протонного сгустка при энергии 3,5 ТэВ хорошо согласуются с расчетными величинами декрементов T_{rev}/τ для коэффициентов обратной связи $0,004 < g < 0,08$ в каждом из четырех каналов от двух BPM до двух секций DK в одной плоскости колебаний (всего в СП на LHC используются 16 каналов для DSP: в горизонтальной и вертикальной плоскостях колебаний на двух кольцах коллайдера) [1]. Приведенные на рис. 6, *б* четыре расчетные зависимости, вычисленные согласно (7) для реальных параметров СП в LHC, где используется цифровой фильтр Гильберта, совпадают при $g < 0,09$ (эти данные приведены на рис. 6, *a*), но различаются при $g > 0,1$. Поскольку сила демпфирующего воздействия в DK ограничена мощностью оконечных усилителей в СП, то продвинуться в область $g > 0,08$ для более качественной настройки СП не представляется возможным. Следует также отметить, что фитирование экспериментальных данных для сигнала с измерительного датчика при высоких темпах затухания

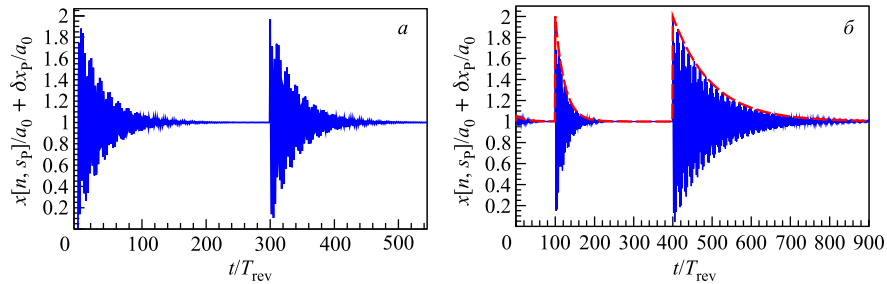


Рис. 5. Сигнал с BPM после инжекции (*a*) и отклик пучка на два толчка (*б*)

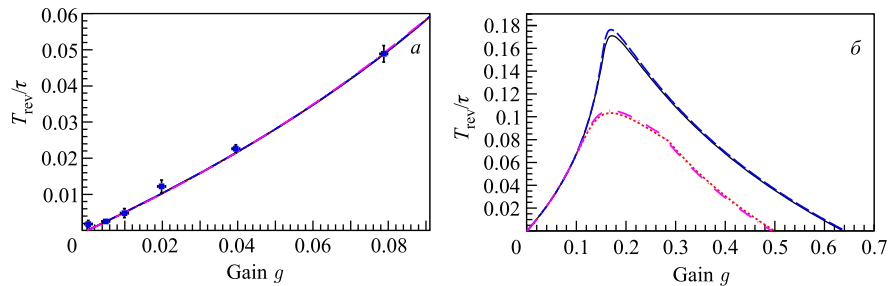


Рис. 6. Декременты затухания T_{rev}/τ в зависимости от g

требует более аккуратного учета вклада всех гармоник $|\{Q_m\}|f_{\text{rev}}$ в форму сигнала. Это сильно ограничивает область применения метода возбуждения когерентных колебаний дельта-импульсом для настройки СП, который, однако, является наиболее удобным методом установления областей параметров СП, где обеспечивается затухание когерентных поперечных колебаний.

ОТКЛИК ПУЧКА НА ГАРМОНИЧЕСКОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ

