

## ДЕМПФИРОВАНИЕ КОГЕРЕНТНЫХ БЕТАТРОННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПУЧКА ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В СИНХРОТРОНАХ С СИСТЕМОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

*В. М. Жабицкий<sup>а, 1</sup>, О. Н. Чижова<sup>б</sup>*

<sup>а</sup> Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

<sup>б</sup> Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

Представлены результаты теоретического исследования решений дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом, описывающего в сглаженном приближении динамику пучка заряженных частиц в синхротронах с системой обратной связи. Выявлены особенности решений для сдвигов частот и декрементов затухающих когерентных бетатронных колебаний, обусловленные задержкой сигнала в цепи обратной связи.

Results of theoretical research of decisions of the delay-differential equation describing in the smoothed approach the dynamics of a bunch of the charged particles in synchrotrons with a feedback system are presented. Features of decisions for frequency shifts and decrements of the coherent betatron oscillation decay caused by a signal delay in a feedback chain are revealed.

PACS: 29.20.dk; 29.27.-a

### ВВЕДЕНИЕ

Системы обратной связи широко используются в синхротронах для формирования корректирующих воздействий на пучок заряженных частиц с целью подавления их когерентных поперечных (бетатронных) и продольных (синхротронных) колебаний. Например, в системах подавления когерентных поперечных колебаний локальная сила корректирующего воздействия, изменяющая траекторию пучка в месте расположения демпфирующего дефлектора, пропорциональна локальному отклонению центра тяжести этих частиц от их равновесного состояния, измеренному при прохождении ими детектирующего устройства. Таким образом, сила корректирующего воздействия пропорциональна величине отклонения, измеренной в момент времени, предшествующий коррекции. В [1] показано, что сдвиги частот и декременты затухающих когерентных колебаний, вычисленные в линейном приближении по величине силы коррекции для сглаженных уравнений динамики пучка при решении дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, совпадают с соответствующими выражениями, вычисленными при использовании методов дискретного анализа, где учитывается локальный характер измерения отклонения и действия корректирующей силы. В настоящей работе рассматриваются другие особенности решений в сглаженном приближении, которые обусловлены задержкой сигнала в цепи обратной связи.

---

<sup>1</sup>E-mail: V.Zhabitsky@jinr.ru

### ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Пусть  $x$  — смещение частицы от равновесной орбиты. Тогда сглаженное уравнение для поперечной динамики заряженных частиц в синхротроне с системой обратной связи имеет следующий вид [1, 2]:

$$\ddot{x}(t) + \Omega^2 x(t) = \frac{g\kappa\Omega}{T_0} x(t - \tau) u(t - \tau) \equiv gF(x; \tau), \quad (1)$$

где  $T_0$  — период обращения частиц в синхротроне;  $\Omega \equiv Q_0\omega_0$  — циклическая частота бетатронных колебаний;  $Q_0$  — число бетатронных колебаний за оборот;  $\omega_0 = 2\pi/T_0$  — циклическая частота обращения частиц,  $g$  — коэффициент обратной связи;  $\kappa = \pm 1$  — полярность обратной связи (положительная или отрицательная обратная связь);  $\tau > 0$  — величина задержки сигнала в цепи обратной связи. В уравнении (1) считается, что пучок инжектирован в синхротрон в нулевой момент времени, так что все функциональные зависимости заданы при  $t \geq 0$ . Данное начальное условие учитывается с помощью функции Хевисайда  $u(t - \tau)$  [3]. Используя подстановку Эйлера  $x = \exp(\lambda t/T_0)$ , обычно применяемую для выявления свойств решений уравнений с запаздывающим аргументом [4, 5], получаем следующее характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 4\pi^2 Q_0^2 - 2\pi g\kappa Q_0 e^{-\lambda\tau/T_0} = 0. \quad (2)$$

