Письма в ЭЧАЯ. 2014. Т. 11, № 2(186). С. 124–145

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА. ТЕОРИЯ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАССОВОГО СПЕКТРА И КОНСТАНТЫ РАСПАДА МЕЗОНОВ, СОСТОЯЩИХ ИЗ c- И b-КВАРКОВ

М. Динейхан, С. А. Жаугашева, Н. Хабыл, Г. С. Нурбакова

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алма-Ата, Казахстан

На основе исследования асимптотического поведения корреляционной функции соответствующих полевых токов с необходимыми квантовыми числами предложен метод аналитического определения массового спектра и константы распада мезонов, состоящих из c- и b-кварков, с учетом релятивистских поправок. Аналитически определены зависимости конституентной массы кварков от токовой массы, а также от орбитальных и радиальных квантовых чисел. Масса и волновая функция мезонов найдены из уравнений Шредингера с конституентной массой составляющих частиц. Вычислены расщепления массового спектра для синглетного и триплетного состояний мезонов, а также определены ширины лептонного и радиационного распадов, обусловленные $E1$-переходом для систем $(\bar{c}c)$, $(\bar{b}b)$ и $(\bar{b}c)$. Наши результаты для массового спектра мезонов, состоящих из c- и b-кварков, удовлетворительно согласуются с существующими экспериментальными данными.

On the basis of the investigation of the asymptotic behavior of the correlation functions of the corresponding field currents with the necessary quantum numbers the analytic method for the determination of the mass spectrum and decay constants of mesons consisting of c and b quarks with relativistic corrections is proposed. The dependence of the constituent mass of quarks on the current mass and on the orbital and radial quantum numbers is analytically derived. The mass and the wave function of mesons are determined from the Schrödinger equation with a mass of constituent particles. We calculate the splitting of the mass spectrum for the singlet and triplet states of mesons, as well as determine the width of the lepton and radiation decays due to $E1$ transition for $(\bar{c}c)$, $(\bar{b}b)$ and $(\bar{b}c)$ systems. Our results for the mass spectrum of mesons consisting of c and b quarks are in satisfactory agreement with the available experimental data.

PACS: 36.10.Dr; 12.20.Ds; 31.30.Jv; 11.10.St

ВВЕДЕНИЕ

Энергетический спектр связанного состояния может быть определен с хорошей точностью в рамках нерелятивистской квантовой механики (НКМ) при надлежащем подборе потенциала взаимодействия. Однако нерелятивистское уравнение Шредингера (УШ), дающее математически корректное описание связанных состояний, уже не является достаточным, так как требуется учет релятивистского характера взаимодействия, поскольку для описания современных экспериментальных результатов, полученных как в атомной [1], так и в адронной физике [2], требуется учет релятивистских поправок. Тем не менее нерелятивистское УШ является надежным инструментом исследования и определения энергетического спектра связанных состояний. При этом реальные релятивистские поправки малы, так что теоретическая задача сводится к получению релятивистских поправок к нерелятивистскому потенциалу взаимодействия исходя из формализма квантовой теории поля (КТП). Эта идея лежит в основе потенциала Брейта [3] и эффективной нерелятивистской квантовой теории поля Касвелла и Лепажа [4]. Оба эти подхода используют матрицу рассеяния как источник искомых поправок. Авторами работы [4], в рамках квантовой электродинамики (КЭД), с учетом перенормировки и последующим переходом к нерелятивистскому пределу изучена матрица рассеяния с соответствующими диаграммами Фейнмана, т. е. определен потенциал взаимодействия с релятивистской поправкой. В результате сформулирован метод нерелятивистской КЭД (НКЭД) для определения энергетического спектра с релятивистской поправкой. В дальнейшем этот метод усовершенствован в [5]. Однако в этих работах релятивистские поправки в рамках теории возмущения учитываются в основном к потенциалу взаимодействия, а поправка к кинетической части гамильтониана взаимодействия почти не учитывается. Учет релятивистской поправки к кинетической части гамильтониана в обычном квантово-механическом формализме осуществляется только в рамках релятивистского УШ. Известно, что определение энергетического спектра и волновой функции (ВФ) связанного состояния, состоящего из нескольких тел, из релятивистского УШ с точки зрения математического вычисления почти невозможно. Поэтому учет релятивистской поправки при определении свойств релятивистского связанного состояния как потенциальной, так и кинетической частей гамильтониана взаимодействия является одной из актуальных проблем современного теоретического исследования.

В работах [6–9] предложен один из вариантов учета релятивистской поправки к кинетической части гамильтониана и потенциального взаимодействия. В этом подходе масса связанного состояния определяется асимптотическим поведением корреляционной функции от соответствующих токов с необходимыми квантовыми числами. Корреляционная функция, которая выражается через квантово-полевые функции Грина, представляется в форме функционального интеграла, что позволяет выделить необходимую асимптотику. Кроме того, усреднение по внешнему калибровочному полю может быть выполнено точно. Полученное представление похоже на фейнмановский функциональный интеграл по путям [10] в нерелятивистской квантовой механике (КМ). При этом потенциал взаимодействия определяется диаграммой Фейнмана, полученный в результате обмена калибровочного поля, а масса в УШ является конституентной и отличается от массы исходного состояния данной системы, т. е. кинетическая часть гамильтониана выражается через конституентную массу составных частиц. Таким образом, благодаря конституентной массе составных частиц учитываются релятивистские поправки к кинетической части гамильтониана взаимодействия.

Работа построена следующим образом: в разд. 1 кратко изложен метод определения масс и энергетического спектра связанного состояния с учетом релятивистской поправки к кинетической части гамильтониана; в разд. 2 приведены точность вычисления и параметры подхода; в разд. 3 определены массовые спектры мезонов с орбитальным и радиальным возбуждениями; в разд. 4 найдена ширина лептонного и радиационного распадов мезона; в заключении подытожены основные результаты работы; в приложениях представлены детали вычисления.

1. СВЯЗАННОЕ СОСТОЯНИЕ В ФУНКЦИОНАЛЬНОМ ПОДХОДЕ

Кратко изложим детали нашего подхода. Пусть $J(x) = \Phi^+(x)\Phi(x)$ — ток скалярных заряженных частиц. Если пренебречь аннигиляционным каналом, то рассматриваемые корреляторы удобно представить как усреднение по калибровочному полю $A_\alpha(x)$, произведения функции Грина $G_m(x,y|A)$ скалярных частиц во внешнем калибровочном поле:

$$\Pi(x-y) = \langle J(x)J(y)\rangle = \langle \Phi^+(x)\Phi(x)\Phi^+(y)\Phi(y)\rangle = \langle G_{m_1}(x,y|A)G_{m_2}(y,x|A)\rangle_A. \quad (1.1)$$

Функция Грина $G_m(x,y|A)$ для скалярной частицы во внешнем калибровочном поле определяется уравнением

$$\left[\left(i\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \frac{g}{c\hbar}A_\alpha(x)\right)^2 + \frac{c^2m^2}{\hbar^2}\right] G_m(x,y|A) = \delta(x-y). \quad (1.2)$$

Решение уравнения (1.2) представляется в виде функционального интеграла (детали см. в [11]):

$$G_m(x,y|A) = \int\limits_0^\infty \frac{ds}{(4s\pi)^2}\exp\left[-sm^2 - \frac{(x-y)^2}{4s}\right] \times \\ \times \int d\sigma_\beta \exp\left[ig\int\limits_0^1 d\xi \frac{\partial Z_\alpha(\xi)}{\partial\xi}A_\alpha(\xi)\right], \quad (1.3)$$

здесь введены обозначения:

$$\begin{gathered} Z_\alpha(\xi) = (x-y)_\alpha\xi + y_\alpha - 2\sqrt{s}B_\alpha(\xi), \\ d\sigma_\beta = N\delta B_\beta \exp\left[-\frac{1}{2}\int\limits_0^1 d\xi \dot{B}^2(\xi)\right] \end{gathered} \quad (1.4)$$

с нормировкой

$$B_\beta(0) = B_\beta(1) = 0 \quad \text{и} \int d\sigma_\beta = 1,$$

где N — константа нормировки. Масса связанного состояния определяется как предел:

$$M = -\lim_{|x-y|\to\infty}\frac{\ln\Pi(x-y)}{|x-y|}. \quad (1.5)$$

Таким образом, для определения массы M нам нужно вычислить корреляционную функцию $\Pi(x)$ в асимптотической области $|x| \to \infty$. Подставляя (1.3) в (1.1) и проводя усреднение по внешнему калибровочному полю, получаем

$$\Pi(x) = \iint\limits_0^\infty \frac{d\mu_1\,d\mu_2}{(8\pi^2x)^2} J(\mu_1,\mu_2)\exp\left[-\frac{|x|}{2}\left(\frac{m_1^2}{\mu_1}+\mu_1\right) - \frac{|x|}{2}\left(\frac{m_2^2}{\mu_2}+\mu_2\right)\right]. \quad (1.6)$$

Здесь

$$J(\mu_1, \mu_2) = N_1 N_2 \iint \delta r_1 \delta r_2 \exp\left\{-\frac{1}{2}\int\limits_0^x d\tau\,\left[\mu_1 \dot{r}_1^2(\tau) + \mu_2 \dot{r}_2^2(\tau)\right]\right\} \mathrm{e}^{-W},$$
$$W = W_{1,1} + W_{2,2} - 2W_{1,2}, \tag{1.7}$$

