

## ЭФФЕКТЫ БОЛЬШИХ $Z$ ПРИ УЧЕТЕ РАДИАЦИОННОЙ КОМПОНЕНТЫ МАГНИТНОГО МОМЕНТА ЭЛЕКТРОНА В ВОДОРОДОПОДОБНЫХ АТОМАХ

*К. А. Свешников*<sup>1</sup>, *Д. И. Хомовский*<sup>2</sup>

Физический факультет и Институт теоретических проблем микромира Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Москва

Исследовано поведение нижних уровней дискретного спектра водородоподобного атома при непertурбативном учете взаимодействия радиационной компоненты магнитного момента свободного электрона  $\Delta g_{\text{free}}$  с кулоновским полем ядра с зарядом  $Z$ , включая область  $Z > 137$ . Показано, что при  $Z\alpha \ll 1$  сдвиг энергетических уровней вполне эффективно определяется через матричные элементы от соответствующего оператора Дирака–Паули по релятивистским кулоновским волновым функциям. В то же время для сверхтяжелых ядер с  $Z \sim 170$  непertурбативный сдвиг уровней, обусловленный  $\Delta g_{\text{free}}$ , у порога нижнего континуума ведет себя  $\sim Z^5$ , превышая все известные оценки радиационных поправок от поляризации вакуума и собственной энергии электрона, и оказывается как минимум одного порядка с эффектами экранировки заряда ядра заполненными оболочками.

The behaviour of electronic levels in hydrogen-like atoms with account of nonperturbative interaction of radiative component of free electron magnetic moment  $\Delta g_{\text{free}}$  with the Coulomb field of atomic nuclei of charge  $Z$  is studied, including the region  $Z > 137$ . It is shown that for  $Z\alpha \ll 1$  the shift of energy levels is determined quite effectively from matrix elements of corresponding Dirac–Pauli operator with relativistic Coulomb wavefunctions. At the same time, for superheavy nuclei with  $Z \sim 170$  the shift, caused by  $\Delta g_{\text{free}}$ , is essentially nonperturbative, behaves near the threshold of negative continuum like  $Z^5$ , exceeding all the known estimates of radiative corrections from vacuum polarization and electronic self-energy, and turns out to be at least of the same order as nuclei charge screening effects from filled electronic shells.

PACS: 31.30.Jv

### ВВЕДЕНИЕ

Новые лабораторные и астрофизические эксперименты не только значительно расширили возможности проведения высокоточных измерений характеристик водородоподобных атомов при различных зарядах ядра  $Z$  [1–3], но и стимулировали интерес к исследованию КЭД-эффектов, в которых радиационные вклады уже нельзя считать малыми поправками [4–9]. В последнем случае особый интерес представляет область больших  $Z$ , когда  $Z\alpha$  не является более малым параметром и вклад радиационных эффектов становится существенно непertурбативным.

---

<sup>1</sup>E-mail: costa@bog.msu.ru

<sup>2</sup>E-mail: khomovskij@physics.msu.ru

В данной работе рассматривается один из эффектов такого типа, который возникает при непертурбативном учете взаимодействия радиационной компоненты магнитного момента свободного электрона  $\Delta g_{\text{free}}$  с кулоновским полем неподвижного источника (ядра) для больших  $Z$  ( $Z > 137$ ).

Постановка задачи следующая. Гиромагнитное отношение для свободного электрона  $g_{\text{free}} = 2 + \Delta g_{\text{free}}$  известно с большой точностью как в теории, так и в эксперименте [10–13]. В КЭД теоретическое значение радиационной компоненты  $\Delta g_{\text{free}}$  определяется через разложение по степеням  $\alpha/\pi$ , в котором к настоящему времени вычислены вклады от диаграмм, содержащих до пяти петель [8, 14]. Первые члены этого разложения имеют вид

$$\Delta g_{\text{free}} = \alpha/\pi - 0,656958(\alpha/\pi)^2 + O((\alpha/\pi)^3). \quad (1)$$

Для электрона, находящегося в связанном состоянии в водородоподобном атоме, общее выражение для гиромагнитного отношения может быть представлено в следующем виде [15–17]:

$$g_{\text{bound}}(Z) = g_D + \Delta g_{\text{rec}} + \Delta g_{\text{rad}}. \quad (2)$$

В (2) при этом  $g_D$  — главная компонента в  $g_{\text{bound}}(Z)$  при  $Z < 137$  — определяет линейный отклик электрона, который находится в связанном состоянии в атоме и описывается соответствующим уравнением Дирака, на внешнее магнитное поле. Аналитическое выражение для  $g_D$ -фактора электрона в основном  $1s_{1/2}$ -состоянии водородоподобного атома в приближении неподвижного точечного ядра

$$g_D(Z) = \frac{2}{3}(1 + 2\sqrt{1 - (Z\alpha)^2}) \quad (3)$$

было получено Дж. Брейтом еще в 1928 г. [18].

$\Delta g_{\text{rec}}$  отвечает поправке, обусловленной эффектом отдачи, возникающей за счет конечности массы ядра [9, 19–22], и является функцией двух безразмерных параметров  $Z\alpha$  и  $m/M_N$ , где  $M_N$  — масса ядра. Начиная с работ Р. Н. Фаустова и Х. Гротча [19, 20], где был найден лидирующий член разложения  $\Delta g_{\text{rec}}$  по  $Z\alpha$  и  $m/M_N$ , который оказался равен  $(m/M_N)(Z\alpha)^2$ , этой поправке был посвящен целый ряд работ (см. [9, 21, 22] и приведенные там ссылки). В частности, для  $1s$ -состояния получено аналитическое выражение для  $\Delta g_{\text{rec}}$ , точное в первом порядке по  $m/M_N$ :

$$\Delta g_{\text{rec}}(Z) = \frac{m}{M_N}(Z\alpha)^2 - \frac{m}{M_N} \frac{(Z\alpha)^4}{3(1 + \sqrt{1 - (Z\alpha)^2})^2}. \quad (4)$$

В данной работе, однако, основное внимание уделяется большим  $Z$ , для которых эффекты отдачи, по крайней мере в первом приближении, неактуальны из-за малости  $m/M_N$ .

$\Delta g_{\text{rad}}$  определяет радиационный вклад в гиромагнитное отношение связанного электрона и представляется в виде двойного ряда по степеням параметров  $\alpha/\pi$ , отвечающего за процессы излучения-поглощения виртуальных фотонов электроном, и  $Z\alpha$ , что учитывает обмен виртуальными фотонами между электроном и атомным ядром. К настоящему времени в рамках пертурбативной КЭД надежно установлена структура  $\Delta g_{\text{rad}}$  в порядке  $(Z\alpha)^2$  с учетом всех поправок по  $\alpha/\pi$  [23, 24]:

$$\Delta g_{\text{rad}} = (g_{\text{free}} - 2) \left[ 1 + \frac{(Z\alpha)^2}{6} \right] + O(\alpha/\pi(Z\alpha)^4), \quad (5)$$

и рассчитаны вклады от двухпетлевых диаграмм и рассеяния света на свете [17, 25–29].

Следует отметить, что поправки порядка  $(Z\alpha)^2$  к  $\Delta g_{\text{rad}}$  имеют прежде всего кинематическую природу [19–22, 28, 29]. Такие нетривиальные КЭД-эффекты, как поляризация вакуума и рассеяние света на свете, проявляются только в порядке  $O(\alpha/\pi(Z\alpha)^4)$ . В то же время из (5) следует, что в таком «кинематическом» приближении  $\Delta g_{\text{free}}$  является параметром, не зависящим от конкретного электронного состояния, и при определении характеристик связанного состояния может рассматриваться как отдельный динамический фактор. В связи с этим возникает мотивация к непертурбативному учету вклада от  $\Delta g_{\text{free}}$  в свойства электронного состояния в атомах с большим  $Z$  непосредственно через дополнительный член в гамильтониане Дирака, отвечающий за наличие у дираковской частицы аномального магнитного момента (так называемый член Дирака–Паули):

$$\Delta U_{\text{АММ}} = \frac{\Delta g_{\text{free}}}{2} \frac{e}{4m} \gamma^0 \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (6)$$

где  $\sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = 2(i\alpha\mathcal{E} - \sigma\mathcal{H})$ , а  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{H}$  — электрическая и магнитная компоненты тензора  $F_{\mu\nu}$  соответственно. Поскольку такое эффективное взаимодействие радиационной компоненты магнитного момента электрона с внешним электромагнитным полем было впервые получено в работах Ю. Швингера [30], то далее мы для краткости будем называть (6) швингеровским взаимодействием.

Подчеркнем, что  $\Delta U_{\text{АММ}}$  имеет статус эффективного взаимодействия только на уровне уравнения Дирака в рамках одночастичного приближения (картины Фарри), а не дополнительного члена в затравочном лагранжиане. Последнее противоречило бы самой природе аномального магнитного момента электрона, который возникает в КЭД как одна из радиационных поправок к вершинному формфактору в пределе малых переданных импульсов [31, 32], и  $\Delta U_{\text{АММ}}$  поэтому есть только один из видов эффективного взаимодействия, обусловленного радиационными поправками к затравочному лагранжиану. В то же время непертурбативный учет даже той части эффективного взаимодействия, которая обусловлена  $\Delta g_{\text{free}}$ , может позволить существенно продвинуться вперед в понимании структуры и роли радиационных КЭД-эффектов в той области, где они уже не малы. Тем более что вклад от швингеровского взаимодействия, как и от спин-орбитального в нерелятивистском атоме, быстро растет с увеличением заряда ядра, и при  $Z\alpha \sim 1$  его корректный учет заведомо требует существенно непертурбативного подхода.

