

## ДИНАМИКА ПУЧКА В СИНХРОТРОНАХ С СИСТЕМАМИ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

*В. М. Жабицкий*

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Динамика пучка заряженных частиц в синхротронах с системами обратной связи исследуется с использованием дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.

Beam dynamics in synchrotrons with feedback systems is investigated by means of delay–differential equations.

PACS: 29.20.dk; 29.27.-a

### ВВЕДЕНИЕ

Системы обратной связи широко используются в синхротронах для формирования корректирующих воздействий на пучок заряженных частиц с целью подавления их когерентных поперечных (бетатронных) и продольных (синхротронных) колебаний. Например, в системах подавления когерентных поперечных колебаний локальная сила корректирующего воздействия, изменяющая траекторию пучка в месте расположения демпфирующего дефлектора, пропорциональна локальному отклонению центра тяжести этих же частиц от их равновесного состояния, измеренному при прохождении детектирующего устройства. Таким образом, сила корректирующего воздействия пропорциональна величине отклонения, измеренной в момент времени, предшествующий коррекции. Экспериментально установлено, что декремент затухания колебаний максимален, если набег фазы для когерентной моды колебательного движения частиц между точками наблюдения и коррекции кратен нечетному числу четвертей длин волн таких колебаний. При таком расположении детектора и демпфирующего дефлектора максимальному измеренному отклонению в детекторе соответствует максимальное корректирующее воздействие в дефлекторе. При этом для данных частиц их скорость, соответствующая колебательной моде, при пролете дефлектора также максимальна. Поэтому для теоретического описания колебательных процессов, происходящих в синхротроне с системой подавления когерентных поперечных колебаний, используется модельное «сглаженное» приближение, эквивалентное введению «эффективной» непрерывно действующей демпфирующей силы, пропорциональной скорости изменения отклонения [1, 2]. Иначе говоря, предполагается одновременность фокусирующих воздействий, обеспечивающих колебательный процесс заряженных частиц пучка, и «эффективных» корректирующих воздействий, приводящих к демпфированию когерентных колебаний. Последние, однако, должны быть сформированы с помощью радиотехнических устройств в цепи обратной связи таким

образом, чтобы корректирующий сигнал в системе подавления когерентных поперечных колебаний был смещен по фазе на  $90^\circ$  по отношению к фазе сигнала, обусловленного отклонением пучка в дефлекторе [2].

В настоящей работе показано, что использование дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом [3] позволяет в более общем виде описать динамику пучка в синхротронах с системами обратной связи в рамках «сглаженного» приближения, когда вместо локального демпфирующего воздействия используется непрерывно действующая корректирующая сила.

### ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Пусть  $x$  — смещение частицы от равновесной орбиты. Тогда сглаженное уравнение для поперечной динамики заряженных частиц в синхротроне с системой обратной связи имеет следующий вид [4–6]:

$$\ddot{\xi}(t) + \Omega^2 \xi(t) = \frac{g\kappa\Omega}{T_0} \xi(t - \tau) u(t - \tau) \equiv gF(\xi; \tau), \quad (1)$$

где  $\xi \equiv x$  — обобщенная координата в поперечном движении;  $T_0$  — период обращения частиц в синхротроне;  $\Omega \equiv Q_0\omega_0$  — циклическая частота бетатронных колебаний;  $Q_0$  — число бетатронных колебаний за оборот;  $\omega_0 = 2\pi/T_0$  — циклическая частота обращения частиц;  $g$  — коэффициент обратной связи;  $\kappa = \pm 1$  — полярность обратной связи (положительная или отрицательная обратная связь);  $\tau > 0$  — величина задержки сигнала в цепи обратной связи. В уравнении (1) считается, что пучок инжектирован в синхротрон в нулевой момент времени, так что все функциональные зависимости заданы при  $t \geq 0$ . Данное начальное условие учитывается с помощью функции Хевисайда  $u(t - \tau)$  [7].

Сглаженное уравнение для продольной динамики частиц в синхротроне с системой обратной связи для малых фазовых колебаний имеет вид [8, 9]

$$\ddot{\xi}(t) + \Omega^2 \xi(t) = -\frac{g\kappa}{T_0} \dot{\xi}(t - \tau) u(t - \tau) \equiv gF(\dot{\xi}; \tau), \quad (2)$$

где  $\xi \equiv \delta\phi_s$  — фазовое отклонение частицы от синхронной фазы;  $\Omega \equiv \Omega_s = \nu_s\omega_0$  — циклическая частота синхротронных колебаний;  $\nu_s$  — число таких колебаний за оборот. Данное уравнение справедливо для малых колебаний, когда  $\xi \ll 1$ .