где введены следующие обозначения:

$$W_{i,j} = \frac{g^2}{2}(-1)^{i+j}\int\limits_0^x\int\limits_0^x d\tau_1\, d\tau_2 \dot{Z}_\alpha^{(i)}(\tau_1) D_{\alpha\beta}\left(Z^{(i)}(\tau_1) - Z^{(j)}(\tau_2)\right)\dot{Z}_\beta^{(j)}(\tau_2). \tag{1.8}$$

Уравнение (1.7) имеет смысл квантовой функции Грина в форме функционального интеграла Фейнмана, когда две частицы с массами μ_1 и μ_2 взаимодействуют посредством нелокального потенциала W. Поэтому будем называть массы m_1 и m_2 токовыми, а параметры μ_1 и μ_2 — конституентными массами. Отметим, что в (1.7) функциональное интегрирование проводится по четырехмерным векторам $r_1 = (\mathbf{r}_1, r_1^{(4)})$ и $r_2 = (\mathbf{r}_2, r_2^{(4)})$. При этом величина $W_{i,j}$ определяется вкладом всевозможных типов диаграмм Фейнмана. Существуют два типа взаимодействия: первый — взаимодействие составляющих частиц посредством калибровочного поля, вклад которого определяется непосредственно $W_{1,2}$; второй — взаимодействие составляющих частиц самих с собой, т. е. диаграмма собственной энергии, вклад которой определяется $W_{1,1}$, $W_{2,2}$. В нерелятивистском пределе величина $W_{1,2}$ соответствует потенциальному взаимодействию, а $W_{1,1}$, $W_{2,2}$ — непотенциальным взаимодействиям, которые определяют вклад в перенормировку масс частиц. В асимптотике $|x| \to \infty$ интеграл (1.7) ведет себя как

$$\lim_{|x|\to\infty} J(\mu_1, \mu_2) \Longrightarrow \exp\left[-x\, E(\mu_1, \mu_2)\right], \tag{1.9}$$

где функция $E(\mu_1, \mu_2)$ зависит от константы связи g и от параметров μ_1, μ_2, а также не зависит от масс m_1, m_2. При $|x| \to \infty$ интеграл (1.6) вычисляется методом перевала. Масса связанного состояния определяется точкой перевала:

$$M = \frac{1}{2}\min_{\mu_1,\mu_2}\left\{\frac{m_1^2}{\mu_1} + \mu_1 + \frac{m_2^2}{\mu_2} + \mu_2 + 2E(\mu_1, \mu_2)\right\}. \tag{1.10}$$

Таким образом, проблема свелась к вычислению функционального интеграла (1.7). В настоящее время точные математические методы вычисления этого интеграла отсутствуют. Поэтому надо привлекать различные физические предположения или приближения, чтобы как-то выполнить интегрирования по четвертым компонентам $r_1^{(4)}$, $r_2^{(4)}$. Выполнение интегрирования по четвертым компонентам эффективно соответствует переходу к нерелятивистскому пределу. Другими словами, определяется потенциал взаимодействия с поправками, учитывающий непертурбативность, релятивизм и нелокальный характер взаимодействия. В частности, если в функционале $W_{i,j}$ в (1.8) пренебречь зависимостью от $r_1^{(4)}$ и $r_2^{(4)}$, то система (1.7) сводится к фейнмановскому интегралу по траекториям для движения скалярных частиц с массами μ_1, μ_2 в НКМ [10] с локальным потенциалом. В этом приближении, согласно (1.7), гамильтониан взаимодействия скалярных частиц с массами μ_1 и μ_2 записывается в виде

$$H = \frac{1}{2\mu_1}\mathbf{P}_1^2 + \frac{1}{2\mu_2}\mathbf{P}_2^2 + V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \tag{1.11}$$

где $V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ — потенциал взаимодействия, который выражается через $W_{i,j}$, тогда $E(\mu_1, \mu_2)$ является собственным значением гамильтониана взаимодействия (1.11), т. е.

$$H\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = E(\mu_1, \mu_2)\,\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2). \tag{1.12}$$

Тогда из условия минимума (1.10) получаем уравнение для μ_j:

$$\mu_j - \frac{m_j^2}{\mu_j} + 2\mu_j \frac{dE(\mu_1, \mu_2)}{d\mu_j} = 0, \qquad j = 1, 2. \tag{1.13}$$

Параметры μ_1, μ_2 имеют размерность массы. Для дальнейших вычислений вводим новый параметр

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}. \tag{1.14}$$

Тогда выражение (1.10) принимает вид

$$M = \mu_1 + \mu_2 + \mu\frac{dE}{d\mu} + E(\mu), \quad E(\mu_1, \mu_2) = E(\mu), \tag{1.15}$$

где

$$\mu_1 = \sqrt{m_1^2 - 2\mu^2\frac{dE}{d\mu}}, \qquad \mu_2 = \sqrt{m_2^2 - 2\mu^2\frac{dE}{d\mu}}. \tag{1.16}$$

В нашем подходе энергетический спектр и ВФ связанного состояния определяются из УШ с конституентной массой μ. Поправка, связанная с релятивистской природой взаимодействия, учитывается не только поправками к потенциалу взаимодействия, но и через параметры μ_1 и μ_2 (конституентные массы), которые представлены в (1.10) и (1.16). Поэтому, используя стандартные потенциалы для описания свойств атомных и адронных связанных состояний, которые определены различными авторами, из УШ с конституентной массой сможем определить спектр с релятивистской поправкой. В функционале (1.8) необходимо исключить зависимость от $r_1^{(4)}, r_2^{(4)}$, тогда получаем нерелятивистский потенциал плюс непертурбативную и релятивистскую поправки. Если константа связи мала, тогда в низшем приближении по теории возмущения можно выполнить интегрирование по четвертым компонентам $r_1^{(4)}$, $r_2^{(4)}$ в (1.7) (детали см. в [8]).

2. ТОЧНОСТЬ ВЫЧИСЛЕНИЯ И ПАРАМЕТРЫ ПОДХОДА

Наш подход посвящен учету релятивистской поправки к энергетическому и массовому спектрам связанного состояния. В этом случае подразумевается, что полученные авторами статьи результаты согласуются с результатами релятивистских подходов. Известно, что энергетический спектр атома водорода определяется из уравнений Дирака [3, 12] при условии, что масса ядра $m_N = \infty$. Поэтому в рамках нашего подхода определим энергетический спектр атома водорода. В этом случае потенциал взаимодействия является кулоновским, и из УШ с конституентной массой для энергетического спектра получаем

$$E(\mu) = -\frac{\alpha_{\mathrm{em}}^2}{2n^2}\mu. \tag{2.1}$$

Учитывая (1.14), (1.16) и (2.1), из (1.15) в случае $m_1 = m_N = \infty$ и $m_2 = m_e$ для энергии связи имеем

$$E_{bin} = \sqrt{m_e^2 - 2\mu^2\frac{dE}{d\mu}} + \mu\frac{dE}{d\mu} + E(\mu) = m_e\sqrt{1 - \frac{Z^2\alpha^2}{n^2}}. \tag{2.2}$$

Эти результаты точно совпадают с результатами, которые получены из уравнения Дирака для основного состояния. Таким образом, можно утверждать, что учет релятивистской поправки к кинетической части гамильтониана взаимодействия обеспечивает хорошее согласие с точными значениями, которые получены из релятивистского уравнения.

Далее определим массовый спектр и ВФ мезонов, состоящих из c- и b-кварков. Свойства мезонов рассматриваются многочисленными авторами в рамках различных подходов. Однако массы кварков как в феноменологических потенциальных моделях [13, 14], так и в полевых подходах [15] выбираются как свободные параметры. В настоящее время экспериментально [2] установлены следующие ограничения для масс кварков:

$$\begin{aligned} m_u &= 2{,}3^{+0{,}7}_{-0{,}5}\ \text{МэВ}, & m_d &= 4{,}8^{+0{,}7}_{-0{,}3}\ \text{МэВ}, \\ m_s &= (95 \pm 5)\ \text{МэВ}, & m_c &= (1{,}275 \pm 0{,}025)\ \text{ГэВ}, \\ m_b(\overline{MS}) &= (4{,}18 \pm 0{,}03)\ \text{ГэВ}, & m_b(1S) &= (4{,}65 \pm 0{,}03)\ \text{ГэВ}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Тем не менее в подходах, которые успешно описывают массовые спектры и другие свойства адронов, массы кварков, полученные в результате фитирования, отличаются от данных, приведенных в (2.3). В частности, в [16] в результате фитирования для масс кварков получены следующие значения:

$$m_{u,d} = 0{,}33\ \text{ГэВ}, \quad m_s = 0{,}55\ \text{ГэВ}, \quad m_c = 1{,}55\ \text{ГэВ}, \quad m_b = 4{,}85\ \text{ГэВ}. \tag{2.4}$$

Из (2.3) и (2.4) видно, что разность масс для легких кварков сильно отличается, а для тяжелых кварков эта разность не так велика. Более того, фитированные значения для масс кварков у различных авторов отличаются.

В нашем подходе конституентную массу вычисляем аналитически. Из (1.16) видно, что конституентные массы выражаются через энергетические спектры E системы. Энергетические спектры обычно зависят от конкретного вида потенциала взаимодействия. В частности, спин-спиновое взаимодействие в нашем случае приводит к синглет-триплетному расщеплению не только масс связанного состояния, но и конституентных масс составляющих частиц. Таким образом, в нашем подходе энергетический спектр и ВФ адронов определяются из УШ с конституентной массой составляющих частиц. Поэтому в нашем случае массы кварков не являются свободными параметрами и для каждого состояния вычисляются. Значение бегущей константы кварк-глюонного взаимодействия определяется следующим образом:

$$\alpha_s = \frac{4\pi}{\beta_0 \ln\left(\dfrac{\mu_{12}^2}{\Lambda^2}\right)}, \qquad \beta_0 = 11 - \frac{2}{3}n_f, \qquad \mu_{12} = \frac{2\mu_1\mu_2}{\mu_1+\mu_2}, \tag{2.5}$$

где n_f — аромат квантового числа и $\Lambda = 0{,}168$ ГэВ — шкала конфайнмента тяжелых кварков. В соответствии с (2.3), для токовых масс кварков используем значения: $m_c = 1{,}275$ ГэВ и $m_b = 4{,}62$ ГэВ. Теперь приступим к определению массового спектра и других характеристик мезонов, состоящих из c- и b-кварков.

