Письма в ЭЧАЯ. 2015. Т. 12, № 1(192). С. 20–24

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА. ТЕОРИЯ

СРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ СПИНА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ И СИСТЕМЕ КООРДИНАТ ФРЕНЕ–СЕРРЕ

А. Я. Силенко[1]

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Институт ядерных проблем Белорусского государственного университета, Минск

Проведен сравнительный анализ описания динамики спина в цилиндрической системе координат и системе координат Френе–Серре, и продемонстрирована эквивалентность двух систем координат. Возможность эффективного использования цилиндрической системы координат для расчета эволюции спина частиц и ядер в ускорителях и накопительных кольцах обусловлена отсутствием движения координатных осей данной системы относительно неподвижных детекторов.

A comparative analysis of description of spin dynamics in the cylindrical coordinate system and the Frenet–Serret one is made and the equivalence of the two coordinate systems is shown. A possibility of effective use of the cylindrical coordinate system for calculations of evolution of a particle and nucleus spin in accelerators and storage rings is caused by the absence of a motion of coordinate axes of this system relative to immobile detectors.

PACS: 29.20.D-; 29.27.Hj

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе мы производим сравнительный анализ описания динамики спина в цилиндрической системе координат и системе координат Френе–Серре (Frenet–Serret). Необходимость такого анализа обусловлена важностью прецизионного измерения эволюции поляризации пучков частиц и ядер в ускорителях и накопительных кольцах. Базовым уравнением движения спина в электромагнитных полях является уравнение Томаса–Баргманна–Мишеля–Телегди (Т-БМТ) [1], заданное в декартовых координатах. Весьма важным является поиск электрических дипольных моментов (ЭДМ) частиц и ядер в готовящихся экспериментах в накопительных кольцах [2]. Для расчета динамики спина в таких экспериментах необходимо использовать обобщение уравнения Т-БМТ, учитывающее наличие ЭДМ (см. [3] и приведенные там ссылки).

Указанные уравнения определяют движение спина в декартовой системе координат. Однако поляризованные пучки частиц и ядер в ускорителях и накопительных кольцах движутся по практически замкнутым траекториям. В теории ускорителей стандартным

[1]E-mail: alsilenko@mail.ru

является выбор системы координат Френе–Серре (ФС), ориентация осей которой определяется движением частицы. В этом случае уравнение движения спина описывает движение (псевдо)вектора спина по отношению к вектору импульса, т. е. изменение относительной ориентации двух векторов. Это обстоятельство усложняет описание динамики спина. В действительности экспериментально измеряется ориентация спина относительно детекторов, положение которых фиксировано в декартовой системе координат, а не относительно вектора импульса, проекции которого на все три оси данной системы координат изменяются. В работе [4] была реализована возможность альтернативного описания и были найдены точные уравнения, отражающие движение частицы и ее спина в цилиндрической системе координат. Однако детального анализа различий в описании динамики спина в двух системах координат в [4] выполнено не было. В связи с важностью проблемы динамики спина частиц и ядер в ускорителях и накопительных кольцах проведение такого анализа является необходимым.

Мы используем систему единиц $c = 1$.

1. СРАВНЕНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ И СИСТЕМЫ КООРДИНАТ ФРЕНЕ–СЕРРЕ

В цилиндрической системе координат азимутальный угол ϕ определяется положением частицы. При изменении азимута частицы на угол $d\phi$ горизонтальные оси цилиндрической и декартовой систем координат поворачиваются друг относительно друга на этот же угол, т. е. цилиндрическая система координат вращается по отношению к декартовой вокруг оси z с мгновенной угловой скоростью $d\phi/dt$ (см. [4]).

Оси системы координат ФС определяются траекторией частицы. Орты этой системы координат направлены по касательной к траектории (параллельно скорости и импульсу), в плоскости траектории по нормали к ней (параллельно ускорению) и по бинормали перпендикулярно двум указанным ортам. По отношению к декартовой системе координат система координат ФС вращается не только вокруг оси z, как цилиндрическая система координат, но и вокруг двух других осей. В ускорителях и накопительных кольцах движение частиц и ядер в вертикальном направлении имеет осцилляционный характер.