Уравнения (1) и (2) относятся к линейным дифференциальным уравнениям с отклоняющимся аргументом с постоянными коэффициентами [3]. Действительно, фокусирующая сила, приводящая к слагаемому  $\Omega^2 \xi$ , зависит от величины отклонения частицы от ее равновесного состояния в данный момент времени  $t$ , а корректирующая сила  $F(\xi, \dot{\xi}; \tau)$  — от величины такого же отклонения в (1) или от скорости его изменения в (2) в моменты времени  $(t - \tau)$ , которые совпадают с моментом измерения отклонения детектором. Другие параметры ( $\Omega$ ,  $T_0$ ,  $g$ ) являются в синхротроне постоянными на плато магнитного поля при инжекции частиц или изменяющимися достаточно медленно в процессе ускорения по сравнению с переменной во времени величиной  $\xi$ . Следовательно, эти параметры можно считать постоянными. Запаздывание  $\tau$  в синхротронах с системой обратной связи есть необходимый промежуток времени для реагирования на входной импульс в системе автоматического регулирования. В настоящей работе в качестве исходного приближения будет предполагаться, что запаздывание  $\tau$  постоянно.

Пусть необходимо исследовать асимптотическую устойчивость решений уравнений (1) и (2) для частицы, инжектированной в синхротрон в начальный момент времени  $t_0$ , когда ее начальное состояние есть  $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$ . Поскольку левая часть уравнений (1) и (2) вычисляется в момент времени  $t$ , а в правую часть тех же уравнений входят значения аргумента в предшествующие моменты времени, то для построения решений уравнений (1) и (2) необходимо знать начальную функцию  $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$  для всех моментов времени  $t \in (t_0 - \tau, t_0]$ . В самом деле, при  $t = t_0$  в правую часть уравнений (1) и (2) войдут значения  $\xi$  в предшествующий момент времени, которые должны быть определены. Таким образом, чтобы найти решения уравнений (1) и (2), проходящих через точку  $(t_0, \xi_0, \dot{\xi}_0)$ , необходимо знать начальное множество исходных значений в предшествующие моменты времени. Это начальное множество называют начальной функцией [3, 10].

Если начальная функция задана, то для нахождения решения  $\xi(t)$  обычно используется метод шагов (или метод последовательного интегрирования) [3, 10]. Однако для приближенного нахождения решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и с постоянным отклоняющимся аргументом и для выяснения его асимптотических свойств можно использовать метод интегральных преобразований [3]: преобразование Лапласа или одностороннее преобразование Фурье. Следует также подчеркнуть, что в ускорительной физике практический интерес представляют решения при малых величинах коэффициента обратной связи  $g$ . Возникающее при использовании метода интегральных преобразований характеристическое уравнение можно исследовать методом последовательных приближений, считая малым параметром величину коэффициента обратной связи  $g$ . Метод разложения по степеням малого параметра — это общепринятый метод нахождения периодических решений квазилинейных уравнений с отклоняющимся аргументом [3], который является, в конечном счете, модификацией асимптотических методов нелинейной механики Крылова–Боголюбова–Митропольского [11].

## МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

**Метод интегральных преобразований.** В качестве первого примера для выявления условий асимптотической устойчивости решений уравнений динамики пучка в синхротроне при наличии системы обратной связи рассмотрим уравнение для поперечной динамики (1). Будем использовать одностороннее преобразование Фурье [7]

$$\mathcal{F}\{y(t)\} \equiv \mathbf{y}(\omega) = \int_0^{\infty} y(t) e^{-j\omega t} dt, \quad y(t) = 0 \quad \forall t < 0,$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} e^{j\omega t} \mathbf{y}(\omega) d\omega = \sum_r \text{Res} [\mathbf{y}(\omega_r) e^{j\omega_r t}; \omega_r],$$

где контур  $\Gamma$ , замыкаясь в верхней полуплоскости, охватывает все полюсы  $\omega_r$  аналитической функции  $\mathbf{y}(\omega)$ . Выполняя в (1) одностороннее преобразование Фурье для  $\xi(t)$  и  $\xi(t - \tau)$ , получаем следующее характеристическое уравнение:

$$-\omega^2 + \Omega^2 - \frac{g\kappa\Omega}{T_0} e^{-j\omega\tau} = 0,$$

которое является трансцендентным. Оно имеет бесконечное число решений для собственных частот  $\omega_r$ , которые также называются собственными значениями характеристического уравнения. В ускорительной физике для выявления асимптотических свойств решения уравнения (1) необходимо установить свойства собственных значений  $\omega_r$  характеристического уравнения вблизи циклической частоты свободных колебаний  $\Omega \equiv Q_0\omega_0$ . При  $g = 0$  собственные значения есть  $\omega_r = \pm\Omega$ . При  $g \ll 1$ , используя метод Эйлера [7], в линейном приближении получаем

$$\omega_r = \Omega - \frac{g\kappa}{2T_0} e^{-j\Omega\tau} = \Omega + \omega_0\Delta Q + j\frac{\alpha}{T_0},$$