В настоящей работе будет показано, как в результате учета взаимодействия (6) спектр нижних электронных уровней в водородоподобном атоме изменяется по сравнению с чисто кулоновским случаем при различных значениях  $Z$ . При этом основное внимание будет уделяться вкладу швингеровского взаимодействия при больших  $Z$  ( $Z > 137$ ), а не прецизионным расчетам соответствующей поправки при малых  $Z$ , когда вполне эффективными являются методы пертурбативной КЭД.

Следует отметить, что взаимодействие заряженной дираковской частицы с кулоновским полем точечного заряда с учетом аномального магнитного момента через член Дирака–Паули рассматривалось в свое время в [33] с целью исследования возможности возникновения резонансов на масштабах порядка адронных размеров и масс за счет возрастания роли магнитных эффектов на предельно малых расстояниях. В настоящей работе мы рассматриваем принципиально другой аспект наличия у частицы аномалии магнитного момента, обусловленной радиационными поправками, а именно общую задачу о спектре и свойствах стационарных состояний частицы при наличии взаимодействия (6) в зависимости от величины заряда кулоновского источника, для чего используются другие

методы, как численные, так и аналитические, а полученные результаты явно демонстрируют существенное возрастание радиационных КЭД-эффектов при больших  $Z$ .

### КУЛОНОВСКАЯ ЗАДАЧА С ЧЛЕНОМ ДИРАКА–ПАУЛИ ДЛЯ ТОЧЕЧНОГО ЯДРА

Стационарное уравнение Дирака с членом Дирака–Паули (6) для электрона в кулоновском поле точечного ядра с зарядом  $Z$  имеет вид ( $\hbar = c = 1$ )

$$\left( \boldsymbol{\alpha} \mathbf{p} + \beta m - \frac{Z\alpha}{r} - i\Delta g_{\text{free}} \frac{Z\alpha}{4m} \frac{\boldsymbol{\gamma} \mathbf{r}}{r^3} \right) \psi = E\psi. \quad (7)$$

В естественных единицах, когда масштаб энергии служит масса покоя частицы, расстояний — соответствующая комптоновская длина волны, из уравнения (7) для верхней и нижней компонент дираковского биспинора  $\varphi$  и  $\chi$  следует

$$\begin{aligned} \left( \boldsymbol{\sigma} \mathbf{p} + \frac{iZ\lambda \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}}{r^2} \right) \varphi &= \left( \epsilon + 1 + \frac{Z\alpha}{r} \right) \chi, \\ \left( \boldsymbol{\sigma} \mathbf{p} - \frac{iZ\lambda \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}}{r^2} \right) \chi &= - \left( \epsilon - 1 + \frac{Z\alpha}{r} \right) \varphi, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\lambda = \alpha\Delta g_{\text{free}}/4$ ,  $\epsilon = E/m$ , а  $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ .

Как и в чисто кулоновском случае, при наличии  $\Delta U_{\text{АММ}}$  будут по-прежнему сохраняться полный момент электрона  $j$  и оператор  $k = \beta(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{l} + 1)$  [33], поэтому в стандартном представлении для матриц Дирака верхний и нижний спиноры дираковской волновой функции (ВФ) будут содержать шаровые спиноры  $\Omega_{jlm_j}$  и  $\Omega_{jl'm_j}$  различной четности и радиальные функции  $if_j(r)$  и  $g_j(r)$ :

$$\psi_{jm_j} = \begin{pmatrix} if_j(r) \Omega_{jlm_j} \\ g_j(r) \Omega_{jl'm_j} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

При этом  $f_j(r)$  и  $g_j(r)$  вещественны и  $l + l' = 2j$ . Далее состояния с фиксированным  $j$  и различными четностью, которую будем отождествлять с четностью верхнего спинора, и собственными значениями  $k$  будем рассматривать по отдельности. Если  $j = l + 1/2$ , то при четности  $(-1)^l$  и  $k = j + 1/2$

$$\psi_{jm_j} = \begin{pmatrix} iu_l(r) \Omega_{jlm_j} \\ q_l(r) \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \Omega_{jlm_j} \end{pmatrix}, \quad (10)$$

и радиальные функции  $u_l(r)$ ,  $q_l(r)$  удовлетворяют уравнению

$$\begin{aligned} \partial_r u_l - \left( \frac{l}{r} + \frac{Z\lambda}{r^2} \right) u_l &= \left( \epsilon + 1 + \frac{Z\alpha}{r} \right) q_l, \\ \partial_r q_l + \left( \frac{l+2}{r} + \frac{Z\lambda}{r^2} \right) q_l &= - \left( \epsilon - 1 + \frac{Z\alpha}{r} \right) u_l, \end{aligned} \quad (11)$$

а если четность равна  $(-1)^{l+1}$  и  $k = -(j + 1/2)$ , то

$$\psi_{jm_j} = \begin{pmatrix} iv_l(r)\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}\Omega_{jlm_j} \\ p_l(r)\Omega_{jlm_j} \end{pmatrix}, \quad (12)$$

при этом уравнения для пары  $v_l(r), p_l(r)$  принимают вид

$$\begin{aligned} \partial_r v_l + \left( \frac{l+2}{r} - \frac{Z\lambda}{r^2} \right) v_l &= \left( \epsilon + 1 + \frac{Z\alpha}{r} \right) p_l, \\ \partial_r p_l - \left( \frac{l}{r} - \frac{Z\lambda}{r^2} \right) p_l &= - \left( \epsilon - 1 + \frac{Z\alpha}{r} \right) v_l. \end{aligned} \quad (13)$$

В спектральной задаче (7) швингеровское взаимодействие играет очень специфическую роль. С одной стороны, оно доминирует на предельно малых расстояниях  $r \sim (Z\alpha)\alpha/4\pi$  от точечного источника заряда, при этом  $\alpha/4\pi$  в единицах комптоновской длины соответствует масштабу  $\simeq 0,25$  Фм. За счет этого асимптотика радиальных функций при  $r \rightarrow 0$  становится регулярной для всех  $Z$  и вне зависимости от четности уровня с точностью до степенного множителя при  $Z > 0$  имеет вид

$$f_j(r) \rightarrow \exp\left(-\frac{Z\lambda}{r}\right), \quad g_j(r) \rightarrow -\frac{\alpha}{2\lambda}r \exp\left(-\frac{Z\lambda}{r}\right), \quad (14a)$$

а при  $Z < 0$

$$g_j(r) \rightarrow \exp\left(-\frac{|Z|\lambda}{r}\right), \quad f_j(r) \rightarrow -\frac{\alpha}{2\lambda}r \exp\left(-\frac{|Z|\lambda}{r}\right). \quad (14б)$$

В результате дираковский гамильтониан (7) становится самосопряженным для всех  $Z$ . Поэтому введение члена Дирака–Паули одновременно является и способом регуляризации дираковского гамильтониана при условии сохранения точечного характера источника с зарядом  $Z > 137$ , альтернативным стандартному способу через обрезание кулоновского потенциала при  $r < \delta$ , который фактически означает приписывание источнику ненулевого размера.

Наряду со сменой асимптотики наиболее существенные изменения в поведении радиальных компонент электронной ВФ по сравнению с чисто кулоновской задачей происходят на предельно малых расстояниях от источника заряда. На рис. 1, *a, б* показано поведение ВФ уровня  $1s_{1/2}$  при  $Z = 1, 10, 20$  в «черепашьих» координатах  $\xi = ar + b \ln r$ . Последнее необходимо для детализации поведения радиальных функций при  $r \ll 1$  (в единицах комптоновской длины), где происходят все основные изменения в их профилях.

В то же время энергетический сдвиг уровней, к которому приводит швингеровское взаимодействие, не является эффектом только малых расстояний от ядра. Это до некоторой степени обусловлено медленным убыванием  $\sim 1/r^2$  соответствующих членов в уравнениях (11), (13) для радиальных функций, которое показывает, что швингеровское взаимодействие не имеет никакого определенного эффективного радиуса действия, но на самом деле является характерной чертой всех спектральных задач такого типа. Более

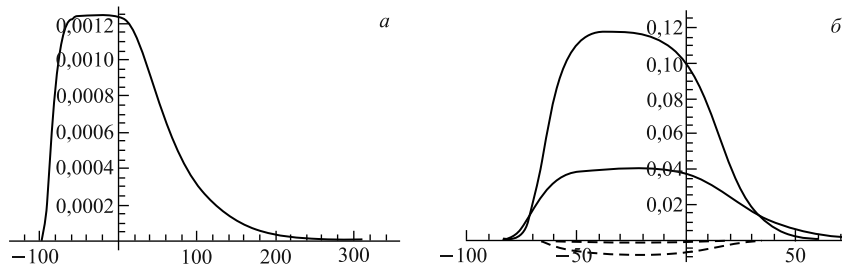


Рис. 1. а) Поведение верхней радиальной компоненты  $u_0(r)$  нормированного дираковского спинора для уровня  $1s_{1/2}$  при  $Z = 1$  в координатах  $\xi = r/3 + 7 \ln r$ . Нижняя компонента не показана, поскольку настолько мала, что в этом масштабе практически сливается с осью абсцисс. б) Поведение верхней (сплошные линии) и нижней (штриховые) радиальных компонент нормированного дираковского спинора для уровня  $1s_{1/2}$  при  $Z = 10, 20$  в координатах  $\xi = r + 7 \ln r$

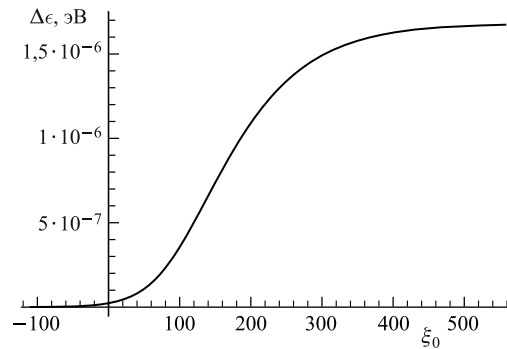


Рис. 2. Поведение энергетического сдвига уровня  $1s_{1/2}$  при  $Z = 1$  как функция параметра обрезания  $r_0$  в координатах  $\xi_0 = r_0 + 30 \ln r_0$

конкретно, если в уравнение Дирака (7) ввести обрезание швингеровского взаимодействия на радиусе  $r_0$ , то сдвиг  $\Delta\epsilon$  уровня  $1s_{1/2}$  как функция  $r_0$  будет вести себя, как показано на рис. 2.