При  $g = 0$  характеристическое уравнение (2) имеет решения  $\lambda = \pm j 2\pi Q_0$ , которые отвечают частотам бетатронного движения частиц в синхротроне. В [1] установлено, что при  $g \ll 1$  решения уравнения (2) вблизи бетатронной частоты  $\Omega$  есть

$$\lambda = -\alpha \pm j 2\pi(Q_0 + \Delta Q), \quad (3)$$

где

$$\alpha = g\alpha_1, \quad \alpha_1 = \frac{\kappa}{2} \sin \eta, \quad \Delta Q = gQ_1, \quad Q_1 = -\frac{\kappa}{4\pi} \cos \eta. \quad (4)$$

Здесь  $\eta \equiv \Omega\tau = 2\pi Q_0 \tau/T_0$  — набег фазы бетатронных колебаний при пролете частицы от детектора до дефлектора. Таким образом, выражения для декремента  $\alpha$  и сдвига числа бетатронных колебаний  $\Delta Q$  совпадают с аналогичными приближенными выражениями, полученными в оригинальной дискретной модели для системы подавления, где учитывается локальный характер измерения отклонения и действия корректирующей силы [6]. Следует подчеркнуть, что декремент колебаний максимален, когда  $\kappa \sin \eta_0 = 1$ , что отвечает хорошо известному критерию оптимальных фазовых условий для подавления когерентных поперечных колебаний.

### НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим особенности решений исходного уравнения (1) вблизи оптимальных условий при  $\eta_0 = (2k + 1)\pi/2$ , где  $k$  — целое число. Принимая во внимание (3), решение характеристического уравнения (2) можно искать в виде разложения по степеням малого параметра  $g$ :

$$\lambda = -\alpha \pm j 2\pi Q, \quad \alpha = g\alpha_1 + g^2\alpha_2 + \dots, \quad Q \equiv Q_0 + \Delta Q = Q_0 + gQ_1 + g^2Q_2 + \dots \quad (5)$$

При этом характеристическое уравнение эквивалентно следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \alpha^2 - 4\pi^2 Q^2 + 4\pi^2 Q_0^2 &= 2\pi g Q_0 e^{\alpha\tau/T_0} \varkappa \cos(2\pi Q\tau/T_0), \\ \alpha &= \frac{gQ_0}{2Q} e^{\alpha\tau/T_0} \varkappa \sin(2\pi Q\tau/T_0). \end{aligned} \quad (6)$$

Нетрудно видеть, что в линейном приближении по малому параметру  $g$  приведенная система уравнений имеет решения (4). Величины  $\alpha$  и  $\Delta Q$  пропорциональны  $g$  согласно (5). Поэтому для второго уравнения системы (6) во втором приближении по  $g$  можно записать:

$$\alpha = A_2(g, \Delta Q, \eta), \quad A_2(\eta = \eta_0) = \frac{\tilde{g}Q_0}{2Q} \cos(\Delta\eta) \approx \frac{\tilde{g}Q_0}{2Q},$$

где  $\Delta\eta \equiv (2\pi\tau/T_0)\Delta Q$  и  $\tilde{g} \equiv g \exp(\alpha\tau/T_0)$ . Аналогично для первого уравнения системы (6) можем записать:

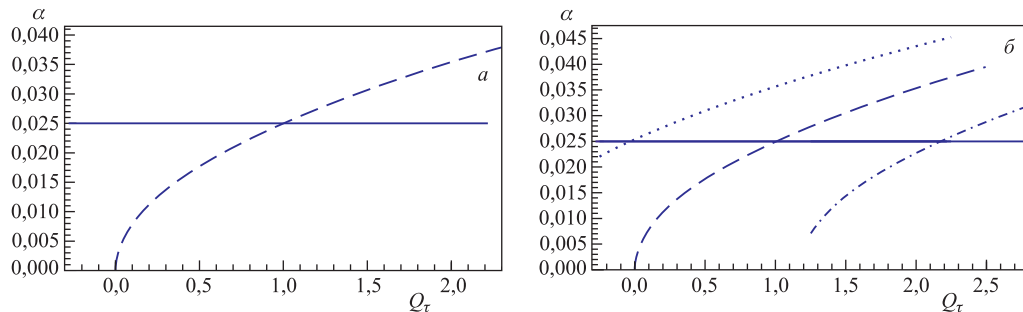
$$\alpha = A_1(g, \Delta Q, \eta), \quad A_1^2(\eta = \eta_0) \approx 4\pi^2(2Q_0 + \Delta Q)\Delta Q - 2\pi\tilde{g}Q_0 \sin(\Delta\eta).$$

