Письма в ЭЧАЯ. 2013. Т. 10, № 7(184). С. 998–1001

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА. ТЕОРИЯ

К ВОПРОСУ О СИНГУЛЯРНОСТИ ЗАРЯДОВОЙ ПЛОТНОСТИ В ЦЕНТРЕ π-МЕЗОНА

А. Н. Валл [а,1], *И. А. Перевалова* [а,2], *М. В. Поляков* [б,3], *А. К. Сокольникова* [а,4]

[а] ФГБОУ ВПО ИГУ, Иркутск, Россия

[б] Институт теоретической физики II, Рурский университет Бохума, Бохум, Германия

Обобщается и анализируется выражение для кварковой плотности π-мезона с учетом квантовой природы прицельного параметра в области малых фазовых объемов. Следствием этого является отсутстствие нефизической сингулярности в центральной области пи-мезона.

We generalize and analyze the expression for the quark density of the pion with an allowance for quantum nature of the impact parameter in the small phase space volume region. As a result, there is no singularity in the center of the pion.

PACS: 11.55.-m; 03.65.Nk; 11.30.-j

В работах [1, 2] подробно рассмотрен вопрос о поведении зарядовой плотности в центре пиона. При этом зарядовая плотность определяется как двумерное преобразование Фурье электромагнитного формфактора F_π по прицельному параметру $\mathbf{b}$:

$$\rho(\mathbf{b}) = \int \frac{d\mathbf{q}_\perp}{(2\pi)^2} F_\pi(Q^2 = \mathbf{q}_\perp^2)\, \mathrm{e}^{-i\mathbf{q}_\perp \mathbf{b}}. \tag{1}$$

С другой стороны, эта плотность получается как результат преобразования Радона вероятностного распределения кварков в адроне (функции Вигнера) [3, 4]:

$$\rho(b^2) = \breve{\rho}(\mathbf{b}^2) = \int W(\mathbf{x},\mathbf{q}) \delta^{(2)} \left(\mathbf{b} - \frac{1}{q^2} [\mathbf{q} \cdot [\mathbf{x} \cdot \mathbf{q}]] \right) d\mathbf{x}\, d\mathbf{q}, \tag{2}$$

где $W(\mathbf{x},\mathbf{q})$ — функция Вигнера. Здесь $\breve{\rho}(\mathbf{b}^2)$ означает преобразование Радона, в соответствии с обозначением, принятым в работе [3].

[1] E-mail: anvall@mail.ru
[2] E-mail: IrenAdler1@rambler.ru
[3] E-mail: maxim.polyakov@tp2.ruhr-uni-bochum.de
[4] E-mail: sokolnikova.aleksandra@gmail.com

Согласование соотношений (1), (2) — это согласование экспериментальных данных по электромагнитному формфактору F_π, с одной стороны, и моделями партонных распределений из данных по глубоконеупругому рассеянию на π-мезоне — с другой.

Мы предлагаем естественное обобщение представления (1) в виде разложения по плоским волнам на группе $SO(2,1)$ (функции Шапиро $\xi(\mathbf{q}_\perp, \boldsymbol{\mu})$):

$$\rho(\boldsymbol{\mu}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \bar{\xi}(\mathbf{q}_\perp, \boldsymbol{\mu}) F_\pi(\mathbf{q}_\perp)\, d\Omega_{\mathbf{q}}, \tag{3}$$

где $d\Omega_{\mathbf{q}} = \dfrac{1}{q\sqrt{q^2 - q_\perp^2}}\, d\mathbf{q}_\perp,\ d\mathbf{q}_\perp\ = q_\perp dq_\perp d\varphi$.

Основанием к этому служит то, что в этом случае интегрирование в импульсном пространстве идет по физической области изменений $q_\perp$, а также тот факт, что на поверхности, задаваемой аргументом δ-функции в соотношении (2), функции Шапиро образуют полную ортонормированную систему [5]. В области больших прицельных параметров b представления (1) и (3) совпадают.

