

## СРАВНЕНИЕ МЕТОДОВ ФРАКТАЛЬНОГО АНАЛИЗА ПРИ ИЗУЧЕНИИ ФРАКТАЛОВ С НЕЗАВИСИМЫМ ДЕЛЕНИЕМ ЧАСТЕЙ

*Т. Г. Дедович, М. В. Токарев*

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Обсуждается понятие размерности как количественной характеристики геометрии пространства. Предполагается, что адроны, рожденные во взаимодействиях частиц и ядер, можно рассматривать как наборы точек в трехмерном фазовом пространстве  $(p_T, \eta, \phi)$ , обладающие свойствами фрактала. Размерность Хаусдорфа–Безиковича  $D_F$  рассматривается как наиболее естественная характеристика для определения размерности фрактала. Приведено сравнение различных методов — подсчета клеток (BC), P-адических покрытий (PaC), систем уравнений P-адических покрытий (SePaC), определения фрактальной размерности. Представлена процедура выбора оптимальных значений параметров рассматриваемых методов. Показано, что эти параметры позволяют восстановить фрактальную размерность  $D_F$ , количества уровней  $N_{lev}$  и структуру фрактала с максимальной эффективностью. Отмечаются особенности PaC- и SePaC-методов при анализе фракталов с независимым делением.

Dimension as a quantitative characteristic of a space geometry is discussed. Hadrons produced in collisions of particles and nuclei are assumed to be sample of points in 3D-space  $(p_T, \eta, \phi)$  having properties of a fractal. Hausdorff–Besicovitch dimension is regarded as the most natural quantity to determine the fractal dimension  $D_F$ . Results of comparison of the various methods as Box Counting (BC), P-adic Coverage (PaC), System of Equations of P-adic Coverage (SePaC), to determine a fractal dimension are presented. The procedure to determine the optimal values of the parameters of these methods is described. It allows us to find the fractal dimension, number of fractal levels, and fractal structure with maximal efficiency. Features of PaC and SePaC methods for analysis of fractals with independent branching are noted.

PACS: M89.75.Da; M89.75.Fb

### ВВЕДЕНИЕ

Во все периоды развития физики представление о пространстве и времени имело фундаментальное значение. В течение тысячелетий пространство и время рассматривались раздельно и наделялись евклидовой метрикой. В XIX в. эти представления кардинально изменились. В специальной теории относительности пространство и время едины. Они образуют пространство Минковского, характеризуемое псевдоевклидовой метрикой. В общей теории относительности четырехмерное пространство наделяется псевдоримановой метрикой.

Одной из количественных характеристик пространства-времени является размерность. Ее определение в математике и физике имеет принципиальные различия. В математике существует несколько формальных равноправных определений размерности [1]. Физическое определение накладывает дополнительные ограничения, отражающие связь размерности с измеряемыми величинами, фундаментальными физическими структурами, законами сохранения, метрической структурой пространства-времени. В 1917 г. в «Трудах Амстердамской академии» была опубликована статья П. Эренфеста «Каким образом в фундаментальных законах физики проявляется то, что пространство имеет три измерения». Автор пришел к выводу, что размерность не является априорным числом, а представляет собой физическое понятие, обладающее определенным эмпирическим статусом. Развитие квантовой физики привело к сомнению о непрерывной структуре пространства-времени, появлению нового представления о его дискретности и зависимости размерности пространства от масштаба. В квантовой теории поля решение проблемы расходимостей привело к введению метода размерной регуляризации, использующего нецелое значение размерности объемлющего пространства.

Один из математических методов [1] нахождения нецелочисленной размерности дискретного множества основан на определении меры Хаусдорфа. Последняя определяется следующим выражением:

$$M_\delta = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \inf_K \sum_{i=1}^N l_i^\delta. \quad (1)$$

Здесь оператор  $\inf$  означает минимальное значение по всем возможным покрытиям  $K$  множества. Диаметры шаров покрытия  $l_i$  не превышают значение  $\epsilon$ . Размерность Хаусдорфа–Безиковича  $D_F$  определяется как значение  $\delta$ , при котором мера  $M_\delta$  имеет конечное значение [2]. Величина  $\epsilon^{-1}$  называется разрешением. Она характеризует различаемую структурность множества на масштабах не меньше  $\epsilon$ . Объекты, для которых величина  $D_F$  принимает нецелочисленное значение, в отличие от топологической размерности  $D_T$ , называются фракталами. Отличительной чертой фракталов является их самоподобие на разных масштабах.

В физике высоких энергий предполагается, что адроны, рожденные во взаимодействиях частиц и ядер, можно представить как наборы точек в трехмерном фазовом пространстве  $(p_T, \eta, \phi)$ . Здесь  $p_T$  — поперечный импульс,  $\eta$  — псевдобыстрота и  $\phi$  — азимутальный угол частицы. Распределение точек зависит от механизма образования частиц, не является однородным и может рассматриваться как фрактал. Поэтому фрактальная размерность характеризует динамические свойства процесса образования частиц.

Для определения фрактальных размерностей используется несколько базовых методов: подсчета клеток (BC) [3–5], регуляризации [6],  $R/S$  нормированного размаха [7], максимумов модулей вейвлет-преобразования [8]. В работах [9, 10] представлены новые методы фрактального анализа: метод Р-адических покрытий (PaC) и метод систем уравнений Р-адических покрытий (SePaC). Они позволяют определить фрактальную размерность  $D_F$ , количество уровней  $N_{lev}$  и структуру фракталов.

В данной работе проведен сравнительный анализ фракталов с независимым делением частей BC-, PaC- и SePaC-методами. В разд. 1 представлен сценарий партонного ливня с последующей адронизацией, приводящий к образованию фрактала, и сформулированы различные гипотезы формирования фракталов. В разд. 2 дано описание BC-, PaC- и SePaC-методов. Процедура выбора оптимальных значений параметров методов приведена

в разд.3. Показано, что выбранные параметры позволяют восстановить фрактальную размерность, количества уровней и структуру фрактала с максимальной эффективностью. Результаты сравнительного анализа, полученные рассмотренными методами, приведены в разд.4. Основные выводы сформулированы в заключении.