где

$$\alpha = \frac{g}{2}\kappa \sin(\Omega\tau), \quad \Delta Q = -\frac{g}{4\pi}\kappa \cos(\Omega\tau). \quad (3)$$

Таким образом, свойства решения уравнения (1) определяющим образом зависят от набега фазы  $\eta \equiv \Omega\tau$  бетатронных колебаний частицы при пролете от детектора до дефлектора. Затухание колебаний возникает, если  $\kappa \sin \eta > 0$ . Данное условие может быть выполнено в широком диапазоне частот  $\Omega$  и величин задержек сигнала  $\tau$ . Действительно, имеем  $\Omega\tau = 2\pi Q_0\tau/T_0$ . Поскольку для дробной части числа бетатронных колебаний можно использовать оценку  $|\{Q_0\}| \simeq 0,3$ , то  $\tau < T_0$ . Сигнал обратной связи можно направить от детектора к дефлектору навстречу вращающимся частицам пучка и обеспечить расстановку устройств обратной связи таким образом, чтобы  $|\sin \eta| = 1$ . В этом случае воздействие системы обратной связи на колебательный процесс имеет резонансный характер ( $\Delta Q = 0$ ), поскольку  $\cos \eta = 0$ . Таким образом, оптимальный режим для системы обратной связи обеспечивается в том случае, когда между точками наблюдения и коррекции укладывается нечетное число четвертей длин волн бетатронных колебаний, что является хорошо известным результатом.

Следует также подчеркнуть, что при  $\Omega\tau = \pi m$ , где  $m$  — целое число, в (3) имеем  $\alpha = 0$  и  $4\pi\Delta Q = -g\kappa$ , что естественным образом получается при решении уравнения (1) при  $m = 0$  как линейного дифференциального уравнения без задержки  $\tau$ .

Таким образом, выражения (3) для собственных значений удовлетворяют принципу соответствия (частные случаи для  $\Omega\tau = (2m+1)\pi/2$  и для  $\Omega\tau = \pi m$ ), а также указывают на дополнительные закономерности, связанные с линейным сдвигом для  $\Delta Q$  вблизи оптимального режима затухания колебаний, когда  $\Omega\tau \simeq (2m+1)\pi/2$ .

Для продольной динамики при использовании одностороннего преобразования Фурье в (2) получаем следующее характеристическое уравнение:

$$-\omega^2 + \Omega^2 + j\omega\frac{g\kappa}{T_0} e^{-j\omega\tau} = 0,$$

где  $\Omega \equiv \Omega_s$ . Отсюда при  $g \ll 1$ , используя метод Эйлера [7], в линейном приближении получаем

$$\omega_r = \Omega_s + j\frac{g\kappa}{2T_0} e^{-j\Omega_s\tau} = \Omega_s + \omega_0\Delta\nu_s + j\frac{\alpha_s}{T_0},$$

где

$$\alpha_s = \frac{g}{2}\kappa \cos(\Omega_s\tau), \quad \Delta\nu_s = \frac{g}{4\pi}\kappa \sin(\Omega_s\tau). \quad (4)$$

Если  $\Omega_s\tau = \pi m$ , то затухание колебаний максимально, а сдвиг частоты в линейном приближении отсутствует, что является хорошо известным результатом для малых колебаний с трением (уравнение (2) при  $\tau = 0$  есть уравнение малых колебаний с трением).

При  $\tau > 0$  затухание колебаний возникает, если  $\varkappa \cos(\Omega_s \tau) > 0$ . Данное условие для синхротронных колебаний выполняется, поскольку  $\Omega_s \tau = 2\pi\nu_s \tau / T_0$  и даже при  $\tau \simeq T_0$  имеем  $\Omega_s \tau \ll 1$ , так как  $\nu_s \ll 1$ . Однако резонансный характер воздействия системы обратной связи на когерентные синхротронные колебания не возникает, поскольку  $\Omega_s \tau$  есть хоть и малая, но положительная величина. Поэтому обычно минимизируют фазовый набег  $\Omega_s \tau$  за счет уменьшения величины  $\tau / T_0$ , т. е. направляют сигнал обратной связи по хорде вдогонку пучку.