3. МАССОВЫЙ СПЕКТР МЕЗОНОВ С ОРБИТАЛЬНЫМ И РАДИАЛЬНЫМ ВОЗБУЖДЕНИЯМИ

3.1. Гамильтониан взаимодействия. Здесь мы определяем массовый спектр чармония, боттомония и B_c-мезонов с учетом спин-спинового и спин-орбитального взаимодействий из УШ с конституентной массой. Полный гамильтониан взаимодействия кварков представляется в виде

$$H = H_c + H_{\rm spin}, \tag{3.1}$$

где H_c является центральным гамильтонианом:

$$H_c = \frac{1}{2\mu}\mathbf{P}^2 + \sigma\, r - \frac{4}{3}\frac{\alpha_s}{r}. \tag{3.2}$$

Вторая часть гамильтониана описывает спин-орбитальное взаимодействие и записывается в стандартном виде (более детально см. в [17, 18]):

$$H_{\rm spin} = H_{\rm SS} + H_{\rm LS} + H_{\rm TT}, \tag{3.3}$$

где $H_{\rm SS}$ — гамильтониан спин-спинового взаимодействия:

$$H_{\rm SS} = \frac{2}{3\mu_1\,\mu_2}(\mathbf{S_1}\cdot\mathbf{S_2})\,\Delta V_{\rm v} = -\frac{8\,\alpha_s\,(\mathbf{S_1}\cdot\mathbf{S_2})}{9\mu_1\mu_2}\Delta\Big(\frac{1}{r}\Big); \tag{3.4}$$

$H_{\rm LS}$ — гамильтониан, описывающий спин-орбитальное взаимодействие:

$$\begin{aligned} H_{LS} = \frac{1}{4\mu_1^2\,\mu_2^2}\frac{1}{r}\Big\{ & \big[\big((\mu_1+\mu_2)^2 + 2\mu_1\mu_2\big)(\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}_+) + (\mu_1^2-\mu_2^2)(\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}_-)\big]\,\frac{\partial}{\partial r}V_{\rm v} - \\ & - \big[(\mu_1^2+\mu_2^2)(\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}_+) + (\mu_1^2-\mu_2^2)(\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}_-)\big]\,\frac{\partial}{\partial r}V_s\Big\}; \end{aligned} \tag{3.5}$$

наконец, $H_{\rm TT}$ — тензорный гамильтониан взаимодействия:

$$H_{\rm TT} = \frac{1}{12\mu_1\mu_2}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}V_{\rm v} - \frac{\partial^2}{\partial r^2}V_{\rm v}\right]\; S_{12}. \tag{3.6}$$

В (3.4)–(3.6) $V_{\rm v}$ — векторный потенциал, соответствующий одноглюонному обмену:

$$V_{\rm v} = -\frac{4\alpha_s}{3}\frac{1}{r}, \tag{3.7}$$

а V_s — потенциал конфайнмента:

$$V_s = r\sigma, \tag{3.8}$$

также использованы следующие обозначения:

$$\begin{gathered}\mathbf{S}_+ = \mathbf{S_1} + \mathbf{S_2}\ ; \quad \mathbf{S}_- = \mathbf{S_1} - \mathbf{S_2}, \\ S_{12} = \frac{4}{(2\ell+3)(2\ell-1)}\left[\mathbf{L}^2\mathbf{S}^2 - \frac{3}{2}(\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}) - 3(\mathbf{L}\cdot\mathbf{S})^2\right].\end{gathered} \tag{3.9}$$

С помощью выражений (3.1)–(3.9) для гамильтониана взаимодействия вычислим массовый спектр мезонов.

3.2. Определение энергетического спектра мезонов. Прежде всего из УШ

$$H\Psi = E\Psi, \tag{3.10}$$

согласно (1.11), (1.12) определим энергетический спектр и ВФ. Для этого из (3.10) используем метод осцилляторного представления (ОП). Перед тем как определить энергетический спектр и ВФ из УШ с помощью метода ОП [19], уместно напомнить, что этот метод основан на идеях и методах квантовой теории скалярного поля. Одно из существенных отличий КТП от КМ состоит в том, что квантованные поля, представляющие набор бесконечного числа осцилляторов для основного состояния или вакуума, при квантово-полевом взаимодействии сохраняют свою осцилляторную природу. В КМ собственные функции для большинства потенциалов, как правило, отличаются от гауссовского поведения осцилляторной волновой функции. Поэтому для применения методов и идей КТП к решению квантово-механических задач следует в исходном радиальном УШ провести замену переменных таким образом, чтобы искомая волновая функция на больших расстояниях обладала гауссовским поведением, а трансформированное уравнение идентифицировать с радиальным УШ в пространстве с большой размерностью. Отметим, что впервые похожая идея обсуждалась Х. Фоком при решении задачи о спектре водорода с помощью трансформации в четырехмерное пространство импульсов [20].

В соответствии с изложенным выше проведем замену переменных следующим образом (детали см. в [8, 19, 21]):

$$r = q^{2\rho}, \qquad \Psi \Rightarrow \Psi(q^2) = q^{2\rho\ell}\Phi(q^2). \tag{3.11}$$

Используя атомную систему единиц ($\hbar = c = 1$), учитывая (3.1)–(3.9) и произведя некоторые стандартные упрощения, из (3.10) получаем для модифицированного УШ

$$\begin{aligned}\Bigg\{ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial q^2} + \frac{d-1}{q}\frac{\partial}{\partial q}\right) - 4\rho^2\mu E q^{2(2\rho-1)} + 4\rho^2\mu\sigma q^{2(3\rho-1)} - \\ - \frac{16\rho^2\mu\alpha_s}{3}\, q^{2(\rho-1)} + \frac{64\alpha_s\mu\rho^2\ell}{9\mu_1\mu_2\, q^{2(\rho+1)}}\,(\mathbf{S}_1\cdot\mathbf{S}_2) - \\ - \frac{\sigma\rho^2\mu}{\mu_1^2\mu_2^2} q^{2(\rho-1)}\left[\left((\mu_1^2+\mu_2^2)\right)(\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}_+) + (\mu_1^2-\mu_2^2)(\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}_-)\right] + \frac{4\mu\rho^2\alpha_s}{3\mu_1\mu_2}\frac{S_{12}}{q^{2(\rho+1)}} + \\ + \frac{4\mu\rho^2\alpha_s}{3\mu_1^2\mu_2^2 q^{2(\rho+1)}}\left[\left((\mu_1+\mu_2)^2 + 2\mu_1\mu_2\right)(\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}_+) + (\mu_1^2-\mu_2^2)(\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}_-)\right]\Bigg\}\Phi(q^2) = 0,\end{aligned} \tag{3.12}$$

где d — размерность вспомогательного пространства:

$$d = 2 + 2\rho + 4\rho\ell. \tag{3.13}$$

В результате замены переменных имеем модифицированное УШ в d-мерном вспомогательном пространстве R^d. Из (3.12) и (3.13) следует, что орбитальное квантовое число ℓ вошло в определение размерности пространства d. Данный прием позволяет определить все интересующие нас характеристики, а именно: спектр и ВФ с решением модифицированного УШ только для основного состояния в d-мерном вспомогательном пространстве R^d. Исходя из модифицированного УШ

$$H\Phi(q) = \varepsilon(E)\ \Phi(q), \tag{3.14}$$

согласно (3.12), получаем, что энергетический спектр $\varepsilon(E)$ в R^d равен нулю:

$$\varepsilon(E) = 0. \tag{3.15}$$

Рассмотрим это соотношение как условие определения энергетического спектра E исходного гамильтониана. В методе ОП канонические переменные представим через операторы рождения a^+ и уничтожения a и, упорядочивая по этим операторам, получаем для гамильтониана взаимодействия:

$$H = H_0 + \varepsilon_0(E) + H_I, \tag{3.16}$$

здесь H_0 является гамильтонианом свободных осцилляторов:

$$H_0 = \omega(a_j^+ a_j) \tag{3.17}$$

и ε_0 — энергией основного состояния в нулевом приближении ОП:

$$\begin{aligned}\varepsilon_0(E) = \frac{d\omega}{4} - \frac{4\rho^2 E\mu}{\omega^{2\rho-1}}\frac{\Gamma(d/2+2\rho-1)}{\Gamma(d/2)} - \frac{16\alpha_s\mu\rho^2}{3\omega^{\rho-1}}\frac{\Gamma(d/2+\rho-1)}{\Gamma(d/2)} + \\ + \frac{4\rho^2\sigma\mu}{\omega^{3\rho-1}}\frac{\Gamma(d/2+3\rho-1)}{\Gamma(d/2)} + \frac{64\alpha_s\mu\rho^2\ell}{9\mu_1\,\mu_2}\frac{(\mathbf{S}_1\cdot\mathbf{S}_2)\omega^{\rho+1}\Gamma(d/2-\rho-1)}{\Gamma(d/2)} - \\ - \frac{\rho^2\sigma\mu}{M_1^2\omega^{\rho-1}}\frac{\Gamma(d/2+\rho-1)}{\Gamma(d/2)} + \frac{4\alpha_s\mu\rho^2 S_{12}}{3\mu_1\mu_2}\frac{\omega^{\rho+1}\Gamma(d/2-\rho-1)}{\Gamma(d/2)} + \\ + \frac{4\alpha_s\mu\rho^2}{3M_2^2}\frac{\omega^{\rho+1}\Gamma(d/2-\rho-1)}{\Gamma(d/2)},\end{aligned} \tag{3.18}$$