### 1. ПАРТОННЫЕ ЛИВНИ И ПРОЦЕСС АДРОНИЗАЦИИ КАК ФРАКТАЛЫ

Для анализа взаимодействия адронов и ядер широко используются различные монте-карло-генераторы событий (PYTHIA и JETSET [11], HERWIG [12], SHERPA [13], HIJING [14], ARIADNE [15], UrQMD [16]). Описание взаимодействия адронов в рамках партонной модели включает механизм развития партонного ливня в начальном и конечном состояниях. Опишем кратко некоторые характерные особенности этого процесса. Предполагается, что на каждом шаге развития ливня партон  $a$  излучает два дочерних  $b$  и  $c$ . Кинематика процесса излучения описывается величиной доли энергии  $z$ , передаваемой дочерним партонам:  $E_b = zE_a$ ,  $E_c = (1 - z)E_a$ . Кинематический диапазон изменения значений величины  $z$  ( $z_- < z < z_+$ ) определяет диапазон угла излучения партона  $\theta$  (угла раскрытия)  $\theta_- < \theta < \theta_+$ . При этом углы раскрытия дочерних партонов упорядочены:  $\theta_b, \theta_c < \theta_a$ .

Далее представлен сценарий развития партонного ливня и процесса адронизации, приводящий к фракталу с независимым делением частей. На первом шаге партон  $a$ , выходящий из жесткого взаимодействия и имеющий значение псевдобыстроты  $\eta = 0$  из области возможных значений  $|\eta| \leq 5$ , излучает два партона  $b$  и  $c$ . Диапазон возможных углов излучения ( $\theta_+, \theta_-$ ) определяет допустимые части псевдобыстротного пространства ( $\eta = -0,5 \ln(\text{tg}(\theta/2))$ ) для рожденных партонов. На рис.1,а приведены первые три уровня фрактала. Пространство, допустимое для родительского партона, в рассматриваемом примере условно делится на три части. Для каждого партона допустимый диапазон состоит из одной части (первой и третьей соответственно). На каждом последующем шаге развития ливня процесс излучения повторяется. Таким образом, каждая из допустимых частей быстротного пространства в процессе дальнейшего деления сохраняет свою структуру и рассматривается как независимый объект. Предполагается, что про-

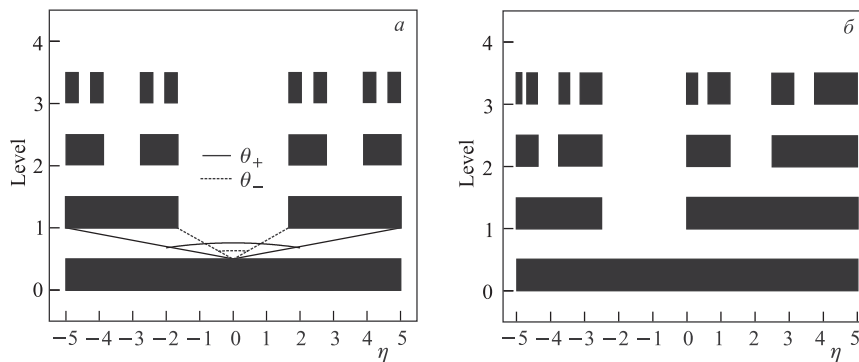


Рис. 1. Зависимость допустимых диапазонов  $\eta$ -пространства от уровня фрактала. Фракталы с независимым (а) и зависимым (б) делением частей

цесс адронизации также сохраняет структуру партонного ливня. Процесс формирования такого фрактала будем называть регулярным с независимым делением.

Введем термин  $P$ -адическое формирование фрактала по аналогии с  $P$ -адическими числами.  $P$ -адическое положительное число  $x$  представимо в виде ряда по степеням любого простого числа  $P$ : ( $x = a_0P^0 + a_1P^1 + a_2P^2 + a_3P^3 + \dots$ ).  $P$ -адическое формирование фрактала означает, что в процессе его формирования пространство делится на  $M$  частей, количество которых на разных масштабах изменяется как степень числа  $P$ :  $M = P^n$ , где  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Для фрактала, показанного на рис. 1,  $a$ , основание  $P = 3$ .

Фрактальная размерность определяется как величина  $D_F$ , при которой предел (1) имеет конечное значение, и является решением уравнения

$$\sum_{i=1}^{N_r^1} d_i^{D_F} = 1. \quad (2)$$

Здесь  $N_r^1$  — количество пробников (допустимых диапазонов) первого уровня;  $d_i$  — размеры пробников, покрывающих фрактал (длины допустимых диапазонов) на первом уровне. Фрактальная размерность рассматриваемого фрактала (рис. 1,  $a$ ) является решением уравнения

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{D_F} + \left(\frac{1}{3}\right)^{D_F} = 1 \quad (3)$$

и равна  $D_F = \ln 2 / \ln 3 \approx 0,6309 \dots$

Клеточная размерность  $D_b$  фрактала определяется согласно формуле

$$D_b = - \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N(\delta)}{\ln \delta}, \quad (4)$$

где  $N(\delta)$  — количество пробников размера  $\delta$ , покрывающих объект. Отметим, что для данного фрактала клеточная размерность (4) совпадает с фрактальной (1).

Существуют фракталы, для которых эти размерности различны. В качестве примера на рис. 1,  $b$  показан фрактал с зависимым делением частей, для которого  $D_F \neq D_b$ . Детальное рассмотрение различных типов фракталов приведено в статье [10].

Таким образом, предполагается, что развитие партонного ливня с последующей адронизацией может привести к образованию фракталов. Они подразделяются на классы, соответствующие процессам их формирования: фракталы с независимым и зависимым делением.

## 2. ВС-, PaC- и SePaC-МЕТОДЫ ФРАКТАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Метод подсчета клеток (ВС) [4] является одним из широко используемых для определения фрактальной размерности. В работах [9] и [10] предложены методы  $P$ -адических покрытий (PaC) и систем уравнений  $P$ -адических покрытий (SePaC) соответственно. В данной работе проводится сравнение этих методов: определяются эффективности восстановления фрактальной размерности  $D_F$ , количества уровней  $N_{lev}$  и основания  $P$  в  $P$ -адическом формировании фрактала. В анализе используется набор (774) тестовых фракталов, полученных независимым делением. Их количество определяется числом всех возможных разновидностей фракталов по основанию  $P = 3-8$ .

