Письма в ЭЧАЯ. 2013. Т. 10, № 2(179). С. 144–148

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА. ТЕОРИЯ

КЛАССИЧЕСКИЙ ПРЕДЕЛ УРАВНЕНИЙ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ В ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФОЛДИ–ВАУТХОЙЗЕНА

А. Я. Силенко[1]

Научно-исследовательское учреждение
Институт ядерных проблем Белорусского государственного университета, Минск

Показано, что при выполнении условий приближения Венцеля–Крамерса–Бриллюэна использование представления Фолди–Ваутхойзена позволяет свести нахождение классического предела уравнений релятивистской квантовой механики к замене операторов в гамильтониане и квантово-механических уравнениях движения соответствующими классическими величинами.

It is shown that the use of the Foldy–Wouthuysen representation allows one to reduce finding the classical limit of equations of the relativistic quantum mechanics to replacing operators in the Hamiltonian and quantum mechanical equations of motion with corresponding classical quantities when the conditions of the Wentzel–Kramers–Brillouin approximation are satisfied.

PACS: 03.65.Pm; 03.65.Sq; 11.10.Ef

Представление Фолди–Ваутхойзена (ФВ) [1] обладает уникальными свойствами, благодаря которым оно занимает особое место в квантовой механике. Даже для релятивистских частиц во внешнем поле операторы в данном представлении полностью аналогичны соответствующим операторам нерелятивистской квантовой механики. В частности, операторы положения [2] и импульса равны $\mathbf{r}$ и $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$, а оператор поляризации для частиц со спином 1/2 выражается дираковской матрицей $\mathbf{\Pi}$. В других представлениях эти операторы определяются значительно более громоздкими формулами (см. [1, 3]). Простой и точно определенный вид операторов, соответствующих классическим наблюдаемым, является важнейшим достоинством представления ФВ. Отметим, что в данном представлении гамильтониан и все операторы диагональны по двум спинорам (блок-диагональны). Использование представления ФВ устраняет возможность появления неоднозначностей при решении задачи нахождения классического предела релятивистской квантовой механики [1, 4].

В нерелятивистском случае переход к квазиклассическому приближению сравнительно просто производится при помощи метода Венцеля–Крамерса–Бриллюэна (ВКБ).

[1] E-mail: silenko@inp.minsk.by

Его можно применять при выполнении условия малости длины волны де Бройля по сравнению с характерным размером области неоднородности внешнего поля l:

$$\lambda \ll l. \tag{1}$$

Для одномерной задачи (движение только вдоль оси x) из (1) следует выполнение неравенства

$$\left|\frac{d\lambda}{dx}\right| \ll 1. \tag{2}$$

Метод ВКБ удобно использовать и для анализа релятивистских квантово-механических уравнений. Однако в этом случае требуется его модификация. Как и в нерелятивистской квантовой механике, классический предел достигается в нулевом по $\hbar$ порядке ВКБ-приближения. При использовании представления ФВ переход к квазиклассическому приближению производится таким же путем, как в нерелятивистской квантовой механике. В релятивистском случае для использования метода ВКБ также необходимо выполнение условий (1), (2).

Для упрощения анализа рассмотрим случай одномерного движения. Если не учитывать спиновые эффекты, то уравнение для релятивистского гамильтониана в представлении ФВ можно записать в виде

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \mathcal{H}\Psi, \quad \mathcal{H} = \sqrt{m^2c^4 + c^2\mathbf{p}^2 + \mathcal{V}(x,\mathbf{p})} + U(x). \tag{3}$$

Такой вид имеет, в частности, уравнение для скалярных частиц в электромагнитном поле (см. [5]). Поскольку операторы p_y, p_z коммутируют с гамильтонианом и имеют определенные значения, то оператор $\mathcal{H}$ можно представить в виде

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \mathcal{H}\Psi, \quad \mathcal{H} = \sqrt{m^2c^4 + c^2p_x^2 + V(x,p_x)} + U(x). \tag{4}$$

Для стационарных состояний можно использовать обычную форму записи волновой функции (см. [6,7]):

$$\Psi = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}Et\right)\Phi(x), \quad \Phi(x) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\mathfrak{S}\right), \tag{5}$$

где E — полная энергия частицы. Функцию $\mathfrak{S}$ можно формально разложить в ряд по степеням постоянной Планка:

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_0 + \frac{\hbar}{i}\mathfrak{S}_1 + \left(\frac{\hbar}{i}\right)^2\mathfrak{S}_2 + \ldots \tag{6}$$