**Метод усреднения Крылова–Боголюбова–Митропольского.** При  $g \ll 1$ , как указано в [3], для установления асимптотических свойств решений дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, содержащих малый параметр, можно использовать метод усреднения Крылова–Боголюбова–Митропольского (КБМ). При этом появляется возможность исследования уравнений (1) и (2) в более общем случае, когда в правую часть этих уравнений входят нелинейные по  $\xi$  малые поправки. Метод усреднения КБМ приводит к следующим укороченным уравнениям для основной гармоники [12]:

$$\begin{aligned} \xi(t) &= a(t) \sin \psi(t) + O(g), \quad \psi^{(0)}(t) = \Omega t + \phi_0, \\ \dot{a} &= \frac{g}{2\pi\Omega} \int_0^{2\pi} F(a \sin \psi, a\Omega \cos \psi) \cos \psi \, d\psi, \\ \dot{\psi} &= \Omega - \frac{g}{2\pi a \Omega} \int_0^{2\pi} F(a \sin \psi, a\Omega \cos \psi) \sin \psi \, d\psi. \end{aligned}$$

Следует подчеркнуть, что метод усреднения КБМ является эффективным методом нахождения решения уравнений с малым параметром. В том числе он может быть использован для нахождения решения линейного уравнения малых колебаний при наличии трения, что продемонстрировано в книге [11]. Универсальность метода усреднения КБМ является основанием для его применения к решению уравнений (1) и (2) с тем, чтобы сопоставить возникающие результаты с приближенными решениями, полученными в предыдущем разделе.

Использование метода усреднения КБМ для уравнения поперечной динамики (1) приводит к следующим выражениям:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -\alpha a, \quad \alpha = \frac{g}{2} \varkappa \sin(\Omega \tau), \quad a = a_0 e^{-\alpha t / T_0}, \\ \dot{\psi} &= (Q_0 + \Delta Q) \omega_0, \quad \Delta Q = -\frac{g}{4\pi} \varkappa \cos(\Omega \tau), \quad \psi = (Q_0 + \Delta Q) \omega_0 t + \phi_0. \end{aligned}$$

Этот результат для  $\alpha$  и  $\Delta Q$  совпадает с приближенными решениями (3).

Аналогично для уравнения продольной динамики (2) получаем

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -\alpha_s a, \quad \alpha_s = \frac{g}{2} \varkappa \cos(\Omega \tau), \quad a = a_0 e^{-\alpha_s t / T_0}, \\ \dot{\psi} &= (\nu_s + \Delta \nu_s) \omega_0, \quad \Delta \nu_s = \frac{g}{4\pi} \varkappa \sin(\Omega \tau), \quad \psi = (\nu_s + \Delta \nu_s) \omega_0 t + \phi_0. \end{aligned}$$

Данный результат для  $\alpha_s$  и  $\Delta \nu_s$  совпадает с приближенными решениями (4).

Таким образом, метод усреднения КБМ позволяет в линейном приближении по малому параметру  $g$  выявить основные закономерности для декремента затухания колебаний и сдвига частоты, совпадающие с аналогичными характеристиками, полученными при анализе приближенных собственных значений характеристического уравнения.

### СИСТЕМЫ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ С ЦИФРОВЫМ ФИЛЬТРОМ

**Демпфирование когерентных бетатронных колебаний.** В синхротроне с системой обратной связи с простейшим цифровым фильтром для уравнения (1) имеем [2, 6, 13]

$$\ddot{x}(t) + \Omega^2 x(t) = \frac{g \varkappa \Omega}{T_0 H_0} \sum_{m=0}^N b[m] (x(t - \tau - (m + \hat{q})T_0) + \delta x_0) u(t - \tau - (m + \hat{q})T_0), \quad (5)$$

где  $\delta x_0$  — статическая погрешность измерения отклонения центра тяжести пучка от равновесной орбиты;  $N$  — порядок фильтра с конечной импульсной характеристикой;  $b[m]$  — коэффициенты фильтра;  $H_0$  — нормировочная постоянная;  $\hat{q}T_0$  — дополнительная задержка в цепи обратной связи. Постоянная составляющая в решении исключается, если

$$\sum_{m=0}^N b[m] = 0.$$

Это означает, что в цепи обратной связи должен присутствовать узкополосный заграждающий фильтр (notch filter). Используя укороченные уравнения согласно методу усреднения КБМ, получаем для основной гармоники

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= -\alpha a, & \dot{\psi} &= (Q_0 + \Delta Q) \omega_0, \\ \alpha &= \frac{g}{2} \frac{|H(\Omega)|}{H_0} \varkappa \sin \Psi, & \Delta Q &= -\frac{g}{4\pi} \frac{|H(\Omega)|}{H_0} \varkappa \cos \Psi, \end{aligned} \quad (6)$$

где величина баланса фаз есть

$$\Psi(\Omega) = \eta + 2\pi \hat{q} Q_0 - \arg H(\Omega), \quad \eta \equiv \Omega \tau = 2\pi Q_0 \tau / T_0.$$

Здесь  $H(\Omega)$  — передаточная характеристика фильтра:

$$H(\Omega) = \sum_{m=0}^N b[m] e^{-jm\Omega T_0}, \quad m\Omega T_0 \equiv 2\pi m Q_0.$$

В отсутствие фильтра ( $\arg H = 0$ ,  $|H| = H_0 = 1$ ) и дополнительной задержки ( $\hat{q} = 0$ ) для декремента затухания  $\alpha$  когерентных поперечных колебаний и для поправки  $\Delta Q$  к числу таких колебаний за оборот выражения (6) совпадают с (3).