**2.1. Методы подсчета клеток и Р-адических покрытий.** ВС- и РаС-методы основаны на определении клеточной размерности, поэтому далее приведены их общие особенности и различия. Методы включают следующие шаги:

1. Считывание данных ( $\{X = \eta, \dots\}$ , например, псевдобыстрот частиц в событии).
2. Построение набора Р-адических покрытий. Каждое покрытие представляет собой распределение величины  $X$ . Количество бинов  $\{M_i\}$  в распределениях набора изменяется по степенному закону ( $M_i = (P)^i, i = 0, 1, 2, \dots$ ). В ВС-методе, как правило, используется одно Р-адическое покрытие с  $P = 2$ , а в РаС-методе — различные Р-адические покрытия,  $P = 2, \dots, P_{\max}$ .
3. Подсчет количества ненулевых бинов  $N(\text{lev}, P)$ . Условие насыщения  $N(\text{lev}, P) = N(\text{lev} + 1, P)$  определяет количество уровней  $N_{\text{lev}} = \text{lev}$ .
4. Вычисление параметра  $D_F$  степенной функции  $N \sim M^{D_F}$  и соответствующего  $\chi^2$  линейной аппроксимации этой функции в дважды логарифмическом масштабе для каждого Р-адического покрытия.
5. Проверка условия точности  $\chi^2 < \chi_{\text{lim}}^2$ , определяющего, является ли набор рассматриваемых частиц фракталом, при котором фиксируется основание  $P$  и размерность  $D_F(P)$ .

Отметим, что ВС-метод имеет один параметр  $\chi_{\text{lim}}^2$ , а РаС — два параметра: значение основания максимального Р-адического покрытия  $P_{\max}$  и  $\chi_{\text{lim}}^2$ .

**2.2. Метод систем уравнений Р-адических покрытий (SePaC).** SePaC-метод включает следующие шаги:

1. Считывание данных ( $\{X = \eta, \dots\}$ , например, псевдобыстрот частиц в событии).
2. Построение набора Р-адических покрытий:  $P = 3, \dots, P_{\max}$ .
3. Подсчет количества ненулевых бинов  $N(\text{lev}, P)$ . Условие насыщения  $N(\text{lev}, P) = N(\text{lev} + 1, P)$  определяет количество уровней  $N_{\text{lev}} = \text{lev}$ .
4. Анализ систем уравнений (5) для определения гипотезы зависимого/независимого деления, включающий:
  - а) построение системы уравнений, описывающих каждый уровень:

$$\sum_{i=1}^{N_{d_{\text{lev}}}} (d_{i \text{ lev}})^{D_F^{\text{lev}}} = 1, \quad (5)$$

$N_{d_{\text{lev}}}$  и  $d_{i \text{ lev}}$  — количество и длина допустимых диапазонов для каждого уровня;

б) вычисление значений фрактальной размерности  $D_F^{\text{lev}}$  для каждого уровня методом деления отрезка пополам;

в) определение среднего значения  $\langle D_F^{\text{lev}} \rangle$  и отклонения от среднего  $\Delta D_F^{\text{lev}}$ :

$$\langle D_F^{\text{lev}} \rangle = \sum_{\text{lev}=1}^{N_{\text{lev}}} \frac{D_F^{\text{lev}}}{N_{\text{lev}}}, \quad \Delta D_F^{\text{lev}} = |\langle D_F^{\text{lev}} \rangle - D_F^{\text{lev}}|; \quad (6)$$

г) проверку условия точности  $\Delta D_F^{\text{lev}} < \text{Dev}$ , которое определяет, является ли набор частиц фракталом (фиксируется основание  $P$  и размерность  $D_F = \langle D_F^{\text{lev}} \rangle$ ).

Более детальное описание SePaC-метода приведено в [10]. Там же представлены примеры реконструкции фракталов этим методом.

Таким образом, метод систем уравнений  $P$ -адических покрытий (SePaC) основан на определении фрактальной размерности  $D_F$ , рассматривает различные  $P$ -адические покрытия с основанием  $P = 3, \dots, P_{\max}$  и имеет два параметра: значение основания максимального  $P$ -адического покрытия  $P_{\max}$  и предельное отклонение от среднего  $\text{Dev}$ .

### 3. ПОИСК ОПТИМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ $\chi_{\text{lim}}^2, P_{\max}, \text{Dev}$ ПАРАМЕТРОВ ВС-, PaC- и SePaC-МЕТОДОВ

Каждый из методов ВС, PaC и SePaC имеет свои параметры. Значения этих параметров влияют на эффективности восстановления фрактальной размерности  $D_F$ , количества уровней  $N_{\text{lev}}$  и основания  $P$ . Эффективность каждого метода определяется выражением

$$\text{Ef}_V = 1 - |\text{Er}_V|, \quad \text{если } |\text{Er}_V| \leq 1, \quad \text{Ef}_V = 0, \quad \text{если } |\text{Er}_V| > 1. \quad (7)$$

Здесь  $\text{Er}_V$  — ошибка восстановления величины  $V = D_F, N_{\text{lev}}, P$ :

$$\text{Er}_V = \frac{V - V_{\text{test}}}{V_{\text{test}}}. \quad (8)$$

Полная эффективность выражается через эффективности восстановления фрактальной размерности, количества уровней и основания следующей формулой:

$$\text{Ef}_{\text{tot}} = \text{Ef}_{D_F} \cdot \text{Ef}_{N_{\text{lev}}} \cdot \text{Ef}_P. \quad (9)$$

В данной работе разработана процедура поиска оптимальных значений параметров  $\chi_{\text{lim}}^2, P_{\max}, \text{Dev}$  для ВС-, PaC- и SePaC-методов, позволяющих определить фрактальную размерность, количество уровней и основание с максимальной эффективностью.

**3.1. Процедура поиска параметра  $P_{\max}$  для PaC- и SePaC-методов.** Значение параметра  $P_{\max}$  влияет на количество рассматриваемых  $P$ -адических покрытий. От выбора этой величины существенным образом зависит время работы алгоритма, поэтому значение  $P_{\max}$  следует определить в первую очередь. Процедура поиска значения максимального  $P$ -адического покрытия  $P_{\max}$  для параметров PaC- и SePaC-методов включает следующие шаги:

1. Построение распределений  $D_F, N_{\text{lev}}$  и  $P$  для различных значений  $P_{\max}$  и всех значений параметра  $\chi_{\text{lim}}^2$  для PaC-метода и параметра  $\text{Dev}$  для SePaC-метода.

2. Вычисление разности распределений  $\Delta D_V$  рассматриваемых величин  $V$  для различных значений  $P_{\max}$ :

$$\Delta D_V = \sum_{i=1}^{N_{\text{bin}}} |a_i - b_i|, \quad (10)$$

$N_{\text{bin}}$  — количество бинов в распределениях;  $a_i$  и  $b_i$  — содержание бинов для распределений, имеющих соседние значения  $P_{\max} = P_j$  и  $P_{j+1}$ .