При подстановке волновой функции в исходное уравнение мы ограничиваемся членами нулевого приближения. В этом приближении можно не учитывать коммутаторы операторов x и p_x, пропорциональные $\hbar$. Поскольку

$$\mathbf{p}^2\Psi = (\mathfrak{S}'^2 - i\hbar\mathfrak{S}'')\Psi, \tag{7}$$

то, пренебрегая величинами первого и более высоких порядков по $\hbar$, находим

$$\sqrt{m^2c^4 + c^2p_x^2 + V(x,p_x)}\Psi = \sqrt{m^2c^4 + c^2\mathfrak{S}'^2 + V(x,\mathfrak{S}')}\Psi.$$

Таким образом, слагаемые нулевого порядка по постоянной Планка удовлетворяют уравнению

$$E = \sqrt{m^2c^4 + c^2\mathfrak{S}'^2 + V(x, \mathfrak{S}')} + U(x). \tag{8}$$

Данное уравнение определяет неявную функцию $\mathfrak{S}'$ от x. Очевидно, что величина $\mathfrak{S}'$ является классическим обобщенным импульсом частицы $\mathcal{P}(x)$. Следовательно,

$$\mathfrak{S} = \int \mathcal{P}(x)\, dx. \tag{9}$$

Таким образом, $\mathfrak{S}$ представляет собой не зависящую от времени часть действия, а полное действие частицы в соответствии с исходным уравнением (4) равно

$$\mathcal{S} = -Et + \mathfrak{S} = -Et + \int \mathcal{P}(x)\, dx. \tag{10}$$

Формула (10) полностью соответствует классической теории и совпадает с аналогичной формулой, выводимой для ВКБ-приближения в нерелятивистской квантовой механике [6, 7]. Таким образом, при использовании представления ФВ в релятивистской квантовой механике переход к классическому пределу соответствует нулевому по $\hbar$ порядку ВКБ-приближения. Как следует из уравнений (4), (8)–(10), его можно производить путем замены операторов в гамильтониане соответствующими классическими величинами.

Нетрудно показать, что такую замену можно делать и в уравнениях движения. Любой квантово-механический гамильтониан является операторной функцией обобщенных импульсов и соответствующих координат p_i, x^i. При пренебрежении слагаемыми, пропорциональными $\hbar$, мы можем не учитывать некоммутацию операторов динамических переменных и записать полную производную по времени от гамильтониана в виде

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t} + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt}.$$

Поскольку

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t},$$

то в нулевом приближении по $\hbar$ операторные уравнения движения можно представить в виде, аналогичном классическим уравнениям Гамильтона:

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x^i}. \tag{11}$$

Возможность замены операторов в гамильтониане соответствующими классическими величинами в соответствии с (11) приводит к возможности такой же замены в операторных уравнениях движения.

Существуют некоторые особенности применения метода ВКБ в теории гравитации [8]. Однако при использовании гамильтонова подхода (см. [9–12]) задача перехода к классическому пределу упрощается и сводится к рассмотренной выше. Общий вид классического гамильтониана частицы, не обладающей собственным моментом количества движения (спином), в произвольных электромагнитном и гравитационном полях определяется уравнением (2.5) в работе [13]. В [12] было показано, что, в соответствии с полученными в [14] результатами, для описания частицы со спином его нужно дополнить слагаемым $\mathbf{s}\cdot\boldsymbol{\Omega}$, пропорциональным угловой скорости вращения спина $\boldsymbol{\Omega}$.

Такое же слагаемое добавляется к бесспиновой части гамильтониана и для описания спиновых эффектов при электромагнитном и слабом взаимодействиях. Поскольку гамильтониан задан в представлении ФВ, то можно использовать только верхний спинор. Оператор $\mathbf{s}$ в этом случае выражается спиновыми матрицами для частиц с соответствующим спином. Для частиц со спином $s > 1/2$ в оператор $\mathcal{H}$ могут входить и произведения спиновых матриц. После описанного выше перехода к классическому пределу гамильтониан частиц со спином содержит обобщенные импульсы, соответствующие координаты и спиновые матрицы (включая их произведения). В этом случае для нахождения динамики спина весьма удобен метод, базирующийся на уравнении для матричного гамильтониана и часто называемый методом спиновых амплитуд (см. [15] и цитированную там литературу). Переход к классическому пределу сводится к усреднению спиновых матриц и их произведений по амплитудным спиновым функциям. Такое усреднение приводит к введению вектора поляризации $\mathbf{P}$ и тензора поляризации P_{ij}, определяемых уравнениями (см. [15, 16])

$$P_i = \frac{\langle s_i \rangle}{S}, \quad P_{ij} = \frac{3\langle s_i s_j + s_j s_i \rangle - 2S(S+1)\delta_{ij}}{2S(2S-1)}, \quad i,j = x,y,z. \tag{12}$$

Здесь s_i — спиновые матрицы; S — спиновое квантовое число.