На рис. 7, *а* приведены зависимости $\{Q_k\}$ от g для мод колебаний, декременты для которых указаны на рис. 6. Положение рабочей точки отвечает $Q = 590,32$. Отличия от этого значения для приведенных мод колебаний заметны уже при $g = 0,05$, в то время как различия в величинах декрементов этих колебаний проявляются только при $g > 0,1$. Поскольку СП обеспечивает демпфирование когерентных поперечных колебаний, то можно испытать реакцию пучка на ограниченное во времени гармоническое воздействие. На рис. 7, *б* приведены зависимости смещений сгустка $x[n, s_P]$ от n . Расчет проведен по формулам (1), (2), (3) и (4) для гармонического возбуждения с $Q_D = 0,316$, которое включается в момент времени $t = n_D T_{\text{rev}} = 100 T_{\text{rev}}$ и выключается через 300 оборотов ($a_D = a_0$, $\phi_D = 0$, $g = 0,08$, набег фазы бетатронных колебаний от ВРМ до толкателя К выбран равным $\psi_{PD} = 2\pi \cdot 58,3$). Видно, что через 100 оборотов после включения внешнего возбуждения устанавливается режим с амплитудой колебаний, примерно в 12 раз превосходящей амплитуду возбуждения $a_D = a_0$ (оггибающая ВЧ-сигнала — штриховая линия на рис. 7, *б*). Изменяя Q_D , получаем набор зависимостей амплитуд колебаний $a(n, Q_D)$ от n и Q_D при фиксированных величинах коэффициента обратной связи g , коэффициентов $h[n]$ цифрового фильтра и прочих параметров СП. Хотя амплитуда вынужденного колебания и возрастает при приближении Q_D к $\{Q\}$, но она не обращается в бесконечность, как это происходит при резонансе в отсутствие СП. Функцию $a(n, Q_D)$ двух переменных n и Q_D можно представить на плоскости в виде карты изоамплитуд — семейства линий, для каждой из которых амплитуда в любой точке имеет постоянное значение. Например, для изоамплитуд можно выбрать

$$a(n, Q_D) = a_i, \quad -0,01 < \{Q_D\} - \{Q\} < 0,01, \quad a_i = a_{\text{max}} \sqrt{i/10}, \quad i \in [0, 10), \quad (9)$$

где a_{max} — максимальная амплитуда установившихся колебаний в указанном диапазоне изменения $Q_D = \{Q_D\} + m$, которая отвечает $Q_D^{(\text{max})}$.

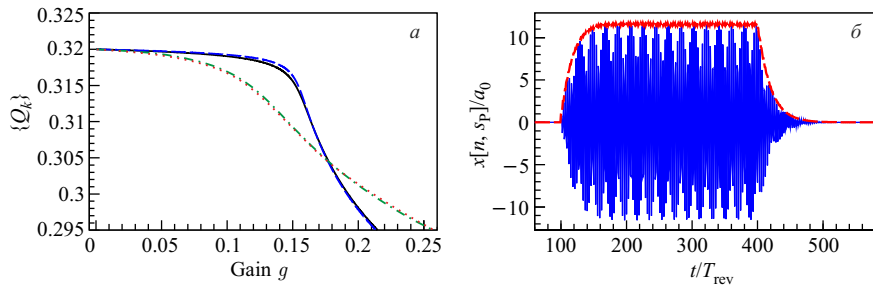


Рис. 7. Зависимости $\{Q_k\}$ от g (*а*) и $x[n, s_P]$ от $n = t/T_{\text{rev}}$ (*б*)

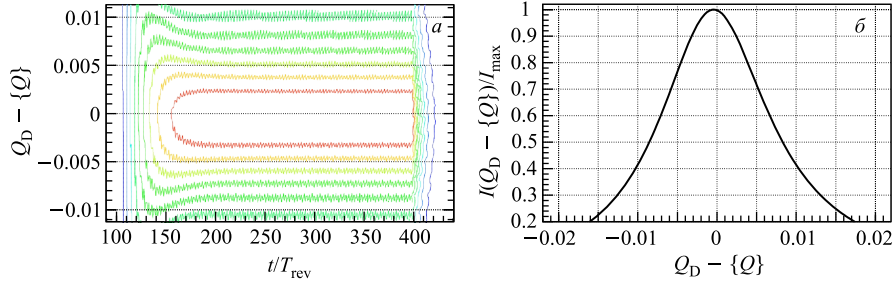


Рис. 8. Карта изоамплитуд (а) и резонансная кривая (б)

Когда ступок совершает вынужденные колебания, то в области установившихся колебаний его поперечная энергия $I(Q_D)$ в среднем остается неизменной: на каждом обороте ступок получает дополнительный поперечный импульс после пролета толкателя, который компенсируется после пролета демфирующего дефлектора. Величина $I(Q_D)$ пропорциональна квадрату амплитуды установившихся колебаний. Поэтому для резонансной кривой имеем согласно (6) и (5):

$$\frac{I(Q_D)}{I_{\max}} = \frac{1}{I_{\max}} \left| \det \left(z_D \hat{I} - \widehat{\mathbf{M}}(z_D) \right) \right|^{-2}, \quad (10)$$