3. Вычисление функции  $\Delta D_{\text{ext}}$  для различных значений  $P_{\max}$ :

$$\Delta D_{\text{ext}} = \Delta D_{D_F} + \Delta D_{N_{\text{lev}}} + \Delta D_P. \quad (11)$$

4. Параметр  $P_{\max}$  определяется как минимальная величина, соответствующая началу плато в зависимости функции  $\Delta D_{\text{ext}}$  от величины  $P_{\max}$ .

Далее приведем результаты применения описанной выше процедуры. Напомним, что в качестве тестовых фракталов с независимым делением частей были использованы все возможные разновидности фракталов с P-адическим формированием по основанию  $P = 3-8$ . Выбор оптимального значения  $P_{\max}$  проводился в диапазоне значений  $P_{\max} = 3-23$ . Для PaC-метода значение  $\chi_{\lim}^2$  изменялось в диапазоне от  $10^{-13}$  до 2,5. Для SePaC-метода значение Dev изменялось в диапазоне от  $10^{-6}$  до 0,9.

На рис. 2 и 3, а представлены результаты анализа фракталов с независимым делением PaC-методом. Нормированное распределение  $1/N \cdot dN/dN_{\text{lev}}$  по количеству уровней  $N_{\text{lev}}$  для всех значений  $\chi_{\lim}^2$  из диапазона  $10^{-13}-2,5$  при  $P_{\max} = 8$  (линия) и  $P_{\max} = 7$  (граница темной области) показано на рис. 2, а. Из рисунка видно, что эти распределения различны. Разность распределений  $\Delta D_{N_{\text{lev}}}$  для соседних значений  $P_{\max} = P_j$  и  $P_{j+1}$  представлена на рис. 2, б. Для распределений, показанных на рис. 2, а, разность  $\Delta D_{N_{\text{lev}}}$  соответствует значению при  $P_{\max} = 7$  на рис. 2, б. Зависимость  $\Delta D_{N_{\text{lev}}}$  от параметра  $P_{\max}$  имеет плато при  $P_{\max} = 8-22$ . Значение  $\Delta D_{N_{\text{lev}}} = 0$  на плато указывает на то, что форма распределений по количеству уровней не изменяется. Начало плато ( $P_{\max} = 8$ )

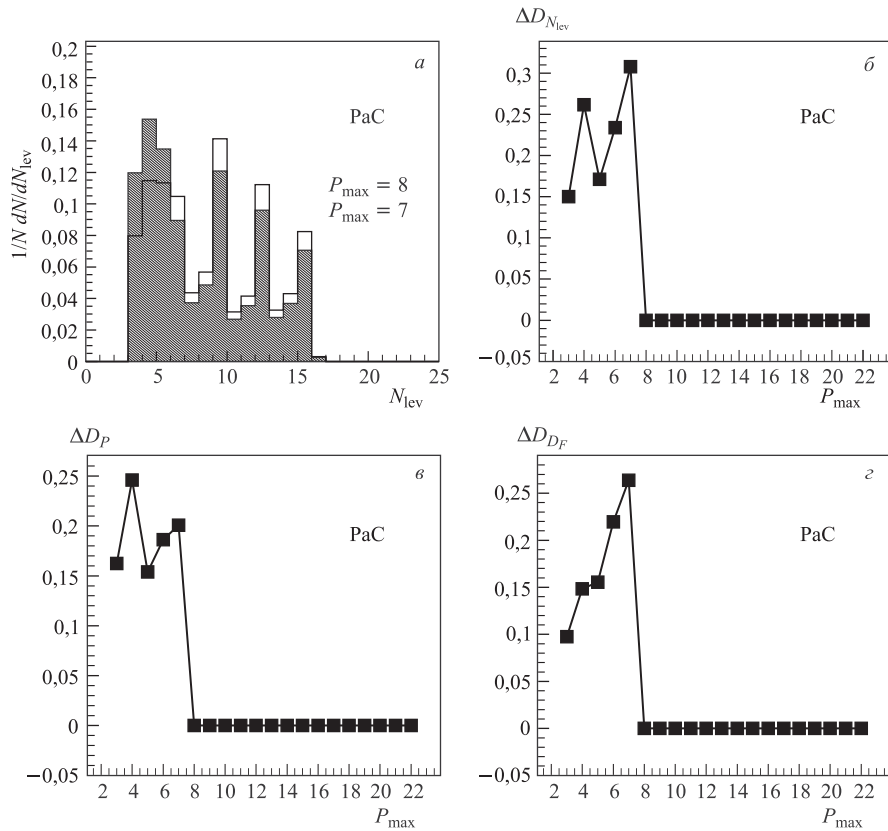


Рис. 2. а) Нормированное распределение фракталов по количеству уровней  $N_{\text{lev}}$  при  $P_{\max} = 8$  (линия), при  $P_{\max} = 7$  (граница темной области). Разность распределений по: б) количеству уровней  $\Delta D_{N_{\text{lev}}}$ ; в) основанию  $\Delta D_P$ ; г) фрактальной размерности  $\Delta D_{D_F}$

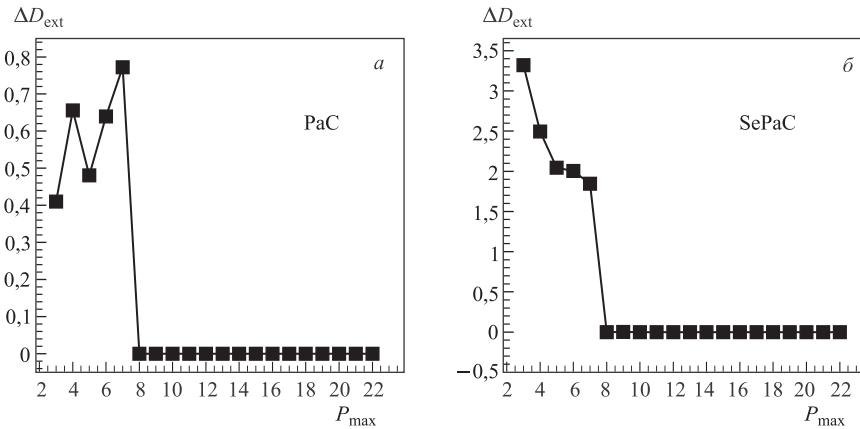


Рис. 3. Зависимость функции  $\Delta D_{\text{ext}}$  от параметра  $P_{\text{max}}$  для PaC (a) и SePaC (б) методов

соответствует максимальному значению основания P-адического покрытия рассматриваемых фракталов. Разности распределений по основанию  $\Delta D_P$  и фрактальной размерности  $\Delta D_{D_F}$  (см. рис. 2, в, г) также имеют плато, начало которого соответствует  $P_{\text{max}} = 8$ . Зависимость функции  $\Delta D_{\text{ext}}$  имеет аналогичное поведение (см. рис. 3, а).