где ω — частота осциллятора, которая пока неизвестна. Здесь использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned}\frac{1}{M_1^2} &= \frac{1}{\mu_1^2\mu_2^2}\left[(\mu_1^2+\mu_2^2)(\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}_+) + (\mu_1^2-\mu_2^2)(\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}_-)\right], \\ \frac{1}{M_2^2} &= \frac{1}{\mu_1^2\mu_2^2}\left[\left((\mu_1+\mu_2)^2 + 2\mu_1\mu_2\right)(\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}_+) + (\mu_1^2-\mu_2^2)(\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}_-)\right].\end{aligned} \tag{3.19}$$

Гамильтониан взаимодействия H_I также представляется в нормальной форме по операторам рождения a^+ и уничтожения a, причем он не содержит квадратичных слагаемых по каноническим переменным:

$$\begin{aligned}H_I = \int\limits_0^\infty dx \int \left(\frac{d\eta}{\sqrt{\pi}}\right)^d \exp\left\{-\eta^2(1+x)\right\} : \mathrm{e}_2^{-i\sqrt{x\omega}(q\eta)} : \times \\ \times \left[-\frac{4\rho^2\mu}{\omega^{2\rho-1}}\frac{Ex^{-2\rho}}{\Gamma(1-2\rho)} + \frac{4\rho^2\mu}{\omega^{3\rho-1}}\frac{\sigma x^{-3\rho}}{\Gamma(1-3\rho)} - \frac{16\alpha_s\mu\rho^2}{3\omega^{\rho-1}}\frac{x^{-\rho}}{\Gamma(1-\rho)} - \right. \\ - \frac{\sigma\rho^2\mu}{M_1^2\omega^{\rho-1}}\frac{x^{-\rho}}{\Gamma(1-\rho)} + \frac{4\rho^2\mu\alpha_s S_{12}}{3\mu_1\mu_2}\frac{\omega^{\rho+1}x^\rho}{\Gamma(1+\rho)} + \frac{4\rho^2\mu\alpha_s}{3M_2^2}\frac{\omega^{\rho+1}x^\rho}{\Gamma(1+\rho)} + \\ \left. + \frac{64\rho^2\mu\alpha_s\ell\,(\mathbf{S}_1\cdot\mathbf{S}_2)}{9\mu_1\mu_2}\frac{\omega^{\rho+1}x^\rho}{\Gamma(1+\rho)}\right]. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Здесь : : является символом нормального упорядочивания и использовано обозначение

$$\mathrm{e}_2^{-x} = \mathrm{e}^{-x} - 1 + x - \frac{1}{2}x^2.$$

Некоторые детали представления гамильтониана H_I в нормальной форме приведены в [19].

Вклад гамильтониана взаимодействия H_I рассматривается как малое возмущение. В КТП после представления канонических переменных через операторы рождения и уничтожения гамильтониана взаимодействия в нормальной форме требование отсутствия в нем полевых операторов второй степени по существу эквивалентно перенормировкам константы связи и ВФ [22–24]. Более того, такая процедура позволяет учесть основной вклад через перенормировку масс и энергию вакуума. Другими словами, все квадратичные формы полностью включены в гамильтониан свободного осциллятора. Данное требование позволяет сформировать, согласно ОП, условие [19]

$$\frac{\partial\varepsilon_0(E)}{\partial\omega} = 0 \tag{3.21}$$

с целью найти частоту ω осциллятора, которая определяет основной квантовый вклад. Учитывая (3.18), из уравнений (3.15) и (3.21) можно вычислить энергетический спектр E исходной системы. В рамках ОП для различных потенциалов [8] неоднократно проверялось, что поправка первого порядка, связанная с гамильтонианом взаимодействия, тождественно равна нулю, а поправка второго порядка меньше 1 %. Поэтому ограничимся рассмотрением только нулевого приближения в ОП.

3.3. Определение массового спектра мезонов для основного состояния. Теперь приступим к определению массового спектра и ВФ мезонов, состоящих из b- и c-кварков. Рассмотрим основные состояния, т. е. определим свойства η_c, J/ψ, η_b, Υ и B_c-мезонов только с учетом спин-спинового взаимодействия. Из (3.19) для основного состояния имеем

$$\varepsilon_0(E) = \frac{d\omega}{4} - \frac{4\rho^2 E\mu}{\omega^{2\rho-1}}\frac{\Gamma(3\rho)}{\Gamma(1+\rho)} - \frac{16\alpha_s\mu\rho^2}{3\omega^{\rho-1}}\frac{\Gamma(2\rho)}{\Gamma(1+\rho)} + \\ + \frac{4\rho^2\sigma\mu}{\omega^{3\rho-1}}\frac{\Gamma(4\rho)}{\Gamma(1+\rho)} + \frac{16\alpha_s\mu\rho\omega^{\rho+1}}{3\mu_1\mu_2}\frac{[s(s+1)-3/2]}{\Gamma(1+\rho)}, \quad (3.22)$$

где s — спин мезонов, который принимает значения $0, 1$. Учитывая (3.22), из системы уравнений (3.15) и (3.21) получаем для частоты осциллятора

$$\omega^{3\rho} - \frac{16\alpha_s\rho^2\omega^{2\rho}\mu}{3}\frac{\Gamma(2\rho)}{\Gamma(2+\rho)} - \frac{4\rho^2\mu\sigma\Gamma(4\rho)}{\Gamma(2+\rho)} + \frac{16\alpha_s\rho\mu}{3\mu_1\mu_2}\frac{\omega^{4\rho}[s(s+1)-3/2]}{\Gamma(2+\rho)} = 0 \quad (3.23)$$

и для энергии основного состояния

$$E = \min_\rho\left\{\frac{\omega^{2\rho}\Gamma(2+\rho)}{8\rho^2\mu\Gamma(3\rho)} - \frac{4\alpha_s\omega^\rho\Gamma(2\rho)}{3\Gamma(3\rho)} + \frac{\sigma\Gamma(4\rho)}{\omega^\rho\Gamma(3\rho)} + \frac{4\alpha_s[s(s+1)-3/2]\omega^{3\rho}}{9\rho\mu_1\mu_2\Gamma(3\rho)}\right\}. \quad (3.24)$$

Массы синглетных и триплетных состояний и конституентные массы составляющих частиц определяются из уравнений, представленных в (1.15) и (1.13) соответственно. Полученные численные результаты приведены в табл. 1.

Из табл. 1 видно, что конституентная масса кварков (μ_c, μ_b) больше, чем токовая масса (m_c, m_b). Согласно (2.5), с изменением конституентной массы кварков бегущие

Таблица 1. **Массовый спектр мезонов, состоящих из b- и c-кварков. Экспериментальные данные из [2]**

Спин	Параметр	$(\bar{c}c)$	$(\bar{b}b)$	$(\bar{b}c)$
$s=0$	m_c, ГэВ	1,275	—	1,275
	m_b, ГэВ	—	4,62	4,62
	α_s	0,30366	0,194679	0,248935
	σ, ГэВ^2	0,195	0,153	0,195
	E, ГэВ	0,413530	0,157253	0,363173
	ρ	0,526448	0,651103	0,46495
	ω^ρ, ГэВ	0,652	1,164	0,648335
	μ_c, ГэВ	1,42862	—	1,51306
	μ_b, ГэВ	—	4,73493	4,68082
	$M_{\rm our}$, МэВ	2980,05	9400,04	6277,3
	$M_{\rm exp}$, МэВ	$2981{,}3 \pm 1{,}1$	$9390{,}9 \pm 2{,}8$	6277 ± 4
$s=1$	α_s	0,299085	0,194459	0,247683
	E, ГэВ	0,519023	0,216613	0,412532
	ρ	1,03926	1,24871	1,11493
	ω^ρ, ГэВ	1,4311	3,4511	2,0512
	μ_c, ГэВ	1,47617	—	1,53652
	μ_b, ГэВ	—	4,75281	4,71302
	$M_{\rm our}$, МэВ	3096,44	9460,3	6330,71
	$M_{\rm exp}$, МэВ	$3096{,}916 \pm 0{,}011$	$9460{,}3 \pm 0{,}26$	—

константы кварк-глюонного взаимодействия изменяются, соответствующие численные данные приведены в табл. 1. В ОП ВФ определяется через параметры ρ и ω, их численые значения для каждого состояния также приведены в табл. 1. Видно, что полученные значения для массы удовлетворительно согласуются с существующими экспериментальными данными.