За счет подбора коэффициентов  $b[m]$  можно сформировать величину  $\arg H(\Omega)$  таким образом, чтобы величина баланса фаз  $\Psi$  была оптимальной ( $\cos \Psi = 0$ ) даже в том случае, если набег фазы бетатронных колебаний  $\eta$  не оптимален ( $\cos \eta \neq 0$ ). Таким образом, применение цифрового фильтра в цепи обратной связи позволяет обеспечить оптимальную величину баланса фаз ( $\cos \Psi = 0$ ), в результате чего декремент затухания колебаний максимален ( $\varkappa \sin \Psi = 1$ ) и колебательный процесс имеет резонансный характер ( $\Delta Q = 0$ ).

Следует подчеркнуть, что выражения (6), полученные методом усреднения КБМ, есть первое приближение по малому параметру  $g$ . Если использовать метод одностороннего преобразования Фурье для решения уравнения (5), то возникает следующее характеристическое уравнение:

$$-\omega^2 + \Omega^2 - \frac{g\lambda\Omega}{T_0 H_0} H(\omega) e^{-j(\tau + \hat{q}T_0)\omega} = 0.$$

Данное уравнение, будучи трансцендентным, имеет бесконечное множество решений. Однако при слабой зависимости передаточной характеристики фильтра от частоты, когда

$$\frac{\Omega}{|H(\Omega)|} \left| \frac{dH(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=\Omega} \ll 1,$$

можно воспользоваться методом Эйлера для решения характеристического уравнения, что в первом приближении по малому параметру  $g$  для собственных значений  $\omega_r$  вблизи  $\Omega$  приведет к выражениям (6) для  $\alpha$  и  $\Delta Q$ .

Необходимо также отметить следующую особенность решений (6). Для числа  $Q_0$  бетатронных колебаний имеем:  $Q_0 = N_Q + \{Q_0\}$ , где  $N_Q$  — целая часть числа бетатронных колебаний,  $\{Q_0\}$  — дробная часть числа бетатронных колебаний ( $-0,5 < \{Q_0\} \leq 0,5$ ). Поэтому можно ввести обозначение  $\Omega_\beta = |\{Q_0\}| \omega_0$  для минимальной моды частоты бетатронных колебаний. Нетрудно видеть, что передаточная характеристика выбранного фильтра имеет периодичность по частоте:  $H(\Omega_\beta + m\omega_0) = H(\Omega_\beta)$  для любых целых величин  $m$ . Поэтому правомерно определить  $H_0$  следующим образом:

$$H_0 \equiv |H(\Omega_\beta)|.$$

Тогда выражения (6) и (3) для  $\alpha$  и  $\Delta Q$  совпадают для всех собственных мод когерентных бетатронных колебаний  $(\Omega_\beta + m\omega_0)$ . Данный выбор для величин  $\Psi$  и  $H_0$  имеет простой физический смысл. Изменение амплитудно-частотной  $H(\Omega)/H_0$  и фазочастотной  $\arg H(\Omega)$  характеристик фильтра с циклической частотой  $\Omega$  приводит к изменению декрементов затухания  $\alpha$  и сдвигов когерентных частот  $\omega_0 \Delta Q$  для циклических частот  $(\Omega_\beta + m\omega_0)$ , отвечающих собственным частотам когерентных колебательных мод частиц. Поэтому величины баланса фаз  $\Psi(\Omega)$  должны быть такими, чтобы колебания были затухающими, причем данное требование должно выполняться в максимально возможной полосе частот. При этом на минимальной частоте бетатронных колебаний величина баланса фаз должна быть оптимальной:

$$\cos \Psi(\Omega_\beta) = 0 \quad \text{или} \quad |\sin \Psi(\Omega_\beta)| = 1.$$

Таким образом, определяющим параметром асимптотических свойств колебательных мод является величина баланса фаз, численно равная разности между набегом фазы когерентных колебаний частицы  $(\eta + 2\pi\hat{q}Q_0)$  при пролете от детектора до демпфирующего дефлектора и изменением фазы  $\arg H(\Omega)$  детектируемого сигнала в цепи обратной связи.

Завершая данный раздел, следует подчеркнуть, что выражения (6) для  $\alpha$  и  $\Delta Q$  совпадают с соответствующими выражениями, полученными в рамках оригинальной дискретной модели [6, 13], описывающей динамику когерентных поперечных колебаний сгустков заряженных частиц в синхротронах с системой обратной связи с помощью линейных разностных уравнений, в которых учтен локальный (импульсный) характер корректирующего воздействия, синхронизованного с локальным измерением в детекторе.