Анализ SePaC-методом фракталов с независимым делением показал, что зависимость  $\Delta D_{\text{ext}}$  от  $P_{\text{max}}$  (см. рис. 3, б) имеет сходное поведение.

Отметим, что для фракталов с независимым делением начало плато в зависимости  $\Delta D_{\text{ext}}(P_{\text{max}})$  указывает на максимальное значение основания P-адического покрытия. На основании результатов проведенного анализа в процедуру поиска оптимального значения величины параметра  $P_{\text{max}}$  для PaC- и SePaC-методов включен п. 4.

Таким образом, здесь представлена и обоснована процедура поиска оптимального значения параметра  $P_{\text{max}}$  для PaC- и SePaC-методов.

**3.2. Процедура поиска параметра  $\chi_{\text{lim}}^2$  для ВС- и PaC-методов.** Параметр  $\chi_{\text{lim}}^2$  определяет, является ли набор данных фракталом. От значения этого параметра существенным образом зависит значение эффективностей восстановления различных величин ( $D_F$ ,  $N_{\text{lev}}$  и  $P$ ), а также возможность отличить случайный набор точек от фракталов. Процедура поиска параметра  $\chi_{\text{lim}}^2$  для ВС- и PaC-методов включает:

1. Построение распределений  $D_F$ ,  $N_{\text{lev}}$  и  $P$  для различных значений  $\chi_{\text{lim}}^2$  при фиксированном оптимальном значении параметра  $P_{\text{max}}$  для PaC-метода.

2. Вычисление разности распределений  $\Delta D_V$  для рассматриваемых величин  $D_F$ ,  $N_{\text{lev}}$ ,  $P$  при различных значениях  $\chi_{\text{lim}}^2$ .

3. Вычисление функции  $\Delta D_{\text{ext}}$  для различных значений  $\chi_{\text{lim}}^2$ .

4. Выбор оптимального значения параметра  $\chi_{\text{lim}}^2$ :

а) для ВС-метода значение  $\chi_{\text{lim}}^2$  определяется как минимальная величина, соответствующая началу второго плато в зависимости функции  $\Delta D_{\text{ext}}$  от величины  $\chi_{\text{lim}}^2$ ;

б) для PaC-метода величина  $\chi_{\text{lim}}^2$  может принимать произвольное значение на первом плато зависимости функции  $\Delta D_{\text{ext}}$  от величины  $\chi_{\text{lim}}^2$ .

Далее приведем обоснование выбора значений параметра  $\chi_{\text{lim}}^2$ , указанных в п. 4а для ВС- и 4б для PaC-метода. Для обоих методов значение  $\chi_{\text{lim}}^2$  изменялось в широком диапазоне от  $10^{-13}$  до 2,5. В табл. 1 показано соответствие между номером  $N_{\chi_{\text{lim}}^2}$  и значением  $\chi_{\text{lim}}^2$ .



Таблица 1. Соответствие номера  $N_{\chi_{lim}^2}$  и величины  $\chi_{lim}^2$

$N_{\chi_{lim}^2}$	$\chi_{lim}^2$	$N_{\chi_{lim}^2}$	$\chi_{lim}^2$	$N_{\chi_{lim}^2}$	$\chi_{lim}^2$	$N_{\chi_{lim}^2}$	$\chi_{lim}^2$
1	$10^{-13}$	13	0,02	25	0,5	37	1,7
2	$10^{-12}$	14	0,03	26	0,6	38	1,8
3	$10^{-11}$	15	0,04	27	0,7	39	1,9
4	$10^{-10}$	16	0,05	28	0,8	40	2,0
5	$10^{-9}$	17	0,06	29	0,9	41	2,1
6	$10^{-8}$	18	0,07	30	1,0	42	2,2
7	$10^{-7}$	19	0,08	31	1,1	43	2,3
8	$10^{-6}$	20	0,09	32	1,2	44	2,4
9	$10^{-5}$	21	0,1	33	1,3	45	2,5
10	$10^{-4}$	22	0,2	34	1,4		
11	$10^{-3}$	23	0,3	35	1,5		
12	0,01	24	0,4	36	1,6		

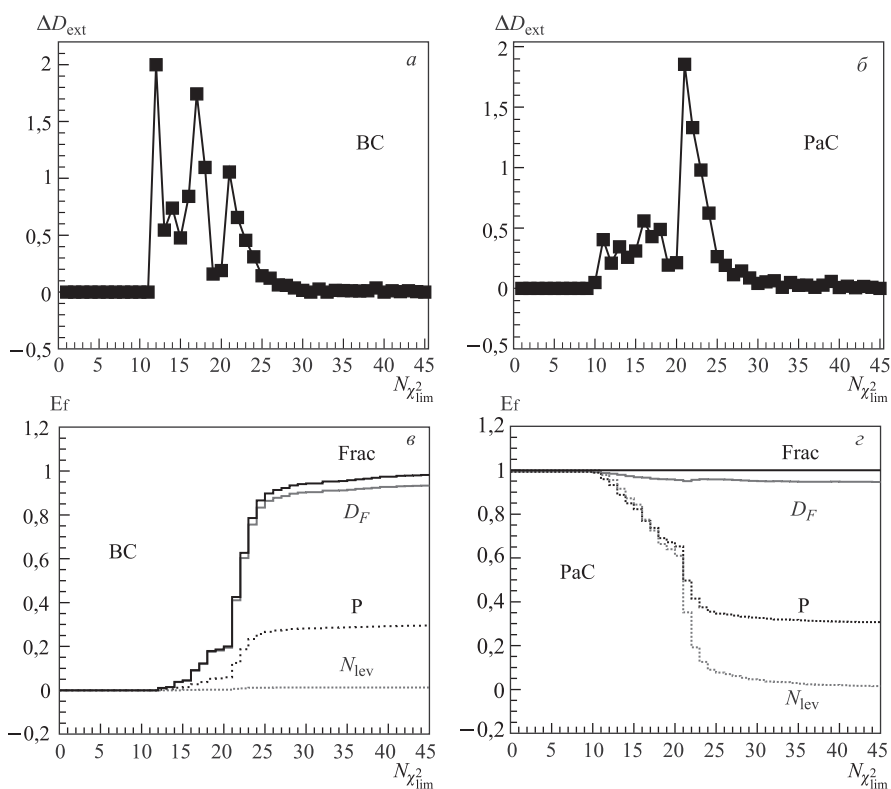


Рис. 4. Зависимость функции  $\Delta D_{ext}$  (а, б) и эффективностей Ef (в, г) от  $N_{\chi_{lim}^2}$  восстановления фракталов с независимым делением частей BC (а, в) и PaC (б, г) методов