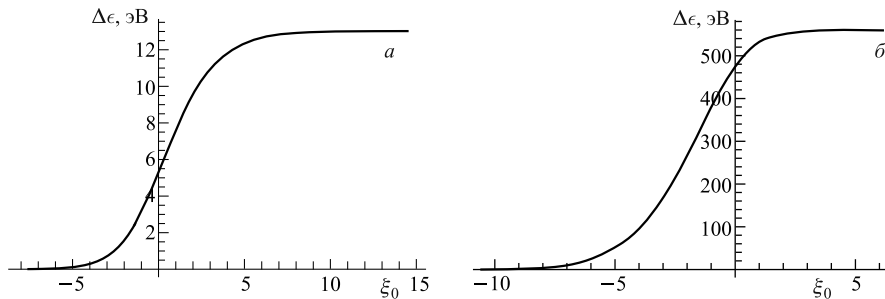


Рис. 3. Поведение энергетического сдвига уровня  $1s_{1/2}$  при  $Z = 50$  (а) и  $Z = 100$  (б) как функция параметра обрезания  $r_0$  в координатах  $\xi_0 = r_0 + \ln r_0$

Из рис. 2 следует, что при  $Z \sim 1$  основной вклад в сдвиг уровня  $1s_{1/2}$  дают большие расстояния от ядра ( $r \gg 1$ ), а не малые ( $r \ll 1$ ), хотя именно при  $r \ll 1$  происходят наиболее существенные изменения в поведении радиальных ВФ. Такой же эффект будет наблюдаться и для уровней с другими квантовыми числами и четностью. С увеличением  $Z$  область расстояний, дающих основной вклад в  $\Delta\epsilon$ , смещается в сторону меньших  $r$ , поскольку электронная ВФ локализуется на меньших расстояниях от ядра  $\sim 1/Z\alpha$ , а при  $Z\alpha \sim 1$  этот эффект уже практически исчезает (рис. 3, а, б).

Таким образом, при  $Z\alpha \ll 1$  энергетический сдвиг уровня является эффектом больших по сравнению с масштабом  $\alpha/4\pi \simeq 0,25$  Фм расстояний от источника заряда, на которых  $Z\lambda/r^2 \ll Z\alpha/r$ , поэтому при таких  $Z$  возникает вполне обоснованная мотивация к трактовке швингеровского взаимодействия (6) как поправки к кулоновскому. Для этого представим дираковский гамильтониан (7) в виде

$$H = H_0 + V, \quad (15)$$

где  $H_0$  соответствует чисто кулоновской задаче,  $V = \Delta U_{\text{АММ}}$ , и используем стандартную квантово-механическую теорию возмущений с невозмущенным гамильтонианом  $H_0$ . В первом порядке такой теории возмущений энергетический сдвиг уровней будет определяться через диагональные матричные элементы от  $\Delta U_{\text{АММ}}$  по релятивистским кулоновским ВФ (вырождение кулоновских уровней по четности никакой роли не играет, поскольку член Дирака–Паули сохраняет четность). В результате сдвиг уровней за счет швингеровского взаимодействия будет в первом приближении представляться в виде

$$\Delta\epsilon_{nj} = \langle \psi_{nj}^{(0)} | \Delta U_{\text{АММ}} | \psi_{nj}^{(0)} \rangle = -2Z\lambda \int_0^\infty dr f_{nj}^{(0)}(r) g_{nj}^{(0)}(r), \quad (16)$$

где  $f_{nj}^{(0)}(r)$ ,  $g_{nj}^{(0)}(r)$  — радиальные компоненты ВФ  $\psi_{nj}^{(0)}$  кулоновского уровня определенной четности,  $H_0\psi_{nj}^{(0)} = \epsilon_{nj}^{(0)}\psi_{nj}^{(0)}$ . Заметим, что формула (16) за счет структуры радиальных компонент  $\psi_{nj}^{(0)}$  содержит непертурбативную зависимость от  $Z\alpha$ , но при этом является величиной первого порядка по второму параметру  $\alpha/\pi$  как эффект теории возмущений для гамильтониана (15). Для интеграла по кулоновским функциям в правой части (16) существует аналитическое выражение, в частности,

$$\langle 1s_{1/2} | \Delta U_{\text{АММ}} | 1s_{1/2} \rangle = \frac{\Delta g_{\text{free}}}{2} \frac{(Z\alpha)^4}{\sqrt{1-(Z\alpha)^2}(2\sqrt{1-(Z\alpha)^2}-1)}, \quad (17a)$$

$$\begin{aligned} \langle 2p_{1/2} | \Delta U_{\text{АММ}} | 2p_{1/2} \rangle = & -\frac{\Delta g_{\text{free}}}{4} Z\alpha (1 - \sqrt{1 - (Z\alpha)^2})^{3/2} \times \\ & \times \frac{\left( 4\sqrt{1 - (Z\alpha)^2} - 2\sqrt{2(1 - (Z\alpha)^2)} \sqrt{\sqrt{1 - (Z\alpha)^2} + 1} - 3\sqrt{2} \sqrt{\sqrt{1 - (Z\alpha)^2} + 1} + 4 \right)}{\sqrt{1 - (Z\alpha)^2} ((Z\alpha)^2 - 3/4) \left( \sqrt{2(1 - (Z\alpha)^2)} - \sqrt{\sqrt{1 - (Z\alpha)^2} + 1} + \sqrt{2} \right)}, \end{aligned} \quad (17b)$$

но оно имеет второстепенное значение, поскольку интеграл будет сходиться только при  $Z\alpha < \sqrt{3}/2$ , т.е. когда  $Z$  не превышает так называемого субкритического значения

$Z_{\text{subcr}} = 118$  (о смысле этого значения см. [34]), а наибольший интерес представляет область  $Z\alpha \sim 1$ . Отметим только, что из (17) следует, что при  $Z\alpha \ll 1$  порядок величины энергетического сдвига за счет швингеровского взаимодействия соответствует известной оценке пертурбативных радиационных КЭД-эффектов  $\sim Z^4\alpha^5$  [31, 32].

В табл. 1, 2 приведены результаты численных расчетов для сдвига уровней  $1s_{1/2}$  и  $2p_{1/2}$  за счет швингеровского взаимодействия при различных значениях заряда  $Z$  точечного ядра. Для конкретности при вычислениях были использованы современные значения  $\alpha = 1/137,035999074$ ,  $\Delta g_{\text{free}}/2 = 0,00115965218073$  и  $m = 510998,928$  эВ [13]. Третья и четвертая колонки показывают величину вклада от  $\Delta U_{\text{АММ}}$ , вычисленного по формуле (16) с чисто кулоновскими функциями и с точными ВФ дираковской задачи (7) соответственно. В последнем случае матричный элемент фактически является средним значением оператора Дирака–Паули в соответствующем состоянии, поэтому составляет

Таблица 1. Поведение уровня  $1s_{1/2}$  в зависимости от величины заряда точечного ядра  $Z$ .  $\epsilon_0 = \sqrt{1 - (Z\alpha)^2}$  соответствует энергии основного состояния в чисто кулоновском случае

$Z$	$\epsilon(1s_{1/2})$	$(\epsilon(1s_{1/2}) - \epsilon_0) \times m$ , эВ	$\langle \Delta U_{\text{АММ}} \rangle_{\text{Coul}} \times m$ , эВ	$\langle \Delta U_{\text{АММ}} \rangle_{\text{exact}} \times m$ , эВ
1/3	0,9999970415871	$2,07073 \cdot 10^{-8}$	$2,07457 \cdot 10^{-8}$	$2,07457 \cdot 10^{-8}$
2/3	0,9999881662963	$3,31884 \cdot 10^{-7}$	$3,31940 \cdot 10^{-6}$	$3,31939 \cdot 10^{-7}$
1	0,999973373972	$1,680524 \cdot 10^{-6}$	$1,680520 \cdot 10^{-6}$	$1,680516 \cdot 10^{-6}$
2	0,999893491672	$2,689456 \cdot 10^{-5}$	$2,689477 \cdot 10^{-5}$	$2,689438 \cdot 10^{-5}$
6	0,9990410201	$2,1839327 \cdot 10^{-3}$	$2,1840592 \cdot 10^{-3}$	$2,1838158 \cdot 10^{-3}$
7	0,9986944976	$4,0501425 \cdot 10^{-3}$	$4,0504557 \cdot 10^{-3}$	$4,0498539 \cdot 10^{-3}$
8	0,998294516	$6,9175288 \cdot 10^{-3}$	$6,9182154 \cdot 10^{-3}$	$6,9168971 \cdot 10^{-3}$
14	0,99476781	$6,556064 \cdot 10^{-2}$	$6,557954 \cdot 10^{-2}$	$6,556064 \cdot 10^{-2}$
20	0,98929295	0,27755804	0,27771937	0,27741403
26	0,98183766	0,810774	0,811586	0,810061
32	0,97235688	1,91514	1,91818	1,91252
40	0,95646026	4,91341	4,92679	4,90216
50	0,93108488	13,0182	13,0842	12,9652
60	0,89911119	30,0709	30,3505	29,8604
70	0,85981633	64,1201	65,2364	63,3517
82	0,80150655	151,4	157,39	147,9
92	0,741741	309,824	336,685	297,067
101	0,677053	611,269	733,77	568,099
111	0,589204	1421,91	2390,8	1234,66
121	0,477162	3960,42		2969,6
131	0,325163	16170,1		8329,75
137	0,20061	90799,4		17007,3
144	-0,0029684			42999,1