Поскольку система подавления когерентных поперечных колебаний должна обеспечивать необходимый декремент для заданных величин  $g$ ,  $Q_0$  и  $\eta_0$ , то решение уравнений (6) есть точка пересечения кривых  $A_1(\Delta Q) = A_2(\Delta Q)$  на плоскости  $(\alpha, Q_\tau)$ , где

$$Q_\tau \equiv \Delta \frac{Q}{Q_{20}}, \quad Q_{20} = \frac{g^2}{32\pi^2 Q_0}.$$

Графики зависимостей  $A_1(Q_\tau)$  и  $A_2(Q_\tau)$  при  $Q_0 = 59,31$ ,  $g = 0,05$  и оптимальной расстановке  $\eta = \eta_0 = 2\pi \cdot 59,25$  приведены на рис. а. Таким образом, точке пересечения кривых  $A_1(Q_\tau)$  и  $A_2(Q_\tau)$  во втором приближении по  $g$  отвечает  $Q_\tau \approx 1$ . Это означает, что возникает положительный сдвиг  $\Delta Q \approx Q_{20}$  для частоты когерентных затухающих колебаний во втором приближении по величине коэффициента обратной связи, хотя при оптимальной расстановке в первом приближении по  $g$  величина  $\Delta Q$  равна нулю.

Меняя место расположения детектора относительно дефлектора и изменяя тем самым время задержки  $\tau$ , что приводит к изменению величины набега фазы бетатронных колебаний  $\eta$ , можно подобрать расстановку этих устройств таким образом, чтобы выполнялось



Графики зависимостей  $A_2(Q_\tau)$  (сплошная линия) и  $A_1(Q_\tau)$ : а) при оптимальной расстановке  $\eta_0$  (штриховая линия) и б) при вариации  $\eta$  для величин  $\eta < \eta_0$  (пунктирная линия) и  $\eta > \eta_0$  (штрихпунктирная)

резонансное условие  $\Delta Q = 0$ . Пример графиков зависимостей  $A_1(Q_\tau)$  и  $A_2(Q_\tau)$  для нахождения решений характеристического уравнения при вариации величины набег фазы бетатронных колебаний  $\eta$  приведен на рис. б. Сплошные линии, отвечающие зависимости  $A_2(Q_\tau)$ , практически неразличимы для приведенных параметров  $Q_0$ ,  $g$  и  $\eta$ . Однако графики зависимостей  $A_1(Q_\tau)$  существенным образом зависят от набег фазы колебаний  $\eta$ . Так, расчетный положительный сдвиг для  $\Delta Q$ , возникающий во втором порядке по  $g$ , может быть скомпенсирован за счет уменьшения расстояния между детектором и дефлектором. В результате набег фазы колебаний  $\eta$  при выключенной системе обратной связи будет меньше  $\eta_0$ , однако при замкнутой цепи обратной связи станет оптимальным за счет положительного сдвига  $\Delta Q$  (точка  $Q_\tau = 0$  на рис. б, пунктирная линия). При увеличении расстояния между детектором и дефлектором по сравнению с оптимальной расстановкой  $\eta = \eta_0$  величина сдвига частоты увеличивается (точка  $Q_\tau > 2$  на рис. б, штрихпунктирная линия).