На рис. 4, а и б приведена зависимость функции  $\Delta D_{ext}$  от номера  $N_{\chi_{lim}^2}$  для BC- и PaC-методов соответственно. Мы проанализировали зависимость эффективности восстановления фрактала  $Ef_{frac}$ , фрактальной размерности  $Ef_{D_F}$ , количества уровней  $Ef_{N_{lev}}$  и основания P-адического покрытия  $Ef_P$  от номера  $N_{\chi_{lim}^2}$  для методов BC (рис. 4, в) и PaC

(рис. 4, з). Эффективность восстановления фрактала определяется выражением

$$Ef_{\text{frac}} = \frac{N_{\text{frac}}}{N_{\text{test}}}, \quad (12)$$

где  $N_{\text{test}}$  — количество рассматриваемых тестовых фракталов;  $N_{\text{frac}}$  — количество восстановленных фракталов. Отметим, что эффективности восстановления фрактальной размерности  $Ef_{D_F}$ , количества уровней  $Ef_{N_{\text{lev}}}$  и основания  $Ef_P$  могут быть найдены только для тестовых фракталов.

Рассмотрим результаты анализа фракталов, полученные ВС-методом. На рис. 4, а первое плато функции  $\Delta D_{\text{ext}}$  соответствует нулевому значению доли фракталов в наборе событий  $Ef_{\text{frac}}$ , показанному на рис. 4, в. Второе плато  $\Delta D_{\text{ext}}$  соответствует плато функции  $Ef_{\text{frac}}$ , принимающей максимальное значение. Поэтому  $\chi_{\text{lim}}^2$  определяется как минимальное значение этой величины на втором плато зависимости функции  $\Delta D_{\text{ext}}$  от  $\chi_{\text{lim}}^2$ . Выбор  $\chi_{\text{lim}}^2$  также соответствует максимальным значениям эффективности восстановления фрактальной размерности  $Ef_{D_F}$ , количества уровней  $Ef_{N_{\text{lev}}}$  и основания  $P$  (см. рис. 4, в).

Далее приведем результаты анализа фракталов, полученные PaC-методом. Найдено, что доля фракталов в наборе событий при любых значениях  $\chi_{\text{lim}}^2$  равна 1 (рис. 4, з). Установлено, что изменение функции  $\Delta D_{\text{ext}}$  (рис. 4, б) вызвано изменением эффективностей восстановления величин  $Ef_{D_F}$ ,  $Ef_{N_{\text{lev}}}$  и  $Ef_P$ . Меньшее значение  $\chi_{\text{lim}}^2$  соответствует оптимальному Р-адическому покрытию для рассматриваемого фрактала. Поэтому величина  $\chi_{\text{lim}}^2$  может принимать произвольное значение на первом плато зависимости функции  $\Delta D_{\text{ext}}$  от  $\chi_{\text{lim}}^2$ . Выбор  $\chi_{\text{lim}}^2$  также соответствует максимальным значениям эффективности восстановления  $Ef_{D_F}$ ,  $Ef_{N_{\text{lev}}}$  и  $Ef_P$  (рис. 4, з).

Таким образом, представлена и обоснована процедура поиска оптимального значения параметра  $\chi_{\text{lim}}^2$  для ВС- и PaC-методов.

**3.3. Процедура поиска параметра Dev для SePaC-метода.** Параметр Dev определяет: является ли набор данных фракталом. Процедура поиска Dev для SePaC-метода включает:

1. Построение распределений  $D_F$ ,  $N_{\text{lev}}$  и  $P$  для различных значений Dev при фиксированном оптимальном значении параметра  $P_{\text{max}}$ .
2. Вычисление разности распределений  $\Delta D_V$  для рассматриваемых величин  $D_F$ ,  $N_{\text{lev}}$ ,  $P$  при различных значениях Dev.
3. Вычисление функции  $\Delta D_{\text{ext}}$  для различных значений Dev.
4. Значение Dev выбирается произвольно из диапазона  $10^{-6}$ –0,9.

Ниже мы обоснуем выбор параметра Dev согласно п. 4. В табл. 2 показано соответствие между номером  $N_{\text{Dev}}$  и значением Dev.

Таблица 2. Соответствие номера  $N_{\text{Dev}}$  и величины Dev

$N_{\text{Dev}}$	Dev	$N_{\text{Dev}}$	Dev	$N_{\text{Dev}}$	Dev	$N_{\text{Dev}}$	Dev
1	$10^{-6}$	7	$2 \cdot 10^{-3}$	13	0,05	19	0,2
2	$10^{-5}$	8	$5 \cdot 10^{-3}$	14	0,06	20	0,3
3	$10^{-4}$	9	0,01	15	0,07	21	0,4
4	$2 \cdot 10^{-4}$	10	0,02	16	0,08	22	0,5
5	$5 \cdot 10^{-4}$	11	0,03	17	0,09	23	0,6
6	$10^{-3}$	12	0,04	18	0,1	24	0,7