Таблица 2. Поведение уровня  $2p_{1/2}$  в зависимости от величины заряда точечного ядра  $Z$ .  $\epsilon_1 = \sqrt{(1 + \sqrt{1 - (Z\alpha)^2})/2}$  соответствует энергии первого возбужденного уровня в чисто кулоновском случае

$Z$	$\epsilon(2p_{1/2})$	$(\epsilon(2p_{1/2}) - \epsilon_1) \times m$ , эВ	$\langle \Delta U_{\text{АММ}} \rangle_{\text{Coul}} \times m$ , эВ	$\langle \Delta U_{\text{АММ}} \rangle_{\text{exact}} \times m$ , эВ
1/3	0,999999260396	$-8,50984 \cdot 10^{-10}$	$-8,64406 \cdot 10^{-10}$	$-8,64406 \cdot 10^{-10}$
2/3	0,999997041570	$-1,38994 \cdot 10^{-8}$	$-1,38310 \cdot 10^{-8}$	$-1,38310 \cdot 10^{-8}$
1	0,999993343470	$-7,05182 \cdot 10^{-8}$	$-7,00234 \cdot 10^{-8}$	$-7,00234 \cdot 10^{-8}$
2	0,999973372548	$-1,12268 \cdot 10^{-6}$	$-1,12072 \cdot 10^{-6}$	$-1,12073 \cdot 10^{-6}$
6	0,9997602250	$-9,10871 \cdot 10^{-5}$	$-9,10825 \cdot 10^{-5}$	$-9,10830 \cdot 10^{-5}$
7	0,9996735688	$-1,68979 \cdot 10^{-4}$	$-1,68971 \cdot 10^{-4}$	$-1,68972 \cdot 10^{-4}$
8	0,9995735341	$-2,88749 \cdot 10^{-4}$	$-2,88710 \cdot 10^{-4}$	$-2,88713 \cdot 10^{-4}$
14	0,99869106	$-2,74568 \cdot 10^{-3}$	$-2,74563 \cdot 10^{-3}$	$-2,74572 \cdot 10^{-3}$
20	0,99731949	-0,0116856	-0,0116861	-0,0116869
26	0,99544859	-0,0343842	-0,0343863	-0,0343821
32	0,99306407	-0,08198	-0,08199	-0,08197
40	0,98905232	-0,213684	-0,213734	-0,213638
50	0,98261257	-0,581031	-0,581364	-0,580746
60	0,97443362	-1,38855	-1,39047	-1,38703
70	0,96427887	-3,09479	-3,10554	-3,08716
82	0,94898681	-7,8551	-7,9438	-7,8025
92	0,9330077	-17,5011	-18,0839	-17,2248
101	0,915309	-38,4821	-42,3491	-37,1456
111	0,890414	-107,241	-160,113	-98,2582
121	0,856369	-399,03		-319,568
131	0,799198	-2563,11		-1329,02
137	0,709801	-2740,78		601,049
144	-0,01932			284290

лишь часть суммарного сдвига уровня за счет швингеровского взаимодействия и всегда меньше, чем матричный элемент по кулоновским функциям  $\langle \psi_{nj}^{(0)} | \Delta U_{\text{АММ}} | \psi_{nj}^{(0)} \rangle$ .

Из табл. 1, 2 хорошо видно, что швингеровское взаимодействие можно рассматривать как поправку к кулоновскому и использовать теорию возмущений (15) до  $Z \sim 50-60$ , после чего вклад от  $\langle \Delta U_{\text{АММ}} \rangle_{\text{Coul}}$  начинает быстро расти за счет того, что начинают выравниваться амплитуды верхней и нижней компонент кулоновской ВФ в интеграле (16). Такое значительное увеличение вклада швингеровского взаимодействия в ситуации, когда верхняя и нижняя компоненты дираковской ВФ становятся одного порядка величины, как будет показано далее, приводит к существенному возрастанию обусловленных им радиационных эффектов при  $Z\alpha > 1$ .

Следует специально отметить, что последовательный учет эффектов, обусловленных  $\Delta g_{\text{free}}$  электрона, как существенно релятивистских, возможен только через оператор Дирака–Паули (6) в уравнении Дирака (7). В рамках квазирелятивистского разложения,

когда уравнения (11), (13) сводятся к уравнениям шредингеровского типа, на  $u_l(r)$  и  $v_l(r)$ :

$$-\Delta_r u_l + \left( \frac{l(l+1)}{r^2} + 2Z \frac{\lambda l}{r^3} + \frac{(Z\lambda)^2}{r^4} \right) u_l = 2 \left( \varepsilon + \frac{Z\alpha}{r} \right) u_l, \quad (18a)$$

$$-\Delta_r v_l + \left( \frac{(l+1)(l+2)}{r^2} - 2Z\lambda \frac{l+2}{r^3} + \frac{(Z\lambda)^2}{r^4} \right) v_l = 2 \left( \varepsilon + \frac{Z\alpha}{r} \right) v_l, \quad (18b)$$

где  $\varepsilon = \epsilon - 1 < 0$  есть нерелятивистская энергия связи,  $|\varepsilon| \ll 1$ , возникающее за счет члена Дирака–Паули эффективное отталкивание между электроном и ядром  $(Z\lambda)^2/2r^4$  должно рассматриваться как поправка к чисто кулоновскому гамильтониану. С другой стороны, такой отталкивающий кор является доминирующим эффектом на предельно малых расстояниях от ядра. Как следствие, нерелятивистская теория возмущений оказывается несостоятельной. Более того, если даже вместо невозмущенных кулоновских ВФ использовать точные решения уравнения Дирака со швингеровским взаимодействием (11), (13), то все равно поправка от члена  $(Z\lambda)^2/2r^4$  будет в несколько раз меньше, чем точная дираковская  $\langle \Delta U_{\text{АММ}} \rangle_{\text{exact}}$ .

Отметим также, что, как и в чисто кулоновской задаче без швингеровского взаимодействия, при  $Z < 137$  нижним уровнем дискретного спектра является  $1s_{1/2}$  и вырождение нижнего уровня по четности отсутствует, что есть очевидное следствие того, что в этой области  $\Delta U_{\text{АММ}}$  является поправкой к чисто кулоновскому дираковскому гамильтониану. Но с ростом  $Z$  его вклад возрастает и приводит к тому, что при  $Z\alpha > 1$  свойства нижних электронных уровней начинают существенно отличаться от чисто кулоновского случая. В реалистической ситуации при таких больших  $Z$  уже следует учитывать конечные размеры ядра, что будет сделано в следующем разделе, но при точечном ядре с зарядом  $Z > 137$  поведение уровней в задаче (7) оказывается настолько специфическим (рис. 4), что требует отдельного комментария.

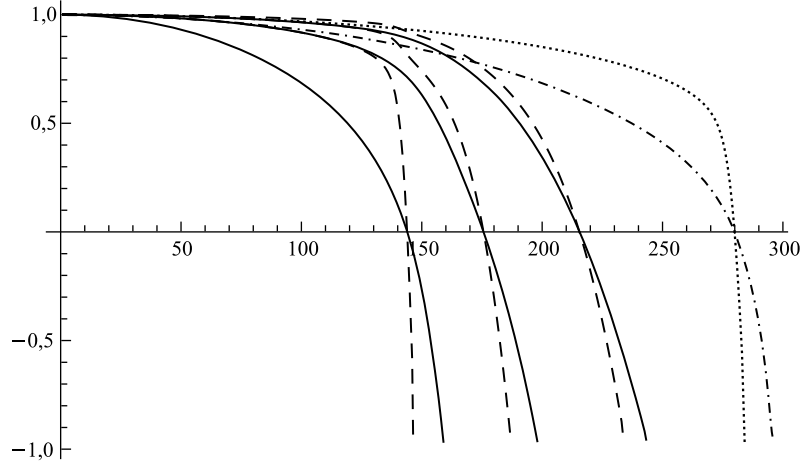


Рис. 4. Поведение уровней  $1s_{1/2}$ ,  $2s_{1/2}$ ,  $3s_{1/2}$  (сплошные линии),  $2p_{1/2}$ ,  $3p_{1/2}$ ,  $4p_{1/2}$  (штриховые) и  $2p_{3/2}$  (штрихпунктирная кривая),  $3d_{3/2}$  (пунктирная) дираковской частицы в спектральной задаче с гамильтонианом (7) как функция заряда точечного ядра  $Z$

Как и в табл. 1, 2 (вторая колонка), вклад в энергию уровней от швингеровского взаимодействия для состояний  $ns_{1/2}$  и  $n'p_{1/2}$  имеет разный знак. При  $Z > 137$  это приводит к тому, что уровни  $(n+1)p_{1/2}$  «обгоняют»  $ns_{1/2}$  в области отрицательных значений энергии, а именно: при  $\epsilon < 0$  до момента достижения порога отрицательного континуума для всех  $n > 0$  уровни  $(n+1)p_{1/2}$  будут лежать ниже, чем  $ns_{1/2}$ . В частности, значения  $Z$ , при которых уровни  $1s_{1/2}$ ,  $2s_{1/2}$ ,  $3s_{1/2}$  и  $2p_{1/2}$ ,  $3p_{1/2}$ ,  $4p_{1/2}$  достигают порога отрицательного континуума, соответственно равны 159, 198, 244 и 147, 187, 235. Таким образом, при непертурбативном учете швингеровского члена в таком «водородоподобном атоме» с точечным ядром критическое значение  $Z_{\text{кр}}$ , при котором первый дискретный уровень достигает порога отрицательного континуума, определяется уровнем  $2p_{1/2}$  и равно 147. Насколько известно авторам, в релятивистской квантовой механике, равно как и в других близких по смыслу квантово-механических одночастичных задачах, нет пока других примеров, когда бы нижним уровнем дискретного спектра кулоновского типа становился  $2p$ , а не  $1s$ , т. е. состояние с узлами и выраженной угловой анизотропией.