$$z_D = \exp(z_D 2\pi \{Q_D\}), \quad I_{\max} = I(Q_D^{(\max)}).$$

Пример графиков изоамплитуд (9) и резонансной кривой (10) приведен на рис. 8 для тех же параметров СП, что и на рис. 7, а (штрихпунктирная кривая, $g = 0,08$). Видно, что на рис. 8 максимальный отклик пучка на гармоническое воздействие соответствует отрицательному смещению относительно бетатронной частоты: $Q_D^{(\max)} \approx \{Q\} - 5 \cdot 10^{-4}$. Совпадают также величины $Q_D - \{Q\}$ на рис. 8, а и б, которые отвечают одинаковым уровням амплитуд установившихся колебаний.

В линейном приближении $g \ll 1$ в соответствии с (8) нетрудно получить для (10):

$$\frac{I(Q_D)}{I_{\max}} = \frac{\alpha_m^2}{4\pi^2(\{Q_D\} - \{Q_m\})^2 + \alpha_m^2}.$$

Эта функция совпадает с резонансной кривой [8], которая обычно используется для анализа вынужденных колебаний при наличии трения, и имеет максимум при

$$\{Q_D^{(\max)}\} = \{Q_m\} = \{Q\} - \frac{g |\mathbf{K}(\omega_m)|}{4\pi K_0} \cos \Psi_{\text{PK}}.$$

Таким образом, максимум резонансной кривой смещается относительно бетатронной частоты при нарушении баланса фаз. Одинаковые уровни амплитуд установившихся колебаний соответствуют смещению резонансной кривой. Полуширина резонансной кривой на ее полувысоте равна примерно $\alpha_m/2\pi$. Графики зависимостей, представленных на рис. 8, подтверждают эти выводы. Поскольку смещение резонансной кривой пропорционально $g \cos \Psi_{\text{PK}}$, то данный эффект может быть использован в системах подавления для тонкой настройки баланса фаз Ψ_{PK} .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Оригинальный метод дискретного анализа цифровых систем подавления когерентных поперечных колебаний пучка в синхротронах [2, 3] использован при исследовании реакции пучка на импульсное внешнее воздействие. Проанализированы экспериментальные данные по демпфированию когерентных поперечных колебаний сгустка в ЛНС, возбужденных дельта-импульсом. Показано совпадение экспериментальных и расчетных величин для декрементов затухания таких колебаний.

Получены аналитические выражения для отклика пучка на ограниченное во времени гармоническое воздействие с учетом реальных характеристик цифровой цепи обратной связи. Выявлены количественные и качественные закономерности для резонансной зависимости амплитуд установившихся колебаний сгустка от частоты гармонического воздействия, которые можно использовать для тонкой настройки системы подавления когерентных поперечных колебаний пучка в синхротронах.

Благодарности. Автор выражает признательность W. Höfle, R. Louwerson и D. Valuch (ЦЕРН) за полезные обсуждения и предоставленные экспериментальные данные.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Zhabitsky V.M. et al.* Beam Tests of the LHC Transverse Feedback System // XXII Russian Particle Accelerators Conf. «RuPAC-2010», Protvino, Russia, Sept. 27–Oct. 1, 2010. Protvino: ИИЯИ, 2010. P. 275–279.
2. *Жабицкий В. М.* Применение Z -преобразования для решения задачи о подавлении свободных колебаний пучка в ускорителе. Сообщ. ОИЯИ Р9-91-91. Дубна, 1991.
3. *Жабицкий В. М.* Устойчивость ионного пучка в синхротронах с цифровыми системами подавления когерентных поперечных колебаний // Письма в ЭЧАЯ. 2010. Т. 7, вып. 7(163). С. 742–747.
4. *Courant E.D., Snyder H.S.* Theory of the Alternating-Gradient Synchrotron // Ann. Phys. 2000. V. 281. P. 360–480.
5. *Гоноровский И. С.* Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Сов. радио, 1977.
6. *Брук Г.* Циклические ускорители заряженных частиц. М.: Атомиздат, 1970.
7. *Wienands U., Höfle W., Valuch D.* Gain Measurements of the LHC Transverse Feedback System at 3.5 TeV Beam Energy. CERN-ATS-Note-2011-131. Geneva, 2011. P. 1–7.
8. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика. М.: Наука, 1973.

Получено 11 марта 2012 г.