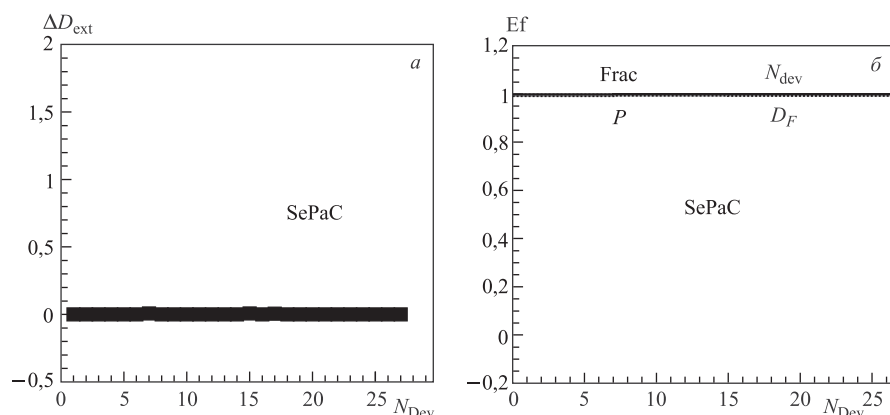


Рис. 5. Зависимости функции  $\Delta D_{ext}$  (а) и эффективностей (б) от параметра Dev для SePaC-метода

Из рис. 5, а видно, что значения функции  $\Delta D_{ext}$  равны 0. Установлено, что доля фракталов в наборе событий  $Ef_{frac}$  равна 1 при любых значениях Dev (рис. 5, б), а эффективности восстановления  $Ef_{D_F}$ ,  $Ef_{N_{lev}}$  и  $Ef_P$  не изменяются в указанном диапазоне. Таким образом, значение Dev может быть выбрано произвольно из диапазона  $10^{-6}$ –0,9.

Таким образом, в данном подразделе представлена и обоснована процедура поиска оптимального значения параметра Dev для SePaC-метода.

#### 4. СРАВНЕНИЕ ВС-, PaC- и SePaC-МЕТОДОВ

Представим результаты сравнения эффективностей и ошибок восстановления фрактальной размерности  $E_{D_F}$ , количества уровней  $E_{N_{lev}}$  и основания  $E_P$ , полученные при анализе фракталов с независимым делением ВС-, PaC- и SePaC-методами, использующими оптимальные наборы параметров.

На рис. 6 показаны нормированное (рис. а) и интегральное (рис. б) распределения ошибок восстановления фрактальной размерности  $E_{D_F}$  для ВС-метода. Установлено, что для большинства фракталов восстанавливаемая фрактальная размерность меньше тестовой (рис. 6, а). Считается, что фрактальная размерность определяется точно, если ошибка восстановления меньше 0,5%. Найдено, что размерность восстанавливается точно для 16% фракталов, для 70% фракталов ошибка  $E_{D_F}$  меньше 5%, а для 84% меньше 10% (рис. 6, б).

Как отмечено в подразд. 2.1, ВС-метод использует только одно покрытие. Поэтому основание  $P$  и количество уровней  $N_{lev}$  не может быть определено данным методом, а нормированное распределение ошибки  $E_P$  (рис. 6, в) характеризует только набор данных. Большинство фракталов в рассматриваемом наборе имеют основание  $P = 8$ , и поэтому максимум в распределении  $E_P$  соответствует  $E_P = (2 - 8)/8 = -0,75$ . Нормированное распределение ошибки восстановления количества уровней  $E_{N_{lev}}$  (рис. 6, г) также характеризует исследуемый набор данных. Для фрактала с основанием  $P = 8$ ,

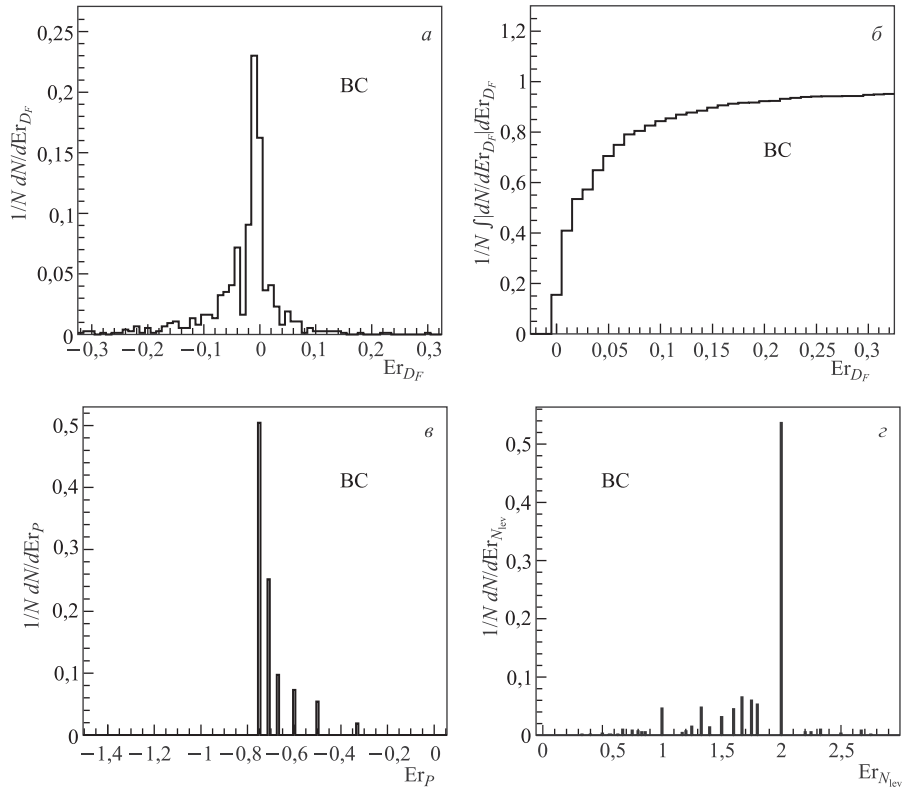


Рис. 6. Нормированные распределения ошибок восстановления фрактальной размерности  $Er_{D_F}$  (а), основания  $Er_P$  (в), количества уровней  $Er_{N_{lev}}$  (г) и интегральное для  $D_F$  (б), полученные ВС-методом

имеющего 512 точек ( $N_{lev} = 3$ ), покрытие с  $P = 2$  соответствует количеству уровней  $N_{lev} = 9$  и ошибке для большинства фракталов  $Er_{N_{lev}} = (9 - 3)/3 = 2$ .

Установлено, что восстановление характеристик фракталов PaC- и SePaC-методами при использовании оптимальных параметров привело к близким результатам. Нормированные распределения ошибок восстановления фрактальной размерности  $Er_{D_F}$ , основания  $Er_P$  и количества уровней  $Er_{N_{lev}}$  приведены на рис. 7, а–в для обоих методов. Как можно видеть из рисунков, фрактальная размерность, количество уровней и основание P-адического формирования фрактала определяются точно (т. е. ошибка восстановления меньше 0,5 %) для 93–100 % фракталов.