**Демпфирование когерентных синхротронных колебаний.** В синхротроне с системой обратной связи с простейшим цифровым фильтром для уравнения (2) по аналогии с (5) можем записать

$$\ddot{\xi}(t) + \Omega^2 \xi(t) = \frac{g\kappa}{T_0 H_0} \frac{d}{dt} \left[ \sum_{m=0}^N b[m] (\xi(t - \tau - (m + \hat{q})T_0) + \delta\xi_0) u(t - \tau - (m + \hat{q})T_0) \right], \quad (7)$$

где  $\delta\xi_0$  — статическая погрешность измерения фазового отклонения частицы от синхронной фазы. Выполняя одностороннее преобразование Фурье, получаем следующее характеристическое уравнение:

$$-\omega^2 + \Omega_s^2 + j\omega \frac{g\kappa}{T_0 H_0} H(\omega) e^{-j(\tau + \hat{q}T_0)\omega} = 0.$$

Если обеспечена слабая зависимость передаточной характеристики фильтра от частоты, то, воспользовавшись методом Эйлера, получаем следующие выражения для собственных значений:

$$\omega_r = \Omega_s + j \frac{g\kappa}{T_0 H_0} |H(\Omega_s)| e^{-j\Psi(\Omega_s)} = \Omega_s + \omega_0 \Delta\nu_s + j \frac{\alpha_s}{T_0},$$

где

$$\begin{aligned} \Psi(\Omega_s) &= \eta + 2\pi\hat{q}\nu_s - \arg H(\Omega_s), & \eta &\equiv \Omega_s \tau = 2\pi\nu_s \tau / T_0, \\ \alpha_s &= \frac{g}{2} \frac{|H(\Omega_s)|}{H_0} \kappa \cos \Psi(\Omega_s), & \Delta\nu_s &= \frac{g}{4\pi} \frac{|H(\Omega_s)|}{H_0} \kappa \sin \Psi(\Omega_s). \end{aligned}$$

Эти же выражения для  $\alpha_s$  и  $\Delta\nu_s$  нетрудно получить с помощью укороченных уравнений для основной гармоники при использовании метода усреднения КБМ. Вновь следует подчеркнуть, что определяющим параметром асимптотических свойств когерентных синхротронных колебательных мод является величина баланса фаз  $\Psi(\Omega_s)$ . Подбирая параметры фильтра  $b[m]$ , можно обеспечить оптимальные условия ( $\sin \Psi(\Omega_s) = 0$ ) для подавления когерентных синхротронных колебаний, когда декремент затухания колебаний максимален и колебательный процесс имеет резонансный характер ( $\Delta\nu_s = 0$ ).

## СРАВНЕНИЕ С ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМИ РЕЗУЛЬТАТАМИ

Поскольку смещение частоты когерентных поперечных колебаний в синхротронах с системой обратной связи пропорционально  $g\kappa \cos \Psi$ , то данный эффект был использован для тонкой настройки баланса фаз  $\Psi$  системы подавления когерентных поперечных колебаний пучка в ЛНС [14, 15]. Действительно, при заданном режиме динамики частиц пучка по числу бетатронных колебаний  $Q_0$  и при фиксированном размещении демпфирующего deflectора относительно детектора можно в небольших пределах изменить параметры цифрового фильтра с целью проверки факта оптимальности величины  $\Psi$ . Например, в системе подавления когерентных поперечных колебаний пучка в ЛНС для установления оптимального баланса фаз используется фильтр Гильберта. В целом передаточная характеристика цепи обратной связи задана последовательно включенными узкополосным заграждающим фильтром и фильтром Гильберта:

$$H(\Omega) = H(Q_0, \varphi) = (1 - z^{-1}) \left( z^{-3} \cos \varphi + \frac{2 \sin \varphi}{\pi} z^{-2} (1 - z^{-2}) + \frac{2 \sin \varphi}{3\pi} (1 - z^{-6}) \right),$$



где  $\varphi$  — фазовый параметр фильтра Гильберта,  $z = \exp(j2\pi Q_0)$ . Пусть величине  $\varphi_0$  отвечает оптимальный баланс фаз  $\Psi(Q_0, \varphi_0)$ :

$$\varkappa \sin \Psi(Q_0, \varphi_0) = 1, \quad \Psi(Q_0, \varphi_0) = \eta(Q_0) + 2\pi \hat{q} Q_0 - \psi_f(Q_0, \varphi_0),$$

где  $\psi_f \equiv \arg(H(Q_0, \varphi))$  — фазовый сдвиг, возникающий при прохождении сигнала по радиотехнической цепи обратной связи. Тогда при небольших отклонениях  $\delta\varphi_0$  от оптимального значения  $\varphi_0$  получаем

$$\Psi(Q_0, \varphi = \varphi_0 + \delta\varphi_0) = \Psi(Q_0, \varphi_0) + \delta\psi_f(\varphi),$$