Следствием квантования компонент прицельного параметра b_i является появление минимального возможного значения параметра $b^2 = b^2_{\min} = \hbar^2/4q^2$, что соответствует значению $\mu = 0$. Рассмотрим разложение плотности $\rho(\mu)$ в окрестности $\mu \backsim 0$.

В соотношении (3) возьмем интеграл по полярному углу φ, учитывая, что формфактор F_π от него не зависит. Тогда получим

$$\rho(\boldsymbol{\mu}) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{q_\perp dq_\perp}{q^2 - q_\perp^2} P_{-1/2+i\mu}\left(\frac{q}{\sqrt{q^2 - q_\perp^2}}\right) F_\pi(q_\perp)\ . \tag{4}$$

Для формфактора F_π возьмем модель, хорошо согласующуюся с экспериментальными данными [6]:

$$F_\pi(Q^2 = q_\perp^2) = \frac{1}{1 + \dfrac{R_m^2 q_\perp^2}{6\hbar^2}} + \frac{1}{\left(1 + \dfrac{R_d^2 q_\perp^2}{12\hbar^2}\right)^2}. \tag{5}$$

Фитирование экспериментальных данных в интервале Q^2 от 0,60 до 2,45 ГэВ^2 приводит к значениям

$$R_m^2 = 0{,}431\ \text{фм}^2, \qquad R_d^2 = 0{,}411\ \text{фм}^2.$$

Рассмотрим отдельно монопольное слагаемое формфактора:

$$F_{\pi\ \mathrm{mon}}(q_\perp^2) = \frac{1}{1 + \dfrac{R_m^2 q_\perp^2}{6\hbar^2}} = \frac{6\hbar^2}{6\hbar^2 + R_m^2 q^2\,(1 - 1/u_0^2)},$$

где $u_0 = q/\sqrt{q^2 - q_\perp^2}$, $q^2 = q_\perp^2 + q_3^2$.

Тогда для плотности распределения $\rho_{\mathrm{mon}}(\mu)$ получим [7, 8]:

$$\rho_{\mathrm{mon}}(\mu) = \frac{6\hbar^2}{2\pi} \frac{1}{2\zeta_m^2} \frac{\pi}{\operatorname{ch}\pi\mu} \left[P_{-1/2+i\mu}\left(-\frac{R_m q}{\zeta_m}\right) + P_{-1/2+i\mu}\left(\frac{R_m q}{\zeta_m}\right)\right], \tag{6}$$

где введено обозначение $\zeta_m^2 = 6\hbar^2 + R_m^2 q^2$, причем

$$-1 < \frac{R_m q}{\zeta_m} < 1.$$

Отсюда при $\mu = 0$ получим

$$\rho_m(0) = \frac{3\hbar^2}{\pi\zeta_m^2}\left[K\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{R_m q}{\zeta_m}\right)}\right) + K\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{R_m q}{\zeta_m}\right)}\right)\right], \tag{7}$$

где $K(z)$ — полный эллиптический интеграл первого рода.

Теперь рассмотрим дипольное слагаемое в формфакторе (5):

$$F_{\pi\ \mathrm{dip}}(q_\perp^2) = \frac{1}{\left(1+\dfrac{R_d^2 q_\perp^2}{12\hbar^2}\right)^2} = \frac{(12\hbar^2)^2}{\left(12\hbar^2 + R_d^2 q^2(1-1/u_0^2)\right)^2}\ .$$

В этом случае плотность распределения $\rho_{\mathrm{dip}}(\mu)$:

$$\rho_{\mathrm{dip}}(\mu) = \frac{(12\hbar^2)^2}{2\pi}\int\limits_1^\infty P_{-1/2+i\mu}(u_0)\frac{u_0^3\,du_0}{\left(\zeta_d^2 u_0^2 - R_d^2 q^2\right)^2}, \tag{8}$$

где $\zeta_d^2 = 12\hbar^2 + R_d^2 q^2$.