3.4. Определение массового спектра с орбитальным возбуждением. Определим энергетический и массовый спектры мезонов, состоящих из c- и b-кварков, с орбитальным возбуждением. Прежде всего рассмотрим случай $s = 0$. После некоторых вычислений, учитывая (3.18), из (3.21) получаем уравнение для частоты осциллятора

$$\omega^{3\rho} - \frac{16\alpha_s\mu\rho^2}{3}\frac{\omega^{2\rho}\Gamma(2\rho+2\rho\ell)}{\Gamma(2+\rho+2\rho\ell)} - \frac{4\rho^2\mu\sigma\Gamma(4\rho+2\rho\ell)}{\Gamma(2+\rho+2\rho\ell)} - \frac{8\alpha_s\mu\rho}{\mu_1\mu_2}\frac{\omega^{4\rho}\Gamma(1+2\rho\ell)}{\Gamma(2+\rho+2\rho\ell)} = 0, \quad (3.25)$$

а для энергетического спектра имеем

$$E = \min_{\rho}\left\{\frac{\omega^{2\rho}\Gamma(2+\rho+2\rho\ell)}{8\rho^2\mu\Gamma(3\rho+2\rho\ell)} - \frac{4\alpha\omega^{\rho}\Gamma(2\rho+2\rho\ell)}{3\Gamma(3\rho+2\rho\ell)} + \frac{\sigma}{\omega^{\rho}}\frac{\Gamma(4\rho+2\rho\ell)}{\Gamma(3\rho+2\rho\ell)} - \frac{2\alpha_s}{3\rho\mu_1\mu_2}\frac{\omega^{3\rho}\Gamma(1+2\rho\ell)}{\Gamma(3\rho+2\rho\ell)}\right\}. \quad (3.26)$$

Учитывая (3.25), (3.26) и (1.13), из (1.15) определим массовый спектр мезонов с орбитальным возбуждением. Результаты численного вычисления представлены в табл. 2 и 3.

Далее приступим к вычислению энергетического спектра мезонов $s = 1$ триплетного состояния с орбитальным возбуждением. В этом случае уравнение для частоты осциллятора записывается в следующем виде:

$$\omega^{3\rho} - \omega^{2\rho}\frac{16\alpha_s\mu\rho^2}{3}\frac{\Gamma(2\rho+2\rho\ell)}{\Gamma(2+\rho+2\rho\ell)} - \frac{4\sigma\rho^2\mu\Gamma(4\rho+2\rho\ell)}{\Gamma(2+\rho+2\rho\ell)} - \omega^{2\rho}\frac{\sigma\rho^2\mu}{M_1^2}\frac{\Gamma(2\rho+2\rho\ell)}{\Gamma(2+\rho+2\rho\ell)} + \frac{8\alpha_s\mu\rho}{3\mu_1\mu_2}\frac{\omega^{4\rho}\Gamma(1+2\rho\ell)}{\Gamma(2+\rho+2\rho\ell)} + \frac{4\rho^2\alpha_s\mu}{\mu_1\mu_2}\frac{S_{12}\omega^{4\rho}\Gamma(2\rho\ell)}{\Gamma(2+\rho+2\rho\ell)} + \frac{4\rho^2\mu\alpha_s\omega^{4\rho}}{M_2^2}\frac{\Gamma(2\rho\ell)}{\Gamma(2+\rho+2\rho\ell)} = 0, \quad (3.27)$$

а для энергетического спектра получаем

$$E = \min_{\rho}\left\{\frac{\omega^{2\rho}\Gamma(2+\rho+2\rho\ell)}{8\rho^2\mu\Gamma(3\rho+2\rho\ell)} - \frac{4\alpha\omega^{\rho}\Gamma(2\rho+2\rho\ell)}{3\Gamma(3\rho+2\rho\ell)} + \frac{\sigma}{\omega^{\rho}}\frac{\Gamma(4\rho+2\rho\ell)}{\Gamma(3\rho+2\rho\ell)} + \frac{\alpha_s}{3M_2^2}\frac{\omega^{3\rho}\Gamma(2\rho\ell)}{\Gamma(3\rho+2\rho\ell)} - \frac{\sigma\omega^{\rho}}{4M_1^2}\frac{\Gamma(2\rho+2\rho\ell)}{\Gamma(3\rho+2\rho\ell)} + \frac{\alpha_s S_{12}}{3\mu_1\mu_2}\frac{\omega^{3\rho}\Gamma(2\rho\ell)}{\Gamma(3\rho+2\rho\ell)} + \frac{2\alpha_s}{9\rho\mu_1\mu_2}\frac{\omega^{3\rho}\Gamma(1+2\rho\ell)}{\Gamma(3\rho+2\rho\ell)}\right\}. \quad (3.28)$$

При конкретных значениях орбитального квантового числа ℓ из (3.19) определим значения M_1^2 и M_2^2. Полученные численные значения массового спектра для P- и D-состояний представлены в табл. 2 и 3 соответственно.

Таблица 2. **Массовый спектр чармония с орбитальным возбуждением. Экспериментальные данные из [2]**

Орбитальный момент	Параметр	$J=\ell-1$ $(S=1)$	$J=\ell+1$ $(S=1)$	$J=\ell$ $(S=0)$
$\ell=1$	α_s	0,3013	0,2981	0,2978
	E, ГэВ	0,923955	0,960388	0,945799
	ρ	0,808694	0,613677	0,230383
	ω^ρ, ГэВ	1,14386	0,618518	0,276542
	μ_c, ГэВ	1,45188	1,48592	1,48936
	M_{h_c}, МэВ	3495,5	3540,33	3526,6
$\ell=2$	α_s	0,2987	0,2944	0,2936
	E, ГэВ	1,2229	1,22267	1,21638
	ρ	0,612313	0,595989	1,39076
	ω^ρ, ГэВ	0,595536	0,560571	5,59744
	μ_c, ГэВ	1,53846	1,5278	1,5371
	M_{h_c}, ГэВ	3,81728	3,8145	3,81107

Таблица 3. **Массовый спектр боттомония с орбитальным возбуждением. Экспериментальные данные из [2]**

Орбитальный момент	Параметр	$J=\ell-1$ $(S=1)$	$J=\ell$ $(S=1)$	$J=\ell+1$ $(S=1)$	$J=\ell$ $(S=0)$
$\ell=1$	α_s	0,1944	0,1943	0,1943	0,1946
	E, ГэВ	0,635856	0,6479	0,669121	0,657241
	ρ	0,628027	0,780369	0,312187	0,0915
	ω^ρ, ГэВ	0,985258	1,36504	0,49	0,273495
	μ_c, ГэВ	4,7567	4,76124	4,76007	4,76134
	M_χ, МэВ	9879,78	9892,09	9913,24	9901,44
$\ell=2$	α_s	0,1939	0,1939	0,1939	0,1939
	E, ГэВ	0,906587	0,911645	0,916257	0,911824
	ρ	0,184697	0,177198	0,169101	0,0634526
	ω^ρ, ГэВ	0,327369	0,321223	0,315	0,2129
	μ_c, ГэВ	4,79492	4,79433	4,7926	4,7967
	M_χ, ГэВ	10,153	10,158	10,1625	10,1583

3.5. Массовый спектр мезонов с радиальным возбуждением. Здесь определим энергетический и массовый спектры мезонов с радиальным и орбитальным возбуждениями. Энергетический спектр вспомогательного пространства находим в следующем виде:

$$\varepsilon_n(E) = \varepsilon_0(E) + 2n_r\omega + \langle n_r|H_I|n_r\rangle, \tag{3.29}$$

где $\varepsilon_0(E)$ — энергия нулевого приближения в ОП, приведена в (3.22); гамильтониан H_I взаимодействия представлен в (3.20). Детали вычисления матричного элемента $\langle n_r|H_I|n_r\rangle$ приведены в приложении А. После некоторых упрощений для энергетического спектра с радиальным и орбитальным возбуждениями получаем

$$E_n = \min_{\rho}\left\{\frac{\omega^{2\rho}\Gamma(2+\rho+2\rho\ell)}{8\rho^2\mu\Gamma(3\rho+2\rho\ell)}\frac{1+\dfrac{4n_r}{1+\rho+2\rho\ell}}{\widetilde{W}_1} + \frac{\sigma\Gamma(4\rho+2\rho\ell)}{\omega^{\rho}\Gamma(3\rho+2\rho\ell)}\frac{\widetilde{W}_3}{\widetilde{W}_1}+\right.$$
$$+\frac{4\alpha_s[s(s+1)-1{,}5]}{9\rho\mu_1\mu_2}\frac{\omega^{3\rho}\Gamma(1+2\rho\ell)}{\Gamma(3\rho+2\rho\ell)}\frac{\widetilde{W}_4}{\widetilde{W}_1} - \frac{4\alpha_s\omega^{\rho}}{3}\frac{\Gamma(2\rho+2\rho\ell)}{\Gamma(3\rho+2\rho\ell)}\frac{\widetilde{W}_3}{\widetilde{W}_1}-$$
$$\left.-\frac{\sigma\omega^{\rho}}{4M_1^2}\frac{\Gamma(2\rho+2\rho\ell)}{\Gamma(3\rho+2\rho\ell)}\frac{\widetilde{W}_3}{\widetilde{W}_1} + \frac{\alpha_s\omega^{3\rho}}{3\mu_1\mu_2}\frac{S_{12}\Gamma(2\rho\ell)}{\Gamma(3\rho+2\rho\ell)}\frac{\widetilde{W}_4}{\widetilde{W}_1} + \frac{\alpha_s\omega^{3\rho}}{3M_2^2}\frac{S_{12}\Gamma(2\rho\ell)}{\Gamma(3\rho+2\rho\ell)}\frac{\widetilde{W}_4}{\widetilde{W}_1}\right\}. \quad (3.30)$$