Подставляя (5) в (6), нетрудно получить для  $\alpha_2$  и  $Q_2$ :

$$g^2 \alpha_2 = 2\pi Q_{20} \sin(2\eta) - \frac{g^2 \tau}{4T_0} \cos(2\eta) \quad g^2 Q_2 = -Q_{20} \cos(2\eta) - \frac{g^2 \tau}{8\pi T_0} \sin(2\eta).$$

Отсюда вблизи оптимальной расстановки  $\delta\eta \equiv \eta - \eta_0 \ll 1$  имеем

$$g^2 \alpha_2(\eta = \eta_0 + \delta\eta) \approx -2\pi Q_{20} \sin(2\delta\eta) + \frac{g^2 \tau}{4T_0}$$

$$g^2 Q_2(\eta = \eta_0 + \delta\eta) \approx Q_{20} + \frac{g^2 \tau}{8\pi T_0} \sin(2\delta\eta).$$

Таким образом, при использовании разложения (5) для решения уравнений (6) во втором приближении по величине коэффициента обратной связи  $g$  вблизи оптимальной расстановки  $\eta_0$  возникает положительный сдвиг числа бетатронных колебаний, численно равный  $Q_{20}$ . Совпадение частот затухающих колебаний (включенная система обратной связи) и свободных колебаний (система обратной связи выключена) можно обеспечить за счет уменьшения набег фазы бетатронных колебаний от детектора до дефлектора. Однако точное совпадение частот возможно только при фиксированной величине  $g$ . Вследствие влияния квадратичной поправки по  $g$  в  $\Delta Q$  при увеличении  $g$  необходимо вновь произвести тонкую настройку. Данный результат согласуется с зависимостями, приведенными на рисунке.

Вместе с тем следует подчеркнуть, что вследствие малости поправки, пропорциональной  $g^2$ , сохраняется примерно линейная зависимость сдвига частоты от величины отклонения набег фазы от оптимального значения. Это означает, что использование данного эффекта является более точным методом настройки по сравнению с выявлением условий для максимальной величины декремента колебаний сгустка после короткого импульсного толчка, где возникает примерно квадратичная зависимость декремента от величины отклонения фазы колебаний от оптимального значения. Поэтому эффект линейного сдвига частоты можно использовать для тонкой настройки оптимального баланса фаз, изменяя, например, положение рабочей точки в синхротроне по числу бетатронных колебаний  $Q_0$  при фиксированной величине коэффициента обратной связи. Оптимальные условия для демпфирования когерентных колебаний будут отвечать такой величине  $Q_0$ , когда

частоты свободных колебаний (выключенная система обратной связи) и затухающих колебаний (система обратной связи включена) совпадают. Измерения частот бетатронных колебаний, выполненные при наладке системы подавления когерентных поперечных колебаний пучка в ЛНС [7], подтверждают наличие указанного эффекта и возможность его использования для тонкой настройки системы обратной связи в синхротроне.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследованы особенности решений дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом, описывающего в сглаженном приближении динамику пучка заряженных частиц в синхротронах с системой обратной связи, во втором приближении по величине коэффициента обратной связи, являющегося малым параметром. Установлено, что для сдвига частоты затухающих колебаний определяющим фактором является набег фазы бетатронных колебаний, возникающий при пролете частицы от детектора до дефлектора. Данный эффект можно использовать для тонкой настройки баланса фаз системы обратной связи в синхротроне.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Жабицкий В. М.* Динамика пучка в синхротронах с системами обратной связи // Письма в ЭЧАЯ. 2013. Т. 10, № 6(183). С. 947–957.
2. *Лебедев А. Н., Шальнов А. В.* Основы физики и техники ускорителей. М.: Энергоатомиздат, 1991. 528 с.
3. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1978. 832 с.
4. *Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971. 296 с.
5. *Чижова О. Н.* Методы исследования дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом: Учеб. пособие. Фак-т прикл. математики — процессов управления, Санкт-Петербургский гос. ун-т. 2011. 47 с.
6. *Жабицкий В. М.* Отклик пучка на переходный процесс в синхротронах с цифровой системой подавления когерентных поперечных колебаний // Письма в ЭЧАЯ. 2013. Т. 10, № 1(178). С. 120–129.
7. *Höfle W. et al.* LHC Transverse Damper Observations versus Expectations // Proc. of the LHC Beam Operation Workshop, Evian, France, Dec. 7–9, 2010. CERN-ATS-2011-017, 2011. P. 107–114.