где

$$\delta\psi_f(\varphi) \equiv \psi_f(Q_0, \varphi) - \psi_f(Q_0, \varphi = \varphi_0 + \delta\varphi_0).$$

Отсюда следует

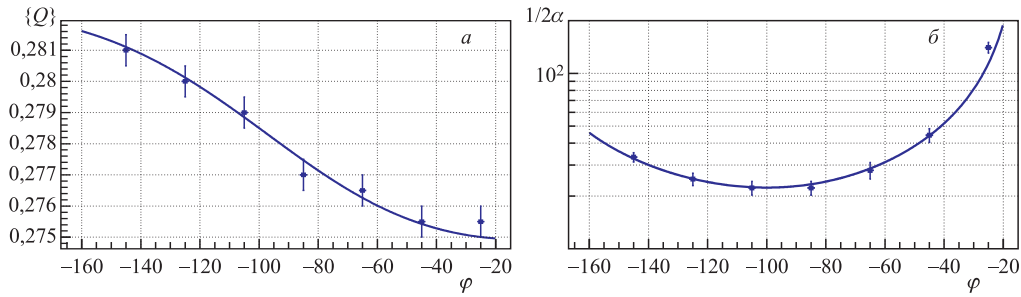
$$\Delta Q = -\frac{g\varkappa}{4\pi} \cos \Psi(Q_0, \varphi_0 + \delta\varphi_0) = \frac{g}{4\pi} \sin(\delta\psi_f(\varphi)).$$

Таким образом, изменение частоты бетатронных колебаний при отклонении от оптимального режима пропорционально коэффициенту обратной связи  $g$  и приросту фазового набега  $\delta\psi_f$ . В оптимальном режиме частота бетатронных колебаний не зависит от  $g$ . Измерим величину  $Q_0$  при отключенной системе подавления. Включив систему подавления и установив небольшую величину  $g$ , можно измерить постоянную времени затухания когерентных колебаний  $\tau_d = T_0/\alpha = 2T_0/g$ , тем самым задав коэффициент наклона исследуемой зависимости. Затем можно снять экспериментальную зависимость измеряемой частоты бетатронных колебаний от задаваемой величины фазового параметра  $\varphi$  фильтра Гильберта. Если исходный режим при  $Q_0$  был оптимальным, то изменение частоты вблизи  $Q_0$  должно отвечать линейной зависимости от  $\varphi$ , а декремент затухания иметь максимальную величину.

На рисунке приведена расчетная зависимость числа  $\{Q\} \equiv \{Q_0\} + \Delta Q$  для когерентных бетатронных колебаний от фазового параметра  $\varphi$  фильтра Гильберта. При выключенной системе подавления положению рабочей точки по  $Q_0$  отвечает величина  $\{Q_0\} = 0,2785$ . Этому значению согласно расчетной зависимости, приведенной на рис. а, отвечает величина  $\varphi = -100^\circ$ . При этом измеренная величина постоянной времени затухания составляла  $\tau_d = 44,64T_0$ , т. е.  $g = 0,045$ . Таким образом, все параметры расчетной зависимости заданы своими экспериментальными измеренными значениями. Приведенные результаты измерений частот бетатронных колебаний в заданном диапазоне величин  $\varphi$  указывают на хорошее соответствие расчетных и экспериментальных данных. Бетатронные частоты регистрировались с использованием метода высокочувствительных измерений бетатронных колебаний, инициированных внутренними шумами различных ускорительных систем [16].

В соответствии с результатами работы [13] максимальный отклик на внешнее возбуждение зависит от декремента затухания когерентных колебаний, для которого согласно (6) имеем

$$\alpha = \frac{g}{2} \varkappa \sin \Psi(Q_0, \varphi_0 + \delta\varphi_0) = \frac{g}{2} \cos(\delta\psi_f(\varphi)).$$



Расчетные зависимости величины  $\{Q\}$  (а) и коэффициента резонансного усиления (б) от фазового параметра  $\varphi$  фильтра Гильберта (сплошные линии) в сопоставлении с результатами экспериментальных измерений [14]

Отсюда для коэффициента резонансного усиления получаем

$$R_D^{(\max)} = \frac{1}{2\alpha} = \frac{1}{g \cos(\delta\psi_f(\varphi))}.$$

Зависимость коэффициента резонансного усиления от фазового параметра  $\varphi$  фильтра Гильберта приведена на рис. б. Здесь же представлены экспериментальные данные, хорошо согласующиеся с расчетными. Минимальному значению этой кривой отвечает  $\varphi = -100^\circ$ , что согласуется с данными рис. а.