В этом случае частота осциллятора определяется из уравнения

$$\omega^{3\rho} - \left(\frac{32\alpha_s\mu\rho^2}{3} + \frac{2\mu\rho^2\sigma}{M_1^2}\right)\frac{\omega^{2\rho}\Gamma(2\rho+2\rho\ell)}{\Gamma(2+\rho+2\rho\ell)}\frac{\widetilde{W}_{13}}{\widetilde{W}_{11}} + \frac{8\rho^2\mu\sigma\Gamma(4\rho+2\rho\ell)}{\Gamma(2+\rho+2\rho\ell)}\times$$
$$\times\frac{\widetilde{W}_{12}}{\widetilde{W}_{11}} + \frac{32\alpha_s\mu\rho[s(s+1)-1{,}5]}{9\mu_1\mu_2}\frac{\omega^{4\rho}\Gamma(1+2\rho\ell)}{\Gamma(2+\rho+2\rho\ell)}\frac{\widetilde{W}_{14}}{\widetilde{W}_{11}}+$$
$$+\frac{\omega^{4\rho}\Gamma(2\rho\ell)}{\Gamma(2+\rho2\rho\ell)}\frac{\widetilde{W}_{14}}{\widetilde{W}_{11}}\left(\frac{8\alpha_s\mu\rho^2S_{12}}{3\mu_1\mu_2} + \frac{8\alpha_s\mu\rho^2}{3M_2^2}\right), \quad (3.31)$$

Таблица 4. **Массовый спектр мезонов, состоящих из c- и b-кварков, с радиальным возбуждением. Экспериментальные данные из [2]**

Спин	Параметр	$(\bar{c}c)$	$(\bar{b}b)$	$(\bar{b}c)$
$s=0$	α_s	0,2745	0,19027	0,22974
	E, ГэВ	0,939195	0,704855	0,79797
	ρ	0,504507	0,45040495	0,537141
	ω^{ρ}, ГэВ	0,61426	0,913661	0,732053
	μ_c, ГэВ	1,79312	—	2,01377
	μ_b, ГэВ	—	5,115	4,841
	M_{our}, МэВ	3638,9	9992,76	6833,53
	M_{exp}, МэВ	$3638{,}9 \pm 1{,}3$	—	—
$s=1$	α_s	0,27479	0,18989	0,22996
	E, ГэВ	1,01391	0,728737	0,836904
	ρ	0,644051	0,452765	0,571577
	ω^{ρ}, ГэВ	0,629255	0,905397	0,73425
	μ_c, ГэВ	1,7888	—	2,03489
	μ_b, ГэВ	—	5,1501	4,896
	M_{our}, МэВ	3711,48	10023,3	6881,57
	M_{exp}, МэВ	$3686{,}109 \pm 0{,}012$	$10023{,}26 \pm 3{,}1$	—

здесь введены следующие обозначения:

$$\widetilde{W}_j = 1 + W_j, \quad j = 1, \ldots, 4, \quad \widetilde{W}_{11} = \widetilde{W}_1 + (2\rho - 1)\left(1 + \frac{4n_r}{1 + \rho + 2\rho\ell}\right),$$
$$\widetilde{W}_{13} = (2\rho - 1)\widetilde{W}_3 - (\rho - 1)\widetilde{W}_1, \quad \widetilde{W}_{12} = (2\rho - 1)\widetilde{W}_2 - (3\rho - 1)\widetilde{W}_1, \tag{3.32}$$
$$\widetilde{W}_{14} = (2\rho - 1)\widetilde{W}_4 + (\rho + 1)\widetilde{W}_1.$$

Используя (3.30) и (3.31), из (1.15) и (1.13) определяем массу мезона и конституентную массу кварков с радиальным возбуждением. Полученные результаты представлены в табл. 4.

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ШИРИНЫ ЛЕПТОННОГО И РАДИАЦИОННОГО РАСПАДОВ

Ширина лептонного распада векторных мезонов определяется стандартным образом:

$$\Gamma(V \to \ell\,\overline{\ell}) = \frac{16\pi\alpha_{\rm em}^2 e_Q^2}{M_V^2}|\Psi(0)|^2\left(1 - \frac{16\alpha_s}{3\pi}\right), \tag{4.1}$$

где $\alpha_{\rm em} = 1/137$ — константа электромагнитного взаимодействия; e_Q — электрический заряд кварка; M_V — масса векторного мезона, а $\Psi(0)$ — величина ВФ в начале координат. Детали определения $|\Psi_n(0)|^2$ величины с орбитальным и радиальным возбуждениями приведены в приложении Б. Таким образом, эту величину для основного состояния получаем из (Б.7):

$$|\Psi(0)|^2 = \frac{1}{4\pi}\frac{\omega^{3\rho}}{\rho\Gamma(3\rho)}. \tag{4.2}$$

С использованием $|\Psi_n(0)|^2$ константа лептонного распада векторных и псевдоскалярных мезонов определена в следующем виде:

$$f_p^{\rm NR} = f_v^{\rm NR} = \sqrt{\frac{12}{M_{p,v}}}|\Psi_{p,v}(0)|, \tag{4.3}$$

где $M_{p,v}$ — масса векторных и псевдоскалярных мезонов. Численные значения этих величин для основного состояния приведены в табл. 5.

Численные значения для константы распада векторных B_c^*- и псевдоскалярных B_c-мезонов приведены в табл. 6.

Теперь определим ширину радиационного распада, или вероятности $E1$-перехода. Матричные элементы $E1$-перехода от $(n^{2s+1}J)$, i к состоянию $(n'^{2s'+1}J')$, f определяются в виде

$$M(i \to f)_\mu = \delta_{s,s'}(-1)^{s+J+J'+1m'}k\sqrt{(2J+1)(2J'+1)(2\ell+1)(2\ell'+1)}\times$$
$$\times\begin{pmatrix} J' & 1 & J \\ -M' & \mu & M\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ell' & 1 & l \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ell & s & J \\ J' & 1 & \ell'\end{pmatrix} e_Q\, I_{i,f}, \tag{4.4}$$

Таблица 5. **Ширина лептонного распада**

Состояния	$\|\Psi_n(0)\|^2$, ГэВ^3	f, ГэВ	$\Gamma_{\rm our}$, кэВ	$\Gamma_{\rm exp}$, кэВ
$J/\psi(1S)$	0,1004	0,6	6,135	$5{,}55 \pm 0{,}14$
$\Upsilon(1S)$	0,5973	0,8704	1,330	$1{,}340 \pm 0{,}018$
$J/\psi(2S)$	0,02584	0,489	2,692	$2{,}35 \pm 0{,}04$
$\Upsilon(2S)$	0,1557	0,432	0,605	$0{,}612 \pm 0{,}011$

Таблица 6. **Константы распада векторных B_c^*- и псевдоскалярных B_c-мезонов (в МэВ)**

Константа	Наша модель	Нерелятивистская модель	Релятивистская модель	Феноменологическая модель
f_{B_c}	417	562	433	517
$f_{B_c^*}$	544	562	503	517

Таблица 7. **Радиационные переходы для $(c\bar{c})$- и $(b\bar{b})$-систем**

Переходы $i \to f$	k, МэВ	$I_{i,f}$, ГэВ$^{-1}$	$\Gamma_{\rm our}(i \to f)$, кэВ	$\Gamma_{\rm exp}(i \to f)$, кэВ
$\chi_{c_0} \to \gamma + J/\psi$	376,3	2,33	139,312	—
$\chi_{c_1} \to \gamma + J/\psi$	416,06	1,73	310,3	295,84
$\chi_{c_2} \to \gamma + J/\psi$	429,12	2,18	450,5	~ 500
$1^3D_1 \to \gamma + 1^1P_0$	308,22	1,78	267,92	~ 299
$1^3D_1 \to \gamma + 1^1P_1$	266,90	3,274	146,9	~ 99
$1^3D_1 \to \gamma + 1^1P_2$	253,13	2,751	3,54	$\sim 3{,}88$
$\chi_{b_0} \to \gamma + \Upsilon$	410,57	1,422	16,81	—
$\chi_{b_1} \to \gamma + \Upsilon$	422,366	1,57	66,9	—
$\chi_{b_2} \to \gamma + \Upsilon$	442,592	0,6644	22,97	—
$1^3D_1 \to \gamma + 1^1P_0$	269,544	0,1526	0,33	—
$1^3D_1 \to \gamma + 1^1P_1$	257,56	0,135	0,06	—
$1^3D_1 \to \gamma + 1^1P_2$	236,929	0,4988	0,024	—

в скобках обозначены символы $3j$, e_Q — электрический заряд кварка и $I_{i,f}$ — радиальный матричный элемент перехода $i \to f$:

$$I_{i,f} = \int_0^\infty dr\ r^2 \Psi^*_{n'\ell'}(r) r \Psi_{nl}(r). \tag{4.5}$$

Здесь Ψ — радиальные ВФ начального и конечного состояний. Тогда ширина радиационного распада определяется в виде

$$\Gamma(i \to f + \gamma) = \frac{4\alpha_{\rm em}\, e_Q^2}{3}(2J' + 1) S^E_{i,f}\, k^3\, |I_{i,f}|^2, \tag{4.6}$$

где k — импульс фотона

$$k = \frac{m_i^2 - m_f^2}{2m_i} \tag{4.7}$$

и m_i, m_f — массы начального и конечного состояния соответственно. Статистический фактор $S_{i,f}^E = S_{f,i}^E$ определяется в следующем виде:

$$S_{i,f}^E = \max\left(\ell, \ell'\right) \begin{Bmatrix} J & 1 & J' \\ \ell' & s & \ell \end{Bmatrix}^2 . \tag{4.8}$$

Таким образом, чтобы вычислить переходный матричный элемент, представленный в (4.4), нам необходимо определить $I_{i \to f}$. Детали вычисления приведены в приложении Б. Полученные численные значения радиационного распада приведены в табл. 7.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основании полученных результатов можно заключить следующее.

С учетом релятивистских поправок как в потенциале взаимодействия, так и в кинетической части гамильтониана через конституентные массы кварков определены энергетический спектр и ВФ мезонов, состоящих из c- и b-кварков, с учетом спин-спинового и спин-орбитального взаимодействия для орбитально и радиально возбужденных состояний. Полученные численные результаты для массы мезонов удовлетворительно согласуются с существующими экспериментальными данными.