Результаты сравнительного анализа эффективностей и ошибок восстановления  $D_F$ ,  $P$ ,  $N_{lev}$  рассматриваемыми методами при оптимальных значениях параметров для фракталов с независимым делением частей приведены в табл. 3. Из таблицы видно, что ВС-метод восстанавливает фрактальную размерность с эффективностью  $Ef_{D_F} \simeq 90\%$ . Размерность восстанавливается точно (ошибка менее 0,5 %) для небольшого количества фракталов (16 %). Количество уровней  $N_{lev}$  и основание  $P$  этим методом не восстана-

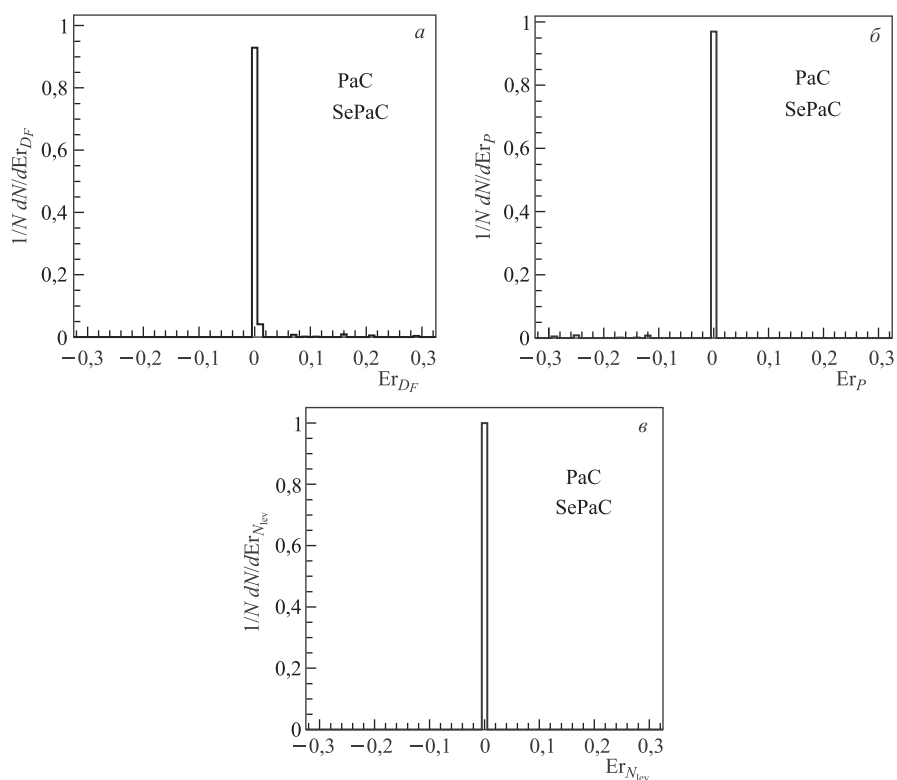


Рис. 7. Нормированные распределения ошибок восстановления фрактальной размерности  $Er_{D_F}$  (а), основания  $Er_P$  (б) и количества уровней  $Er_{N_{lev}}$  (в), полученные PaC- и SePaC-методами

Таблица 3. Эффективности и ошибки восстановления  $D_F$ ,  $N_{lev}$ ,  $P$  фракталов с независимым делением, полученные BC-, PaC- и SePaC-методами

Метод	$Ef_{D_F}$ , %	$Ef_{N_{lev}}$ , %	$Ef_P$ , %	$Ef_{tot}$ , %	% события		
					$Er_{D_F} < 0,5\%$	$Er_{N_{lev}} < 0,5\%$	$Er_P < 0,5\%$
BC	90,1	0	28,1	0,3	16	0	0
PaC	99,4	100	99,2	98,6	93	100	97
SePaC	99,4	100	99,2	98,6	93	100	97

вливаются. PaC- и SePaC-методы восстанавливают  $D_F$ ,  $N_{lev}$  и основание  $P$  с высокой эффективностью 99–100%. Доля событий, для которых ошибки  $Er_{D_F}$ ,  $Er_{N_{lev}}$ ,  $Er_P$  меньше 0,5%, составляет 93–100%.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проведен анализ восстановления характеристик фракталов (размерности  $D_F$ , количества уровней  $N_{lev}$  и основания  $P$ ) с независимым делением частей BC-, PaC- и SePaC-методами. Разработана процедура поиска оптимальных значений параметров  $\chi_{lim}^2$ ,  $P_{max}$ ,  $Dev$  этих методов. Показано, что PaC- и SePaC-методы имеют определенные преимущества в анализе фракталов с независимым делением частей перед BC-методом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горелик Г. Размерность пространства. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983.
2. Hausdorff F. // Math. Ann. 1918. V. 79. P. 157.
3. Mandelbrot B. The Fractal Geometry of Nature. San Francisco: Freeman, 1982.
4. Barabasi A., Stanley H. Fractal Concepts in Surface Growth. N. Y.: Cambridge Univ. Press, 1995.
5. Saa A. et al. // Nonlin. Processes Geophys. 2007. V. 14. P. 603.
6. Roueff F. et al. // Proc. of the Conf. «Fractals 98», Malta, Oct. 1998.
7. Федер Е. Фракталы. М.: Мир, 1991.
8. Pavlov A. et al. // Usp. Fiz. Nauk. 2007. V. 50. P. 8.
9. Dedovich T., Tokarev M. // Phys. Part. Nucl. Lett. 2011. V. 8. P. 521.
10. Dedovich T., Tokarev M. // Phys. Part. Nucl. Lett. 2012. V. 9. P. 552.
11. Sjostrand T. et al. // Comp. Phys. Commun. 2008. V. 178. P. 852.
12. Bähr M. et al. arXiv: 0809.2002 [hep-ph]. 2008.
13. Gleisberg T. et al. // JHEP 2009. V. 0902. P. 007.
14. Gyulassy M. et al. // Comp. Phys. Commun. 1994. V. 83. P. 307.
15. Lonnblad L. et al. // Comp. Phys. Commun. 1992. V. 71. P. 15.
16. Galoyan A. nucl-th/0605021. 2006.
17. Dremine I. et al. // Usp. Fiz. Nauk. 1993. V. 163. P. 1.
18. Hwa R., Nazirov M. // Phys. Rev. Lett. 1992. V. 69. P. 741.

Получено 28 января 2013 г.