Таким образом, совместные измерения частоты бетатронных колебаний и коэффициента резонансного усиления позволяют обеспечить высокую точность настройки баланса фаз. Приведенные экспериментальные данные подтверждают наличие линейной поправки к частоте когерентных бетатронных колебаний вблизи оптимального режима, зависящей от величины баланса фаз.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Показано, что когерентные поперечные (бетатронные) и продольные (синхротронные) колебания заряженных частиц пучка в синхротроне с системами обратной связи в сглаженном приближении описываются с помощью дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Получены аналитические выражения для сдвигов частот когерентных колебаний и декрементов их затухания в линейном приближении по малому параметру — коэффициенту обратной связи при наличии цифрового фильтра в радиотехнической цепи обработки сигнала автоматического регулирования. Установлено, что определяющим параметром асимптотических свойств колебательных мод является величина баланса фаз, численно равная разности между набегом фазы когерентных колебаний частицы при пролете от детектора до демпфирующего дефлектора и изменением фазы детектируемого сигнала в цепи обратной связи. Показано совпадение экспериментальных и расчетных величин для сдвигов частот когерентных бетатронных колебаний и декрементов их затухания. Приведенные экспериментальные данные подтверждают наличие линейной поправки к частоте когерентных бетатронных колебаний вблизи оптимального режима, зависящей от величины баланса фаз.

**Благодарности.** Автор выражает признательность О. Н. Чижовой (Санкт-Петербургский государственный университет) за обсуждения и квалифицированные рекомендации по использованию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Автор благодарен В. Хёрлю (ЦЕРН) и его коллегам за предоставленные экспериментальные данные, полученные при наладке системы подавления когерентных поперечных колебаний пучка протонов в ЛНС.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kohaupt R. D.* Theory of Multi-Bunch Feedback Systems. DESY, 91-071. Hamburg: DESY. 1991. 22 p.
2. *Lonza M.* Multi-Bunch Feedback System // CAS — CERN Accelerator School: Digital Signal Processing, Sigtuna, Sweden, May 31–June 9, 2007. CERN-2008-003. Geneva, 2008. P. 285–330.
3. *Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971. 296 с.
4. *Лебедев А. Н., Шальнов А. В.* Основы физики и техники ускорителей. М.: Энергоатомиздат, 1991. 528 с.
5. *Myers S.* A First Look at the Requirements for Transverse Feedback for the LEP Main Ring. LEP Note 436. Geneva: CERN, 1983. 11 p.
6. *Жабицкий В. М.* Применение  $Z$ -преобразования для решения задачи о подавлении свободных колебаний пучка в ускорителе. Сообщ. ОИЯИ Р9-91-91. Дубна: ОИЯИ, 1991. 18 с.
7. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1978. 832 с.
8. *Брук Г.* Циклические ускорители заряженных частиц. М.: Атомиздат, 1970. 312 с.
9. *Zhabitsky V. M.* Digital Longitudinal Feedback Systems in Synchrotrons // Proc. of XXII Rus. Particle Accelerators Conf. «RuPAC-2010», Protvino, Russia, Sept. 27–Oct. 1, 2010, Protvino: ИЯИ, 2010. P. 224–226.
10. *Чижова О. Н.* Методы исследования дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом: Учеб. пособие / Факультет прикладной математики — процессов управления. СПб.: Изд-во Санкт-Петербургск. гос. ун-та, 2011. 47 с.
11. *Боголюбов Н. Н.* Собрание научных трудов: В 12 т. М.: Наука, 2005. Т. III. 605 с.
12. *Jackson E. Atlee.* Perspectives of Nonlinear Dynamics. Cambridge Univ. Press, 1989. V. 1. 496 p.
13. *Жабицкий В. М.* Отклик пучка на переходный процесс в синхротронах с цифровой системой подавления когерентных поперечных колебаний // Письма в ЭЧАЯ. 2013. Т. 10, № 1(178). С. 120–129.
14. *Höfle W. et al.* LHC Transverse Damper Observations versus Expectations // Proc. of the LHC Beam Operation Workshop, Evian, France, Dec. 7–9, 2010. CERN-ATS-2011-017. Geneva, 2011. P. 107–114.
15. *Höfle W. et al.* LHC Damper Beam Commissioning in 2010 // Second Intern. Particle Accelerator Conf. «IPAC-2011», San Sebastian, Spain, Sept. 4–9, 2011. The Eur. Phys. Soc. Accelerator Group (EPS-AG). 2011. P. 505–507; CERN-ATS-2011-033. Geneva, 2011.
16. *Gasior M.* FARADAY CUP AWARD: High Sensitivity Tune Measurement Using Direct Diode Detection. CERN-ATS-2012-246. Geneva: CERN, 2012. 7 p.

Получено 22 марта 2013 г.