В нашем подходе конституентные массы кварков не являются свободным параметром и определяются для каждого состояния по отдельности, также они отличаются от массы валентных кварков. Поэтому определенная бегущая константа кварк-глюонного взаимодействия α_s для каждого состояния разная. В нашем подходе параметр, тензор натяжения струны σ, который связан с конфайнментом кварков, является свободным параметром и для мезонов, состоящих из c-кварков, равен $\sigma = 0{,}195$ ГэВ^2, а для мезонов, состоящих из b-кварков, равен $\sigma = 0{,}153$ ГэВ^2.

Аналитически найдены значения ВФ в начале координат для основного и радиально-возбужденного состояний. Это позволяет рассчитать вероятности переходов между различными состояниями мезонов. Вычислены ширины лептонного и радиационного распадов векторных мезонов. Определены вероятности $E1$-перехода чармония и боттомония для различных состояний, а также константы распада векторных B_c^*- и псевдоскалярных B_c-мезонов. Полученные численные результаты удовлетворительно согласуются с существующими экспериментальными данными и результатами других теоретических работ.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Здесь представим некоторые детали вычисления матричного элемента $\langle n_r | H_I | n_r \rangle$. Гамильтониан взаимодействия представлен в (3.22), и соответсвующий матричный элемент записывается в виде

$$\langle n_r|H_I|n_r\rangle = \int\limits_0^\infty dx \int \left(\frac{d\eta}{\sqrt{\pi}}\right)^d \mathrm{e}^{-\eta^2(1+x)} \langle n_r| : \mathrm{e}_2^{-2i\sqrt{x\omega}(qn)} : |n_r\rangle \times$$
$$\times \left[-\frac{4\rho^2\mu}{\omega^{2\rho-1}}\frac{Ex^{-2\rho}}{\Gamma(1-2\rho)} + \frac{4\rho^2\mu}{\omega^{3\rho-1}}\frac{\sigma x^{-3\rho}}{\Gamma(1-3\rho)} - \frac{16\alpha_s\mu\rho^2}{3\omega^{\rho-1}}\frac{x^{-\rho}}{\Gamma(1-\rho)} - \right.$$
$$- \frac{\sigma\rho^2\mu}{M_1^2\omega^{\rho-1}}\frac{x^{-\rho}}{\Gamma(1-\rho)} + \frac{4\rho^2\mu\alpha_s S_{12}}{3\mu_1\mu_2}\frac{\omega^{\rho+1}x^{\rho}}{\Gamma(1+\rho)} + \frac{4\rho^2\mu\alpha_s}{3M_2^2}\frac{\omega^{\rho+1}x^{\rho}}{\Gamma(1+\rho)} +$$
$$\left. + \frac{64\rho^2\mu\alpha_s\ell(\mathbf{S}_1\cdot\mathbf{S}_2)}{9\mu_1\mu_2}\frac{\omega^{\rho+1}x^{\rho}}{\Gamma(1+\rho)}\right]. \quad \text{(A.1)}$$

Для вычисления матричного элемента $\langle n_r|H_I|n_r\rangle$ в (A.1) нам нужно определить величину

$$T_n(x) = \int\left(\frac{d\eta}{\sqrt{\pi}}\right)^d \mathrm{e}^{-\eta^2(1+x)}\langle n| : \mathrm{e}_2^{-2i\sqrt{x\omega}(qn)} : |n\rangle. \quad \text{(A.2)}$$

После некоторых упрощений из (A.2) получаем

$$T_n(x) = \int\left(\frac{d\eta}{\sqrt{\pi}}\right)^d \mathrm{e}^{-\eta^2(1+x)}\langle n| : \mathrm{e}_2^{-2i\sqrt{x\omega}(qn)} : |n\rangle =$$
$$= P_v C_n^2 \frac{d^{2n}}{d\alpha^n d\beta^n}\int\left(\frac{d\eta}{\sqrt{\pi}}\right)^d \iint\left(\frac{d\xi_1}{\sqrt{\pi}}\right)^d\left(\frac{d\xi_2}{\sqrt{\pi}}\right)^d \times$$
$$\times \mathrm{e}^{-\eta^2(1+x)-\xi_1^2-\xi_2^2}\langle 0|\mathrm{e}^{-2i\sqrt{\alpha}(a\xi_1)}\mathrm{e}^{-iv\sqrt{2x}(a^+\eta)}\mathrm{e}^{-iv\sqrt{2x}(a\eta)}\,\mathrm{e}^{-2i\sqrt{\beta}(a^+\xi_2)}0\rangle\Big|_{\beta,\alpha=0} \quad \text{(A.3)}$$

и окончательно имеем

$$T_n(k) = \sum_{k=2}^{2n}(-1)^k\frac{x^k}{(1+x)^{k+d/2}}\frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(n+d/2)}A_n(k), \quad \text{(A.4)}$$

где

$$A_n(k) = \sum_{s=1}^{n}\frac{2^{2s-k}}{\Gamma(n_r-s+1)}\frac{\Gamma(k+n_r-s+d/2)}{\Gamma^2(k-s+1)\Gamma(2s-k+1)}. \quad \text{(A.5)}$$

Подставляя (A.4) в (A.1) и проводя интегрирование по x, из (A.1) находим

$$\langle n_r|H_I|n_r\rangle = -\frac{4\rho^2E\mu}{\omega^{2\rho-1}}\frac{\Gamma(d/2+2\rho-1)}{\Gamma(d/2)}W_1 + \frac{4\rho^2\sigma\mu}{\omega^{3\rho-1}}\frac{\Gamma(d/2+3\rho-1)}{\Gamma(d/2)}W_2 -$$
$$- \frac{16\alpha_s\mu\rho^2}{3\omega^{\rho-1}}\frac{\Gamma(d/2+\rho-1)}{\Gamma(d/2)}W_3 - \frac{\sigma\mu\rho^2}{M_1^2\omega^{\rho-1}}\frac{\Gamma(d/2+\rho-1)}{\Gamma(d/2)}W_3 +$$
$$+ \frac{4\rho^2\mu\alpha_s}{3\ \mu_1\ \mu_2}\frac{\omega^{\rho+1}S_{12}\Gamma(2\rho\ell)}{\Gamma(d/2)}W_4 + \frac{4\rho^2\mu\alpha_s}{3\ M_2^2}\frac{\omega^{\rho+1}\Gamma(2\rho\ell)}{\Gamma(d/2)}W_4 +$$
$$+ \frac{16\rho\mu\alpha_s[s(s+1)-3/2]}{9\mu_1\mu_2}\frac{\omega^{\rho+1}\Gamma(1+2\rho\ell)}{\Gamma(d/2)}W_4, \quad \text{(A.6)}$$

здесь введены следующие обозначения:

$$
\begin{aligned}
W_1 &= \frac{\Gamma(1+n_r)}{\Gamma(n_r+d/2)} \frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma(1-2\rho)} \sum_{k=2}^{2n_r} (-1)^k A_{n_r}(k) \frac{\Gamma(1+k-2\rho)}{\Gamma(k+d/2)}, \\
W_2 &= \frac{\Gamma(1+n_r)}{\Gamma(n_r+d/2)} \frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma(1-3\rho)} \sum_{k=2}^{2n_r} (-1)^k A_{n_r}(k) \frac{\Gamma(1+k-3\rho)}{\Gamma(k+d/2)}, \\
W_3 &= \frac{\Gamma(1+n_r)}{\Gamma(n_r+d/2)} \frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma(1-\rho)} \sum_{k=2}^{2n_r} (-1)^k A_{n_r}(k) \frac{\Gamma(1+k-\rho)}{\Gamma(k+d/2)}, \\
W_4 &= \frac{\Gamma(1+n_r)}{\Gamma(n_r+d/2)} \frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma(1+\rho)} \sum_{k=2}^{2n_r} (-1)^k A_{n_r}(k) \frac{\Gamma(1+k+\rho)}{\Gamma(k+d/2)}.
\end{aligned}
\tag{A.7}
$$

Используя (А.6) и (А.7), определяем энергетический спектр с орбитальным и радиальным возбуждениями.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Теперь проведем некоторые детали вычисления значения ВФ в начале координат. Для этого определим константу нормировки ВФ:

$$
1 = C_{n\ell}^2 \int d\mathbf{r}\, \Psi_{n\ell}^*(\mathbf{r})\, \Psi_{n\ell}(\mathbf{r}) = 4\pi C_{n\ell}^2 \int_0^\infty dr\, r^2 \Psi_{n\ell}^*(r)\, \Psi_{n\ell}(r), \tag{Б.1}
$$

где ℓ — орбитальное, n — радиальное квантовые числа и $\Psi_{n\ell}(r)$ — радиальная ВФ. Для вычисления интеграла (Б.1) применим метод ОП; после некоторых упрощений получаем

$$
1 = 4\pi C_{n\ell}^2 2\rho \int_0^\infty dq\, q^{d-1} \Phi_{n\ell}^* q^{2(2\rho-1)} \Phi_{n\ell} = 8\pi\rho C_{n\ell}^2 \, \langle n | q^{2(2\rho-1)} | n \rangle. \tag{Б.2}
$$

В дальнейших расчетах используем представление

$$
q^{2(2\rho-1)} = \frac{1}{\omega^{2\rho-1}} \int_0^\infty \frac{dx\, x^{-2\rho}}{\Gamma(1-2\rho)} \int \left(\frac{d\eta}{\sqrt{\pi}}\right)^d \mathrm{e}^{-\eta^2(1+x)} : \mathrm{e}^{2i\sqrt{x\omega}(q\eta)} :, \tag{Б.3}
$$