Такой же эффект перестройки спектра имеет место и для уровней с  $j = 3/2, 5/2 \dots$ , но это происходит при существенно больших значениях  $Z$ . В частности,  $3d_{3/2}$  «обгонит»  $2p_{3/2}$  при  $Z \simeq 280$ . Такое поведение  $3d_{3/2}$  и  $2p_{3/2}$  опять же обусловлено тем, что вклад в энергию уровней от швингеровского взаимодействия для этих уровней имеет разный знак, а значительное увеличение заряда ядра, при котором наступает такой непертурбативный режим перестройки уровней, объясняется тем, что в (11), (13) швингеровское взаимодействие конкурирует не только с кулоновским членом  $Z\alpha/r$ , но и с центробежным. Поэтому с ростом  $j$  необходимо соответствующее увеличение  $Z$ , чтобы швингеровский член смог конкурировать с центробежным слагаемым на таких  $r$ , когда амплитуда ВФ дираковской частицы еще не стала исчезающе малой.

Специфической особенностью такой перестройки спектра за счет швингеровского взаимодействия в области  $Z > 137$  является также то обстоятельство, что при непрерывном изменении  $Z$  пересечение уровней  $nl_j$  и  $(n+1)(l+1)_j$  происходит всегда при  $\epsilon = 0$ , что вполне четко видно из их поведения как функций  $Z$ , приведенного на рис. 4. Этот эффект проверяется численно с высокой точностью и имеет следующее объяснение. Легко видеть, что если при  $\epsilon = 0$  уравнения (11), (13) рассматривать на всей вещественной оси  $-\infty \leq x \leq +\infty$ , то они будут переходить друг в друга при следующем отождествлении:

$$u_l(x) \rightarrow p_l(-x), \quad q_l(x) \rightarrow -v_l(-x). \quad (19)$$

Иными словами, при  $\epsilon = 0$  вместо двух систем (11), (13) на полуоси  $0 \leq r \leq +\infty$  достаточно рассматривать одну из них, например систему

$$\begin{cases} \partial_x u_l - \left( \frac{l}{x} + \frac{Z\lambda}{x^2} \right) u_l = \left( 1 + \frac{Z\alpha}{x} \right) q_l, \\ \partial_x q_l + \left( \frac{(l+2)}{x} + \frac{Z\lambda}{x^2} \right) q_l = \left( 1 - \frac{Z\alpha}{x} \right) u_l, \end{cases} \quad (20)$$

при  $-\infty \leq x \leq +\infty$  с условием квадратичной интегрируемости решений. Решение (20) при  $0 \leq x \leq +\infty$  воспроизводит исходную пару  $u_l(r), q_l(r)$ , а при  $-\infty \leq x \leq 0$  — пару  $v_l(r), p_l(r)$  по правилу (19):  $v_l(r) = -q_l(-r)$ ,  $p_l(r) = u_l(-r)$ . Как спектральная задача на всей вещественной оси уравнение (20), однако, является плохо определенной,

поскольку точка  $x = 0$  при этом оказывается существенно особой, в которой все ограниченные решения обращаются в нуль со всеми производными, и тем самым однозначного непрерывного продолжения через  $x = 0$  в такой «спектральной» задаче не существует. В то же время, если в (20) вместо непрерывного продолжения через начало координат ввести невязку  $\Delta_l(\delta) = |u_l(\delta)q_l(-\delta) - q_l(\delta)u_l(-\delta)|$  и в области  $|x| \geq \delta$  рассматривать спектральную задачу на параметр  $Z$  с условием убывания решений при  $x \rightarrow \pm\infty$  и минимизацией невязки, то при малых  $\delta \ll Z\lambda$  численное решение будет показывать наличие четко выраженного глубокого минимума в невязке при значении  $Z$ , с высокой точностью воспроизводящем те  $Z$ , которые определяются из решения систем (11), (13) для  $\epsilon = 0$  по отдельности на полюсы  $0 \leq r \leq \infty$ . Таким образом, каждая пара уровней  $nl_j$  и  $(n+1)(l+1)_j$  действительно пересекается в точности при  $\epsilon = 0$ , причем каждая пара при своем  $Z$ . В частности, при использованных выше номинальных значениях [13] для  $\alpha$  и  $\Delta g_{\text{free}}$  уровни  $1s_{1/2}$  и  $2p_{1/2}$  пересекаются при  $Z = 143,916408350$ , что в терминах целочисленного заряда ядра означает, что эти уровни максимально сближаются при  $Z = 144$ .

Не менее специфическим оказывается и поведение  $g_D$ -факторов электрона в зависимости от  $Z$ . Опуская детали, изложенные в работе [35], приведем лишь окончательный

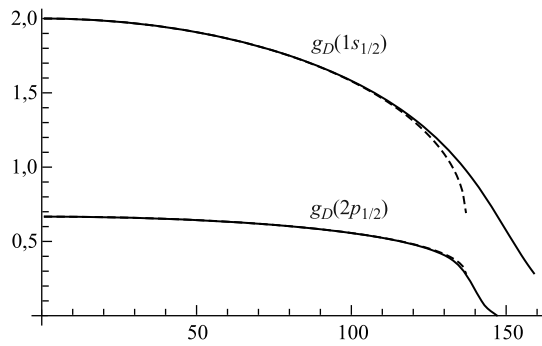


Рис. 5. Поведение  $g_D$ -фактора для  $1s_{1/2}$ - и  $2p_{1/2}$ -уровней с учетом  $\Delta U_{\text{AMM}}$  (сплошные линии) и без него (штриховые) в зависимости от заряда точечного ядра  $Z$

результат для поведения  $g_D(Z)$  для  $1s_{1/2}$ - и  $2p_{1/2}$ -уровней в зависимости от  $Z$  на всем интервале изменения заряда до момента опускания уровней в отрицательный континуум (рис. 5).

Из рис. 5 следует, что для  $2p_{1/2}$ -состояния как энергия, так и  $g_D$ -фактор электрона смещаются вниз относительно чисто кулоновского случая, причем с ростом  $Z$  этот эффект становится все более четко выраженным, а при  $Z > 144$   $g_D$ -фактор вообще оказывается близок к нулю. Обратим внимание, что именно в этой области по  $Z$  уровень  $2p_{1/2}$  становится одновременно и нижним энергетическим, поэтому в случае точечного ядра представление о  $g_D(Z)$  как о главной составляющей  $g_{\text{bound}}(Z)$  для области  $Z > 137$  уже не является очевидным.

### ЭФФЕКТЫ ШВИНГЕРОВСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДЛЯ СВЕРХТЯЖЕЛОГО ЯДРА КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ С $Z > 137$

Теперь рассмотрим вопрос о том, насколько и в каких случаях такие радиационные эффекты могут быть актуальны для реальных сверхтяжелых атомов или, что более корректно, квазимолекул с  $Z > 137$  (в физике тяжелых ионов это  $Z \sim 140-190$ ), поскольку при таких  $Z$  уже необходимо непертурбативным образом учитывать и конечные размеры источника кулоновского потенциала, в котором находится электрон. Поскольку точный количественный анализ в этом случае становится весьма сложным, мы рассмо-

трим приближенный способ оценки возникающих в такой задаче радиационных эффектов в рамках модели кулоновского источника («ядра») в виде голого (без заполненных электронных оболочек) сферически-симметричного нуклонного кластера с  $Z > 137$  и радиусом  $R \sim 10$  Фм, хотя в реальной ситуации следовало бы рассматривать квазимолекулу, в которой два или более тяжелых протяженных ядра типа Рb или U оказываются на расстояниях 10–30 Фм друг от друга, причем одно из них является ядром атома мишени. Но для предварительных оценок эффектов от взаимодействия (6) такое упрощение вполне допустимо.

В случае протяженного ядра основной вопрос состоит в том, можно ли использовать приближение однородного непрерывного распределения заряда по объему ядра или с самого начала следует учитывать кварковую структуру нуклонов, поскольку в соответствии с асимптотиками (14) швингеровское взаимодействие будет приводить к появлению у электронной ВФ нулей бесконечной кратности на каждом из составляющих  $u$ - и  $d$ -кварков, как на точечных источниках заряда  $Z_u = +2/3$  и  $Z_d = -1/3$ . Положительный вариант ответа на этот вопрос основывается на том, что электронная ВФ будет обращаться в нуль со всеми производными только в окрестности каждого кварка очень малых размеров  $\sim \alpha^2/4\pi \simeq 1,6 \cdot 10^{-3}$  Фм, что гораздо меньше средних межкварковых расстояний в нуклоне  $\sim 10^{-1}-1$  Фм, а энергетический сдвиг за счет швингеровского взаимодействия электрона с кварками, в свою очередь, в силу малости их зарядов формируется за счет больших расстояний  $\sim 1/\alpha \gg 1$  (см. рис. 2), что на несколько порядков превышает размеры ядра. На таких больших расстояниях от ядра суммирование вкладов от отдельных кварков в общий сдвиг электронных уровней эквивалентно переходу к непрерывному распределению заряда в операторе Дирака–Паули, а суммарный объем областей исчезновения электронной ВФ в окрестности каждого кварка даже для сверхтяжелых ядер с  $Z \sim 200-300$  и числом кварков  $\sim 1000-2000$  будет порядка  $10^{-8}-10^{-9}$  от объема ядра, поэтому им заведомо можно пренебречь и рассматривать непрерывное распределение по всему объему ядра. Для кулоновского взаимодействия усреднение заряда кварков по объему ядра для электронных состояний в энергетическом диапазоне  $(-1, +1)$  (в единицах массы покоя) мотивировано еще лучше (это не ГНР). В результате при вполне обоснованном предположении о равномерном распределении кварков по объему ядра для описания эффектов, обусловленных  $\Delta U_{\text{АММ}}$ , в качестве исходной модели в таком подходе можно использовать кулоновский потенциал однородного распределения заряда по ядру, что сводится к замене

$$\frac{Z\alpha}{r} \rightarrow \frac{1}{2} \left( 3 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right) \frac{Z\alpha}{R}, \quad r < R, \quad \frac{Z\alpha}{r}, \quad r > R, \quad (21)$$