Необходимо учитывать, что в релятивистской квантовой механике, как и в нерелятивистской (см. [7]), существуют определенные ограничения на возможность использования метода ВКБ. Малость отбрасываемого члена в (7), содержащего старшую производную, не всегда гарантирует малость его вклада в решение для $\mathfrak{S}(x)$. Такая ситуация может возникнуть, когда поле простирается на расстояния, большие по сравнению с характерной длиной l, на которой оно испытывает заметное изменение. Квазиклассическое приближение оказывается тогда неприменимым для отслеживания поведения волновой функции на больших расстояниях [7].

Таким образом, при выполнении условий ВКБ-приближения использование представления ФВ в большинстве случаев позволяет свести нахождение классического предела уравнений релятивистской квантовой механики к замене операторов в гамильтониане и квантово-механических уравнениях движения соответствующими классическими величинами.

Работа поддержана грантом Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований № Ф12Д-002.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Foldy L. L., Wouthuysen S. A.* On the Dirac Theory of Spin 1/2 Particles and Its Non-Relativistic Limit // Phys. Rev. 1950. V. 78, No. 1. P. 29–36.
2. *Newton T. D., Wigner E. P.* Localized States for Elementary Systems // Rev. Mod. Phys. 1949. V. 21, Iss. 3. P. 400–406.

3. *Silenko A. J.* Foldy–Wouthuysen Transformation for Relativistic Particles in External Fields // J. Math. Phys. 2003. V. 44, No. 7. P. 2952–2966.
4. *Costella J. P., McKellar B. H. J.* The Foldy–Wouthuysen Transformation // Am. J. Phys. 1995. V. 63, Iss. 12. P. 1119–1121.
5. *Силенко А. Я.* Оператор Гамильтона и квазиклассический предел для скалярных частиц в электромагнитном поле // ТМФ. 2008. Т. 156, № 3. С. 398–411.
6. *Давыдов А. С.* Квантовая механика. М.: Физматгиз, 1963. 748 с.;
Левич В. Г., Вдовин Ю. А., Мямлин В. А. Курс теоретической физики. Т. 2: Квантовая механика. Квантовая статистика и физическая кинетика. 2-е изд., перераб. М.: Наука, 1971. 936 с.
7. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Квантовая механика (нерелятивистская теория). 4-е изд. М.: Наука, 1989. 768 с.
8. *Audretsch J.* Trajectories and Spin Motion of Massive Spin-1/2 Particles in Gravitational Fields // J. Phys. A: Math. and Gen. 1981. V. 14, No. 2. P. 411–422.
9. *Silenko A. J., Teryaev O. V.* Semiclassical Limit for Dirac Particles Interacting with a Gravitational Field // Phys. Rev. D. 2005. V. 71, Iss. 6. P. 064016.
10. *Silenko A. J., Teryaev O. V.* Equivalence Principle and Experimental Tests of Gravitational Spin Effects // Phys. Rev. D. 2007. V. 76, Iss. 6. P. 061101.
11. *Obukhov Yu. N., Silenko A. J., Teryaev O. V.* Spin Dynamics in Gravitational Fields of Rotating Bodies and the Equivalence Principle // Phys. Rev. D. 2009. V. 80, Iss. 6. P. 064044.
12. *Obukhov Yu. N., Silenko A. J., Teryaev O. V.* Dirac Fermions in Strong Gravitational Fields // Phys. Rev. D. 2011. V. 84, Iss. 2. P. 024025.
13. *Cognola G., Vanzo L., Zerbini S.* Relativistic Wave Mechanics of Spinless Particles in a Curved Space-Time // Gen. Rel. Grav. 1986. V. 18, No. 9. P. 971–982.
14. *Померанский А. А., Хриплович И. Б.* Уравнения движения релятивистской частицы с внутренним моментом во внешних полях // ЖЭТФ. 1998. Т. 113, вып. 5. С. 1537–1558.
15. *Silenko A. J.* Tensor Electric Polarizability of the Deuteron in Storage-Ring Experiments // Phys. Rev. C. 2007. V. 75, Iss. 1. P. 014003.
16. *Mane S. R., Shatunov Yu. M., Yokoya K.* Spin-Polarized Charged Particle Beams in High-Energy Accelerators // Rep. Prog. Phys. 2005. V. 68, Iss. 3. P. 1997–2265.

Получено 15 июня 2012 г.