а также явный вид радиальной ВФ. После некоторых вычислений из (Б.2) для $C_{n\ell}^2$ получаем

$$
C_{n\ell}^2 = \frac{1}{4\pi} \frac{\omega^{d/2+2\rho-1}}{\rho\Gamma(d/2+2\rho-1)} \frac{1}{f_n}, \tag{Б.4}
$$

где

$$f_n = 4^n \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{n!}{(n=k)!} \right)^2 \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j}{j!(k-j)!} \frac{\Gamma(2n-2k+j+1-2\rho)}{\Gamma(1-2\rho)} \times \\ \times \frac{\Gamma(d/2+k-j+2\rho-1)}{\Gamma(d/2+2\rho-1)}. \quad \text{(Б.5)}$$

В частности,

$$f_0 = 1, \quad f_1 = 4\left(1-\rho+4\rho^2+2\rho\ell\right). \quad \text{(Б.6)}$$

Используя (Б.4) для ВФ в начале координат, находим

$$|\Psi_n(0)|^2 = \frac{1}{4\pi} \frac{(\omega^\rho)^{(3+2\ell)}}{\rho\Gamma(3\rho+2\rho\ell)} \frac{1}{f_n}. \quad \text{(Б.7)}$$

В нашем случае величина $|\Psi_n(0)|^2$ зависит от орбитального и радиального квантовых чисел. Из (Б.7) видно, что $|\Psi_n(0)|^2$ при $\ell \neq 0$ не равен нулю и является конечным. С другой стороны, известно, что из определения ВФ в рамках КМ при $\ell \neq 0$ эта величина должна быть равна нулю, однако в [25] показано, что эта величина конечна, хотя и чрезвычайна мала. Здесь приведены некоторые детали вычисления интеграла (3.28), который определяет матричный элемент $E1$-перехода. Детали вычисления этого интеграла аналогичны вычислению интеграла, представленного в (Б.1). После некоторых упрощений из (3.28) получаем

$$I^{n_1\ell_1}_{n_2\ell_2} = \frac{2\rho}{\sqrt{\rho_1\langle n_1|q^{2(2\rho_1-1)}|n_1\rangle}} \frac{1}{\sqrt{\rho_2\langle n_2|q^{2(2\rho_2-1)}|n_2\rangle}} B_{n_1n_2}. \quad \text{(Б.8)}$$

Здесь введем обозначение

$$B_{n_1n_2} = \int_0^\infty dq\, q^{d-1} \langle 0|_{d_2} (aa)^{n_2} q^{2(2\rho-1)} (a^+a^+)^{n_1} |0\rangle_{d_1}. \quad \text{(Б.9)}$$

Используя выражение (Б.3) для упорядочения, имеем

$$B_{n_1n_2} = A(\rho_1,\rho_2) \int_0^\infty \frac{dx\, x^{-2\rho}}{\Gamma(1-2\rho)} \int \left(\frac{d\eta}{\sqrt{\pi}}\right)^d \mathrm{e}^{-\eta^2(1+x)} \times \\ \times \langle 0|(aa)^{n_2} : \mathrm{e}^{-2i\sqrt{x\omega}(q\eta)} : (a^+a^+)^{n_1}|0\rangle. \quad \text{(Б.10)}$$

Учитывая действие операторов a и a^+ и проводя интегрирование, из (Б.10) находим

$$B_{n_1n_2} = A(\rho_1,\rho_2)(-1)^{n_1+n_2} \frac{\partial^{n_1+n_2}}{\partial\alpha^{n_1}\,\partial\beta^{n_2}} \int_0^\infty \frac{dx\, x^{-2\rho}}{\Gamma(1-2\rho)} \times \\ \times \left. \frac{1}{[(1+x-2x\alpha)(1-\alpha\beta)-2x\beta(1-2\alpha)^2]^{d/2}} \right|_{\beta,\alpha=0}, \quad \text{(Б.11)}$$

где введено обозначение

$$A(\rho_1,\rho_2)=\left(\frac{2\omega_1}{\omega_1+\omega_2}\right)^{d_1/4}\left(\frac{2\omega_2}{\omega_1+\omega_2}\right)^{d_2/4}\frac{2^{\rho_1+\rho_2-1}}{(\omega_1+\omega_2)^{\rho_1+\rho_2-1}}. \tag{Б.12}$$

Этот интеграл для конкретных значений n_1 и n_2 вычисляется аналитически. Учитывая (Б.11), из (Б.8) получаем

$$I^{n_1\ell_1}_{n_2\ell_2}=\frac{\rho_1+\rho_2}{\sqrt{\rho_1\rho_2}}\frac{(\omega_1\rho_1)^{3/2+\ell_1}(\omega_2\rho_2)^{3/2+\ell_2}}{\sqrt{f_{n_1}f_{n_2}}\sqrt{\Gamma(3\rho_1+2\rho_1\ell_1)}}\frac{B_{n_1n_2}}{\Gamma(3\rho_2+2\rho_2\ell_2)}. \tag{Б.13}$$

Эти аналитические вычисления используются для определения ширины $E1$-переходов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Eides M.I. et al.* Theory of Light Hydrogenlike Atoms // Phys. Rep. 2001. V. 342. P. 61–261.
2. *Beringer J. et al.* Review of Particle Physics // Phys. Rev. D. 2012. V. 86. P. 010001.
3. *Berestetskii V. B., Lifshitz E. M., Pitaevskii L. P.* Quantum Electrodynamics. 2nd Ed. Oxford: Pergamon Press, 1982.
4. *Caswell W. E., Lepage G. P.* Effective Lagrangians for Bound State Problems in QED, QCD, and Other Field Theories // Phys. Lett. B. 1986. V. 167. P. 437–442.
5. *Kinoshita T., Nio M.* Radiative Corrections to the Muonium Hyperfine Structure // Phys. Rev. D. 1996. V. 53. P. 4909–4929.
6. *Dineykhan M. et al.* Mass Spectrum Bound State Systems with Relativistic Corrections // J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. 2009. V. 42. P. 145001.
7. *Dineykhan M., Zhaugasheva S. A., Toinbaeva N. Sh.* Energy Eigenvalues of Spherical Symmetric Potentials with Relativistic Corrections: Analytic Results // J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. 2010. V. 43. P. 015003.
8. *Dineykhan M., Zhaugasheva S. A.* Determination of the Mass Spectrum of Mesons with Relativistic Corrections // Phys. Part. Nucl. 2011. V. 42. P. 729–799.
9. *Dineykhan M., Zhaugasheva S. A., Bekbaev A. K.* Determination of the Energy Spectrum of a Three-Body Coulomb System with Relativistic Corrections // Phys. Rev. A. 2013. V. 87. P. 052506.
10. *Feynman R. P., Hibbs A. P.* Quantum Mechanics and Path Integrals. N. Y.: McGraw-Hill, 1963.
11. *Dineykhan M., Efimov G. V., Namsrai Kh.* // Fortschr. Phys. 1991. V. 39. P. 259.
12. *Bjorken J. D., Drell S. D.* Relativistic Quantum Mechanics. N. Y.: McGraw-Hill, 1964.
13. *Quigg C., Rosner J. L.* // Phys. Rev. 1990. V. 56. P. 67.
14. *Godfrey S., Isgur N.* Mesons in Relativized Quark Model with Chromodynamics // Phys. Rev. D. 1985. V. 32. P. 189;
Isgur N., Wise M. // Phys. Lett. B. 1984. V. 232. P. 113; 1990. V. 237. P. 527.
15. *Dineykhan M., Ivanov M. A., Saidullaeva G. G.* Exotic State and Rare B_s Decays in the Covariant Quark Model // Phys. Part. Nucl. 2012. V. 43. P. 1451–1512.
16. *Faustov R. N., Galkin V. O.* Charmless Weak B_s Decays in the Relativistic Quark Model // Phys. Rev. D. 2013. V. 87. P. 094028.
17. *Lucha W., Schoberl F. F., Gromes D.* Bound States of Quarks // Phys. Rep. 1991. V. 200. P. 127.
18. *Eichten E., Feinberg F.* Spin-Dependent Forces in Quantum Chromodynamics // Phys. Rev. D. 1981. V. 23. P. 2724.

19. *Dineykhan M. et al.* Oscillator Representation in Quantum Physics. Lecture Notes in Physics. V. 26. Berlin: Springer-Verlag, 1995.
20. *Fock V. A.* Principles of Quantum Mechanics. M.: Nauka, 1976.
21. *Dineykhan M., Efimov G. V.* // Rep. Math. Phys. 1995. V. 36. P. 287; Yad. Fiz. 1996. V. 59. P. 862; *Dineykhan M.* // Z. Phys. D. 1997. V. 41. P. 77; *Dineykhan M., Nazmitdinov R. G.* // Yad. Fiz. 1999. V. 62. P. 143; *Dineykhan M., Zhaugasheva, S. A., Nazmitdinov R. G.* // JETP. 2001. V. 119. P. 1210.
22. *Fradkin E. S.* // Nucl. Phys. 1963. V. 49. P. 624.
23. *Hayashi K. et al.* // Fortsh. Phys. 1967. V. 15. P. 625.
24. *Salam A.* Nonpolynomial Lagrangians. Renormalization and Gravity. N. Y.: Gordon and Breach Sci. Publ., 1971.
25. *Bethe H. A., Salpeter E. E.* Quantum Mechanics of One- and Two-Electron Atoms. Berlin: Springer-Verlag, 1957.

Получено 16 июля 2013 г.