Аналогичные предыдущим вычисления приводят для $\rho_{\mathrm{dip}}(\mu)$ к следующему выражению:

$$\rho_{\mathrm{dip}}(\mu) = \frac{36\hbar^4}{\zeta_d^4\,\mathrm{ch}\,(\pi\mu)}\left[\left(1+\frac{R_d^2q^2(1/2+i\mu)}{24\hbar^2}\right)\left(P_{-\frac{1}{2}+i\mu}\left(-\frac{R_d q}{\zeta_d}\right) + P_{-\frac{1}{2}+i\mu}\left(\frac{R_d q}{\zeta_d}\right)\right)\right] + \\ + \frac{3\hbar^2 R_d q(1/2+i\mu)}{2\zeta_d^3\,\mathrm{ch}\,(\pi\mu)}\left[P_{\frac{1}{2}+i\mu}\left(-\frac{R_d q}{\zeta_d}\right) - P_{\frac{1}{2}+i\mu}\left(\frac{R_d q}{\zeta_d}\right)\right]. \tag{9}$$

Принимая во внимание, что

$$P_{\frac{1}{2}}(x) = F\left(-\frac{1}{2},\ \frac{3}{2};\ 1;\ \frac{1-x}{2}\right),$$

окончательно для плотности $\rho(0)$ получим

$$\rho(0) = \rho_{\mathrm{mon}}(0) + \rho_{\mathrm{dip}}(0) = \\ = \frac{3\hbar^2}{\pi\zeta_m^2}\left[K\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{R_m q}{\zeta_m}\right)}\right) + K\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{R_m q}{\zeta_m}\right)}\right)\right] + \\ + \frac{72\hbar^4}{\pi\zeta_d^4}\left[\left(1+\frac{R_d^2 q^2}{48\hbar^2}\right)\left(K\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{R_d q}{\zeta_d}\right)}\right) + K\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{R_d q}{\zeta_d}\right)}\right)\right)\right] + \\ + \frac{3\hbar^2 R_d q}{4\zeta_d^3}\left[F\left(-\frac{1}{2},\ \frac{3}{2};\ 1;\ \frac{1}{2}+\frac{R_d q}{2\zeta_d}\right) - F\left(-\frac{1}{2},\ \frac{3}{2};\ 1;\ \frac{1}{2}-\frac{R_d q}{2\zeta_d}\right)\right]. \tag{10}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, кварковая плотность π-мезона, задаваемая соотношением (3), не имеет сингулярности в физической обасти изменения прицельного параметра $\hbar^2/4q^2 \leqslant b^2 < \infty$. Эта область следует из квантово-механического обобщения прицельного параметра [5].

Выражаем глубокую благодарность доктору физ.-мат. наук Александру Леонидовичу Баландину и доктору физ.-мат. наук Юрию Адольфовичу Маркову за обсуждение работы и критические замечания.

Работа выполнена в рамках Программы стратегического развития ИГУ на 2012–2016 гг., при финансовой поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг., Соглашение № 14.B37.21.0910, ГК № 16.740.11.0154, № П1197.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Miller G. A.* Singular Charge Density at the Center of the Pion? // Phys. Rev. C. 2009. V. 79. P. 055204; arXiv:0901.1117v1 [nucl-th].
2. *Hoyer P.* Measuring Transverse Size with Virtual Photons // Nuovo Cim. C. 2012. V. 035N2. P. 277; arXiv:1110.3393v1 [hep-ph].
3. *Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я.* Преобразование Радона основных и обобщенных функций в вещественном афинном пространстве // *Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я.* Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1962. С. 15–110.
4. *Belitsky A. V., Radyushkin A. V.* Unraveling Hadron Structure with Generalized Parton Distributions // Phys. Rep. 2005. V. 418. P. 1–387.
5. *Vall A. N. et al.* Spatial Description of the Particle Production Region in Elastic and Quasi-Elastic Processes on the $SO(2.1)$ Group // Phys. Part. Nucl. 2009. V. 40, No. 7. P. 1030–1058.
6. *Huber G. M. et al.* Charged Pion Form Factor between $Q^2 = 0.60$ and 2.45 GeV^2. II. Determination of, and Results for, the Pion Form Factor // Phys. Rev. C. 2008. V. 78. P. 045203; arXiv:0809.3052v1 [nucl-ex].
7. *Бейтман Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1965. 296 с.
8. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1100 с.

Получено 21 ноября 2012 г.