и соответствующий такому кулоновскому потенциалу оператор Дирака–Паули, что дает

$$\frac{Z\lambda}{r^2} \rightarrow \frac{Z\lambda r}{R^3}, \quad r < R, \quad \frac{Z\lambda}{r^2}, \quad r > R, \quad (22)$$

во всех уравнениях (11), (13) для радиальных компонент электронной ВФ. После чего сдвиг уровней за счет швингеровского взаимодействия вычисляется либо через прямое решение уравнений (11), (13) с заменой (21), (22), либо по теории возмущений (15), применимость которой в такой модели с усреднением заряда кварков по объему ядра обосновывается отсутствием сингулярностей в потенциале (22). В последнем случае

энергетический сдвиг будет определяться из интеграла

$$\Delta\epsilon_{\text{АММ}}(nj) = -2Z\lambda \left[ \frac{1}{R^3} \int_0^R r^3 dr + \int_R^\infty dr \right] \tilde{f}_{nj}^{(0)}(r) \tilde{g}_{nj}^{(0)}(r), \quad (23)$$

где  $\tilde{f}_{nj}^{(0)}(r)$ ,  $\tilde{g}_{nj}^{(0)}(r)$  — радиальные компоненты кулоновской ВФ уровня с квантовыми числами  $n, j$  определенной четности, соответствующие распределенному заряду и потенциалу (21). Отметим, что в (23)  $\Delta\epsilon_{\text{АММ}}$  снова имеет статус эффекта первого порядка по  $\alpha/\pi$  с непertурбативной зависимостью от  $Z\alpha$ , а прямое решение уравнений (11), (13) будет, по крайней мере частично, показывать и непertурбативную зависимость от  $\alpha/\pi$ .

Величина энергетического сдвига, обусловленная  $\Delta U_{\text{АММ}}$ , будет при этом сильно зависеть от исходного положения уровня в чисто кулоновском случае, поскольку положением уровня определяется соотношение между верхней и нижней компонентами электронной ВФ. Для уровней, расположенных достаточно близко к порогу положительного континуума, нижняя компонента мала и весь эффект от  $\Delta U_{\text{АММ}}$  будет весьма малой поправкой к уровням. Такая ситуация будет иметь место для ядер с  $Z \ll 137$ . Но в случае сверхтяжелого ядра с  $Z \geq 170$  уровни уже могут опускаться до порога отрицательного континуума, и тогда их ВФ будут устроены именно так, чтобы эффект от швингеровского взаимодействия стал максимальным. Более конкретно, в модели с однородным распределением заряда в ядре при достижении уровнем порога отрицательного континуума радиальные функции дираковской ВФ с четностью  $(-1)^{j\mp 1/2}$  вне ядра с точностью до нормировочного множителя имеют вид (см., например, [39])

$$f_j(r) = K_{2i\kappa_j}(\sqrt{8qr})/r, \\ g_j(r) = -\frac{K_{1+2i\kappa_j}(\sqrt{8qr}) + K_{1-2i\kappa_j}(\sqrt{8qr})}{\sqrt{2qr}} \mp \frac{j+1/2}{qr} K_{2i\kappa_j}(\sqrt{8qr}), \quad (24)$$

где  $K_p(z)$  — функция Макдональда,  $q = Z\alpha$ ,  $\kappa_j = \sqrt{q^2 - (j+1/2)^2}$ , и при  $r \gg 1$  убывают как  $\exp(-\sqrt{8qr})/r^{3/2}$ . Из (24) легко видеть, что при этом верхняя и нижняя компоненты ВФ вне ядра имеют почти одинаковую амплитуду, и радиационные эффекты, обусловленные  $\Delta g_{\text{free}}$ , становятся значительно более существенными. Актуальность их оценки обусловлена прежде всего тем, что в КЭД при значениях  $Z$ , когда первый дискретный уровень достигает порога нижнего континуума, становятся существенными эффекты поляризации электрон-позитронного вакуума. Наиболее известный эффект такого типа, рассмотренный в [36–40], предсказывает спонтанное рождение электрон-позитронных пар и перестройку вакуума при заряде ядра  $Z \geq 170$  (последняя оценка с учетом экранировки ядра атома мишени заполненными электронными оболочками  $Z \geq 173$  [41]). Однако имеющиеся к настоящему времени экспериментальные данные, прежде всего по физике тяжелых ионов, не позволяют пока сделать однозначное заключение о достижении критической области, по крайней мере в диапазоне  $140 < Z < 190$  [4, 5, 42–44], и для корректного анализа ситуации необходим максимально полный учет швингеровского взаимодействия, равно как и других радиационных КЭД-эффектов.

Для конкретности рассмотрим случай голого ядра с зарядом  $Z_{\text{cr}} = 170$  и радиусом  $R = 1,23 \cdot (2,5Z)^{1/3} \simeq 9,24$  Фм, когда без учета швингеровского взаимодействия нижний  $1s_{1/2}$ -уровень почти достигает нижнего континуума, более точно, энергия связи

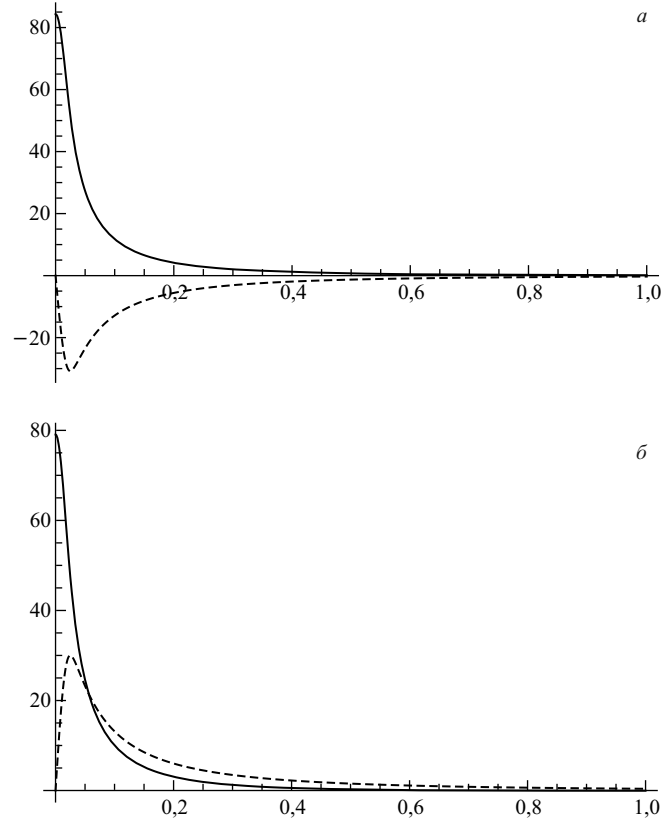


Рис. 6. Поведение верхней (сплошная линия) и нижней (штриховая) радиальных компонент нормированной кулоновской ВФ уровня  $1s_{1/2}$  с  $\epsilon = -0,99999$  (а) и уровня  $2p_{1/2}$  с  $\epsilon = -0,117$  (б) при однородном распределении заряда в ядре с зарядом  $Z = 170$  и радиусом  $R \simeq 9,24$  Фм

$K$ -оболочки равна 1,99999. Радиальные компоненты нормированной электронной ВФ уровня показаны на рис. 6, а.

В этом случае для сдвига нижнего уровня за счет  $\Delta U_{\text{АММ}}$  прямое решение уравнения (11) с потенциалами (21), (22) дает

$$\Delta\epsilon_{\text{АММ}}^{(+)}(1s_{1/2}) = 43,93 \text{ кэВ}, \quad (25)$$

где знак (+) показывает, что этот результат получен в рамках модели с распределенным зарядом. При вычислении этого же сдвига по теории возмущений (23) получим  $\Delta\epsilon_{\text{АММ}}^{(+)}(1s_{1/2}) = 46,13$  кэВ, что вполне согласуется с (25). Эти результаты следует сравнить с известными радиационными поправками к энергии связи  $K$ -оболочки в таком ядре за счет поляризации вакуума  $\Delta\epsilon_{\text{VP}}(1s_{1/2}) = -10,65$  кэВ и собственно энергетической вставки в электронный пропагатор  $\Delta\epsilon_{\text{SE}}(1s_{1/2}) = 11,0$  кэВ, вычисленными в первом порядке по  $\alpha/\pi$  с непертурбативным учетом вклада от  $Z\alpha$  (см. [5, 45] и приведенные там ссылки). Легко видеть, что  $\Delta\epsilon_{\text{АММ}}$  в 4–5 раз превышает каждую из этих радиационных поправок по отдельности, а поскольку  $\Delta\epsilon_{\text{VP}} + \Delta\epsilon_{\text{SE}} \simeq 300$  эВ, то с учетом  $\Delta\epsilon_{\text{АММ}}$ , которая возникает из радиационной поправки к вершинному формфактору, суммарный

радиационный сдвиг уровня  $1s_{1/2}$  возрастает примерно в 150 раз, т. е. как минимум на два порядка. Соответствующий сдвиг критического заряда составляет при этом  $\Delta Z_{\text{кр}} \simeq 1,5$ , что уже сравнимо с эффектами экранировки от заполненных электронных оболочек. Отметим, что вероятность нахождения электрона внутри ядра при этом достаточно мала и составляет всего 2,2 %, но этого хватает, чтобы вклад от швингеровского взаимодействия стал столь существенным.

Для уровня  $2p_{1/2}$  в таком ядре в рамках модели распределенного заряда радиационный сдвиг за счет швингеровского взаимодействия, как и для точечного ядра (см. табл. 2 и рис. 4), оказывается отрицательным и сравнимым по величине с  $\Delta\epsilon_{\text{АММ}}^{(+)}(1s_{1/2})$ , несмотря на то, что его чисто кулоновская энергия связи составляет всего 1,117, т. е. уровень лежит достаточно высоко над отрицательным континуумом. Прямое решение уравнения (13) с потенциалами (21), (22) в этом случае дает

$$\Delta\epsilon_{\text{АММ}}^{(+)}(2p_{1/2}) = -43,07 \text{ кэВ}, \quad (26)$$

а при вычислении по формуле (23) получим  $\Delta\epsilon_{\text{АММ}}^{(+)}(2p_{1/2}) = -40,67 \text{ кэВ}$ , что снова вполне согласуется с результатом точного численного расчета (26). Отрицательный знак и значительная величина  $\Delta\epsilon_{\text{АММ}}^{(+)}(2p_{1/2})$  объясняются поведением радиальных компонент электронной ВФ вне ядра — они близки по амплитуде и одного знака (рис. 6, б).

Заметим также, что в такой модели с распределенным зарядом электрон фактически обменивается импульсом со всем ядром, а не с отдельными кварками. Тогда для эффектов отдачи в первом приближении можно воспользоваться хорошо известной нерелятивистской оценкой

$$\Delta\epsilon_{\text{recoil}} = \frac{\langle \mathbf{p}^2 \rangle}{2M_N} = \frac{m}{M_N} \left\langle \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \right\rangle, \quad (27)$$

где  $\langle \mathbf{p}^2/2m \rangle$  есть средняя кинетическая энергия электрона, и, поскольку в случае сверхтяжелого ядра  $m/M_N \sim 10^{-6}$ , эффекты отдачи будут пренебрежимо малы, по крайней мере по сравнению с  $\Delta\epsilon_{\text{АММ}}$ .

Альтернативный вариант исходит из того, что  $\Delta U_{\text{АММ}}$  — слишком сингулярный оператор, чтобы допускать усреднение заряда кварков по объему ядра, особенно для уровней, близких к порогу отрицательного континуума, когда вероятность нахождения электрона внутри ядра может быть достаточно мала, но амплитуда электронной ВФ максимальна (см. рис. 6, а, б). Обоснование такого подхода состоит в том, что чем больше амплитуда ВФ, с которой она начинает трансформироваться в экспоненциально убывающую асимптотику (14) в окрестности каждого кварка, тем значительнее будет изменение ВФ на малых расстояниях и тем самым эффект от швингеровского взаимодействия электрона с данным кварком, поэтому теория возмущений (23) неприменима. Поскольку точное решение уравнения Дирака с 1000–2000 точечных источников представляет как минимум весьма сложную задачу, рассмотрим упрощенную модель, в которой каждый кварк по отдельности является источником соответствующего потенциала Дирака–Паули (6) в центре ядра, а кулоновское взаимодействие электрона с кварками описывается непрерывным распределением заряда по ядру. То обстоятельство, что кварки помещаются только в центр ядра, обусловлено необходимостью сохранения сферической симметрии задачи и тем самым квантовых чисел  $n, j$  для электронных уровней. (Любой более сложный вариант фактически означает точное решение уравнения Дирака, о котором упоминалось



выше.) Тогда соответствующий энергетический сдвиг электронного уровня от каждого кварка  $\Delta\epsilon_{\text{АММ}}^{(q)}$  находится из (11), (13), в которых кулоновский потенциал заменяется на усредненный (21), а в членах Дирака–Паули  $Z\lambda/r^2$  заменяется только заряд ядра на заряд кварков:  $Z \rightarrow Z_q$ . Отметим, что последняя замена приводит к тому, что в такой модели вторым фактическим параметром взаимодействия наряду с  $Z\alpha$  будет  $\alpha^2/\pi$ , а не  $\alpha/\pi$ .

Суммарный сдвиг электронного уровня находится через сумму по всем кваркам

$$\Delta\epsilon_{\text{АММ}}^{(-)} = (2Z + N)\Delta\epsilon_{\text{АММ}}^{(u)} + (Z + 2N)\Delta\epsilon_{\text{АММ}}^{(d)}, \quad (28)$$

где  $Z$  — число протонов;  $N$  — число нейтронов, а знак  $(-)$  соответствует альтернативному варианту решения вопроса о возможности усреднения заряда кварков. Следует только учесть изменение асимптотики ВФ при  $r \rightarrow 0$  за счет отсутствия кулоновской сингулярности, которое для  $u$ -кварка будет иметь вид

$$f_j(r) \rightarrow \exp\left(-\frac{Z_u\lambda}{r}\right), \quad g_j(r) \rightarrow -\frac{\epsilon - 1 + 3Z\alpha/2R}{2Z_u\lambda} r^2 \exp\left(-\frac{Z_u\lambda}{r}\right), \quad (29a)$$

а для  $d$ -кварка

$$g_j(r) \rightarrow \exp\left(\frac{Z_d\lambda}{r}\right), \quad f_j(r) \rightarrow -\frac{\epsilon + 1 + 3Z\alpha/2R}{2Z_d\lambda} r^2 \exp\left(\frac{Z_d\lambda}{r}\right). \quad (29b)$$

Для уровня  $1s_{1/2}$  прямое решение уравнения (11) с заменой кулоновского потенциала на (21), членов Дирака–Паули на  $Z_q\lambda/r^2$  и асимптотиками (29) дает

$$\Delta\epsilon_{\text{АММ}}^{(u)}(1s_{1/2}) = 211,35 \text{ эВ}, \quad \Delta\epsilon_{\text{АММ}}^{(d)}(1s_{1/2}) = -22,71 \text{ эВ}, \quad (30)$$

и в результате для суммарного сдвига уровня  $1s_{1/2}$  за счет швингеровского взаимодействия в ядре с  $Z = 170$ ,  $N = 1,5Z = 255$  и радиусом  $R \simeq 9,24$  Фм получаем

$$\Delta\epsilon_{\text{АММ}}^{(-)}(1s_{1/2}) = 110,3 \text{ кэВ}, \quad (31)$$

что более чем в два раза превышает значение  $\Delta\epsilon_{\text{АММ}}^{(+)}(1s_{1/2})$ , полученное при усреднении заряда в том числе и в членах Дирака–Паули. Оценка сдвигов по теории возмущений в таком подходе сводится к формуле (23), в которой следует перейти к пределу  $R \rightarrow 0$ , и дает при этом другой результат:

$$\Delta\epsilon_{\text{АММ}}^{(u)}(1s_{1/2}) = 244,26 \text{ эВ}, \quad \Delta\epsilon_{\text{АММ}}^{(d)}(1s_{1/2}) = -122,13 \text{ эВ}, \quad \Delta\epsilon_{\text{АММ}}^{(-)}(1s_{1/2}) = 62,3 \text{ кэВ}, \quad (32)$$

более близкий к  $\Delta\epsilon_{\text{АММ}}^{(+)}(1s_{1/2})$ . Заметим, однако, что в таком подходе, когда швингеровское взаимодействие приводит к экспоненциальному убыванию ВФ при  $r \rightarrow 0$  на фоне максимальных амплитуд последней, его учет по теории возмущений не может считаться обоснованным. Поэтому результат прямого численного расчета (31) представляется более правильным и составляет уже 11% от энергии связи  $K$ -оболочки, при этом сдвиг критического заряда составляет  $\Delta Z_{\text{кр}} \simeq 3,3$  и перекрывает эффекты экранировки. Отметим также, что этот результат содержит непертурбативную зависимость как от  $Z\alpha$ , так и от  $\alpha^2/\pi$ , что проявляется и в том, что  $\Delta\epsilon_{\text{АММ}}^{(-)}(1s_{1/2})$  уже гораздо больше соответствует фактору  $Z^5$ , а не  $Z^4$ , как для пертурбативных радиационных КЭД-эффектов (для  $Z = 170$  сдвиг 110,3 кэВ составляет примерно 1/2 от  $Z^5\Delta\epsilon_{Z=1}(1s_{1/2})$ ).

Еще более нетривиальные результаты возникают в таком подходе для оценки радиационного сдвига уровня  $2p_{1/2}$  за счет  $\Delta g_{\text{free}}$ . Точный численный расчет дает

$$\Delta\epsilon_{\text{АММ}}^{(u)}(2p_{1/2}) = 18,11 \text{ эВ}, \quad \Delta\epsilon_{\text{АММ}}^{(d)}(2p_{1/2}) = 108,4 \text{ эВ}, \quad (33)$$

в результате чего суммарный сдвиг уровня  $2p_{1/2}$  оказывается положительным и почти таким же большим по величине, как для  $1s_{1/2}$ :

$$\Delta\epsilon_{\text{АММ}}^{(-)}(2p_{1/2}) = 84,5 \text{ кэВ}. \quad (34)$$

При этом фактор  $Z^5$  подтверждается еще лучше, чем для  $1s_{1/2}$  (для  $Z = 170$  сдвиг  $84,5 \text{ кэВ}$  составляет примерно  $8Z^5 |\Delta\epsilon_{Z=1}(2p_{1/2})|$ ).

Отметим, что при оценке вклада от  $\Delta U_{\text{АММ}}$  по теории возмущений результаты для  $2p_{1/2}$  получаются существенно другие, близкие к модели усредненного заряда:

$$\begin{aligned} \Delta\epsilon_{\text{АММ}}^{(u)}(2p_{1/2}) &= -216,8 \text{ эВ}, & \Delta\epsilon_{\text{АММ}}^{(d)}(2p_{1/2}) &= -108,4 \text{ эВ}, \\ \Delta\epsilon_{\text{АММ}}^{(-)}(2p_{1/2}) &= -55,3 \text{ кэВ}, \end{aligned} \quad (35)$$

но, как уже отмечалось выше, применимость теории возмущений к швингеровскому взаимодействию в данном случае не является обоснованной. Это еще раз показывает, что переход к непрерывному распределению заряда кварков по ядру как в кулоновском потенциале, так и в членах Дирака–Паули не является оптимальным, так как нивелирует все эффекты от сингулярного характера оператора (6) для точечного источника.

Таким образом, при минимальном учете сингулярного характера швингеровского взаимодействия и обусловленной этим быстро убывающей асимптотики электронной ВФ (29) на каждом кварке по отдельности радиационный сдвиг нижних уровней за счет  $\Delta g_{\text{free}}$  в сверхтяжелых ядрах с большими  $Z$  оказывается положительным и составляет 10–15% энергии связи соответствующих оболочек. Существует по крайней мере два фактора, которые могут дополнительно усилить оценки (31) и (34) в рамках модели с учетом неоднородности распределения заряда по объему ядра. Это, во-первых, неаддитивность влияния сингулярностей оператора Дирака–Паули на электронную ВФ и тем самым на сдвиг уровня, если рассматривать несколько кварков одновременно. Тогда электронная ВФ будет вынуждена интерполировать между несколькими областями экспоненциального убывания, что приведет к дополнительному росту градиентов ВФ и тем самым кинетического члена в энергии. Во-вторых, это эффекты отдачи при взаимодействии электрона с отдельными кварками. Поскольку масса  $M_q$  токовых  $u$ - и  $d$ -кварков составляет всего 5–10 МэВ, и тем самым  $m/M_q \sim 0,1$ , то эти эффекты могут быть достаточно существенны, а из очевидной кинематики (27) следует, что их вклад в энергию будет заведомо положительным. Но количественный анализ этих эффектов возможен только в рамках конкретной модели удержания кварков в нуклонах, поскольку для КХД при энергиях  $\sim 1 \text{ МэВ}$  обмен импульсом между электроном и кварками является настолько мягким процессом, что кварки уже нельзя рассматривать как квазисвободные (это не ГНР).

Следует также отметить, что эффект от швингеровского взаимодействия в области больших  $Z$  будет заведомо большим, чем от сверхтонкого расщепления, которое описывается таким же оператором Дирака–Паули с заменой  $\Delta g_{\text{free}}$  на  $g$ -фактор ядра. Действительно, если учесть величину  $\Delta g_{\text{free}}$  и ядерного магнетона, то для малых  $Z \sim 1$ –10 сверхтонкое взаимодействие и  $\Delta U_{\text{АММ}}$  имеют сравнимую величину, но поскольку магнитные

моменты ядер и при больших  $Z$  остаются порядка нескольких магнетонов, а  $\Delta U_{\text{АММ}}$  приобретает множитель  $Z$ , то вклад от последнего при больших  $Z$  оказывается как минимум на 1–2 порядка больше.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, для сверхтяжелых ядер с  $Z \sim 170$  сдвиг уровней у порога отрицательного континуума, обусловленный  $\Delta g_{\text{free}}$ , превышает все известные оценки радиационных эффектов от поляризации вакуума и собственной энергии электрона [5, 45] и оказывается как минимум одного порядка с эффектами экранировки заряда ядра заполненными оболочками [41]. При этом свойства швингеровского взаимодействия (6) оказываются настолько нетривиальны, что нельзя исключать, что более продвинутый анализ многоцентрового уравнения Дирака с соответствующими членами Дирака–Паули приведет к еще большему радиационному вкладу в смещение нижних уровней относительно порога отрицательного континуума. Об этом свидетельствует фактор  $Z^5$  для сдвига уровней  $1s_{1/2}$  и  $2p_{1/2}$  (31), (34) в простейшем варианте учета одного точечного источника швингеровского взаимодействия на фоне однородного кулоновского распределения заряда по объему ядра при  $Z = 170$ .

Следует также отметить, что по сравнению с другими радиационными эффектами швингеровское взаимодействие (6) занимает выделенное положение, поскольку описывается оператором Дирака–Паули, который сохраняет все основные свойства картины Фарри: самосопряженность, лоренц-ковариантность и дискретные симметрии дираковского гамильтониана, уравнение непрерывности и тем самым возможность вероятностной интерпретации одночастичной ВФ, поэтому полученные таким образом результаты могут быть непосредственно связаны с наблюдаемыми характеристиками электронного состояния, что и было использовано в данной работе. Более нетривиальные КЭД-эффекты, такие как рассеяние света на свете, уже описываются нелокальными операторами, поэтому их анализ в области  $Z > 137$  представляет существенно более сложную задачу, но рассмотренный пример швингеровского взаимодействия показывает, что, видимо, именно здесь следует искать причину отсутствия надежного сигнала [4, 5, 42–44] от рождения пар сверхсильным кулоновским полем.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mondejar J., Piclum J. H., Czarnecki A. // Phys. Rev. A. 2010. V. 81. P. 062511.
2. Vogel M. et al. // Eur. Phys. J. Special Topics. 2008. V. 163. P. 113.
3. Hanneke D., Fogwell S., Gabrielse G. // Phys. Rev. Lett. 2008. V. 100. P. 120801.
4. Ruffini R., Vereshchagin G., Xue S.-S. // Phys. Rep. 2010. V. 487. P. 1–140; arXiv:0910.0974v3.
5. Greiner W., Schramm S. // Am. J. Phys. 2008. V. 76. P. 509.
6. Czarnecki A. et al. arXiv:1007.1176v1[hep-ph].
7. Karshenboim S. G. // Phys. Lett. A. 2000. V. 266. P. 380.
8. Beier T. et al. // Phys. Rev. A. 2001. V. 62. P. 032510.
9. Shabaev V. M., Yerokhin V. A. // Phys. Rev. Lett. 2002. V. 88. P. 091801.
10. Odom B. et al. // Phys. Rev. Lett. 2006. V. 97. P. 030801.

11. Kinoshita T. Lepton  $g - 2$  from 1947 to Present. Lepton Dipole Moments // Adv. Ser. Dir. HEP / Ed. by B. L. Roberts and W. J. Marciano. Singapore: World Sci., 2010. V. 20. P. 69.
12. Laporta S., Remiddi E. Analytic QED Calculations of the Anomalous Magnetic Moment of the Electron. Lepton Dipole Moments // Ibid. P. 119.
13. Hanneke D., Fogwell Hoogerheide S., Gabrielse G. arXiv:1009.4831v1[physics.atom-ph].
14. Kinoshita T., Nio M. // Phys. Rev. D. 2006. V. 73. P. 013003.
15. Beier T. // Phys. Rep. 2000. V. 339. P. 79.
16. Mohr P. J., Taylor B. N. // Rev. Mod. Phys. 2000. V. 72. P. 351; 2005. V. 77. P. 1.
17. Pachuki K. et al. // Phys. Rev. A. 2005. V. 72. P. 022108.
18. Breit G. // Nature. 1928. V. 122. P. 649.
19. Faustov R. N. // Phys. Lett. B. 1970. P. 422; Nuovo Cim. A. 1970. V. 69. P. 37.
20. Grotch H. // Phys. Rev. A. 1970. V. 2. P. 1605.
21. Shabaev V. M. // Phys. Rev. A. 2001. V. 64. P. 052104.
22. Martynenko A. P., Faustov R. N. // ЖЭТФ. 2001. V. 93. P. 471.
23. Grotch H. // Phys. Rev. Lett. 1970. V. 24. P. 39.
24. Czarnecki A., Melnikov K., Yelkhovsky A. // Phys. Rev. A. 2001. V. 63. P. 012509.
25. Lee R. N. et al. // Phys. Rev. A. 2005. V. 71. P. 052501.
26. Jentschura U. D. et al. arXiv:0510049v2[physics.atom-ph].
27. Jentschura U. D. // Phys. Rev. A. 2009. V. 79. P. 044501.
28. Каршенбойм С. Г., Иванов В. Г., Шабав В. М. // ЖЭТФ. 2001. Т. 120. С. 546.
29. Shabaev V. M. et al. arXiv:0510083v1[physics.atom-ph].
30. Schwinger J. // Phys. Rev. 1948. V. 73. P. 416.
31. Бьёркен Дж. Д., Дрелл С. Л. Релятивистская квантовая теория. М.: Наука, 1978.
32. Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1989.
33. Varut A. O., Kraus J. // Phys. Lett. B. 1975. V. 59. P. 175; J. Math. Phys. 1976. V. 17. P. 506.
34. Воронов Б. Л., Гитман Д. Т., Тютин И. В. // ТМФ. 2007. Т. 150. С. 41.
35. Свешников К., Хомовский Д. // Вестн. МГУ. Физика. Астрономия. 2012. № 5. С. 22–28.
36. Герштейн С. С., Зельдович Я. Б. // ЖЭТФ. 1969. Т. 57. С. 654.
37. Pieper W., Greiner W. // Z. Phys. 1969. V. 218. P. 327.
38. Зельдович Я. Б., Попов В. С. // УФН. 1971. Т. 105. С. 403.
39. Гриб А. А., Мамаев С. Г., Мостепаненко В. М. Вакуумные квантовые эффекты в сильных полях. М.: Энергоатомиздат, 1988.
40. Greiner W., Mueller B., Rafelski J. Quantum Electrodynamics of Strong Fields. Berlin: Springer, 1985.
41. Reinhardt J., Greiner W. Quantum Electrodynamics. Berlin: Springer Verlag, 2003.
42. Greiner W., Reinhardt J. Quantum Aspects of Beam Physics. World Sci., 1999. P. 438–463.
43. Krekora P. et al. // Phys. Rev. Lett. 2005. V. 95(7). P. 070403.
44. Zagrebaev V. I., Greiner W. // J. Phys. G (NP). 2007. V. 34. P. 1.
45. Soff G. et al. // Phys. Rev. Lett. 1982. V. 48. P. 1465.