Особенности цилиндрической системы координат и системы координат ФС можно количественно описать, определив эволюцию единичного вектора в направлении скорости и импульса частицы: $\mathbf{N} = \mathbf{v}/v = \mathbf{p}/p$. Из уравнения Лоренца

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\left(\mathbf{E} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}\right), \quad \boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{v}}{c} = \frac{\mathbf{p}}{\gamma m} \tag{1}$$

следует, что этот вектор вращается с мгновенной угловой скоростью [4]

$$\boldsymbol{\omega} = -\frac{e}{\gamma m}\left(\mathbf{B} - \frac{\mathbf{N} \times \mathbf{E}}{\beta}\right). \tag{2}$$

Дополнительное (по отношению к вращению цилиндрической системы координат) вращение системы координат ФС относительно декартовой системы координат имеет место при наличии ненулевых горизонтальных компонент магнитного и/или квазимагнитного полей $\mathbf{B}$ и $\mathbf{N} \times \mathbf{E}$. Связь между угловой скоростью вращения вектора $\mathbf{N}$ и относительным движением цилиндрической и декартовой систем координат, найденная в [4], не является тривиальной. Будем обозначать проекцию любого вектора на горизонтальную плоскость символом «$\|$». Поскольку вектор $\mathbf{N}$ направлен по касательной к траектории, изменение азимута частицы в этой плоскости равно углу между двумя горизонтальными проекциями данного вектора, которые мы обозначим через $\mathbf{N}_\|$ и $\mathbf{N}'_\|$. Бесконечно малый угол $d\phi$, характеризующий изменение азимута частицы, определяется выражением

$$d\phi = \frac{(\mathbf{N}_\| \times \mathbf{N}'_\|) \cdot \mathbf{e}_z}{|\mathbf{N}_\|| \cdot |\mathbf{N}'_\||} = \frac{(\mathbf{N}_\| \times d\mathbf{N}_\|) \cdot \mathbf{e}_z}{|\mathbf{N}_\||^2},$$

где $d\mathbf{N}_\| = \mathbf{N}'_\| - \mathbf{N}_\|$ — бесконечно малый вектор. Мгновенная скорость изменения азимута [4]

$$\dot{\phi} \equiv \frac{d\phi}{dt} = \frac{(\mathbf{N}_\| \times \dot{\mathbf{N}}_\|) \cdot \mathbf{e}_z}{|\mathbf{N}_\||^2} = \omega_z - o, \tag{3}$$

где

$$o = \frac{(\omega_x N_x + \omega_y N_y) N_z}{1 - N_z^2} = \frac{(\omega_\rho N_\rho + \omega_\phi N_\phi) N_z}{1 - N_z^2}. \tag{4}$$

Компоненты вектора $\boldsymbol{\omega}$ определяются уравнением (2).

Уравнения (3), (4) являются точными. В работе [4] это показано на примере частицы, движущейся по окружности, нормаль к которой отклонена от оси z на некоторый угол. Учет поправки, определяемой величиной o, позволяет точно описать движение частицы, спроецированное на горизонтальную плоскость. Однако величина o в большинстве случаев является весьма малой. Если горизонтальная плоскость совпадает с плоскостью невозмущенного движения частицы, ею обычно можно пренебречь (см. анализ в [4]).

2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СПИНА

Во всех рассматриваемых в настоящей работе системах координат движение спина является прецессионным. Эффекты, обусловленные спин-тензорным взаимодействием (см. [7–10] и приведенные там ссылки), мы в настоящей работе не рассматриваем. Пусть частица, имеющая электрический и магнитный дипольные моменты, движется в электромагнитном поле. Уравнения, описывающие динамику ее спина в декартовой системе координат, имеют вид [3]

$$\begin{gathered}\frac{d\mathbf{s}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{s}, \quad \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{MDM}} + \boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{EDM}}, \\ \boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{MDM}} = -\frac{e}{m}\left[\left(a + \frac{1}{\gamma}\right)\mathbf{B} - \frac{a\gamma}{\gamma+1}\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{B}) - \left(a + \frac{1}{\gamma+1}\right)(\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{E})\right], \\ \boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{EDM}} = -\frac{e\eta}{2m}\left(\mathbf{E} - \frac{\gamma}{\gamma+1}\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{E}) + \boldsymbol{\beta}\times\mathbf{B}\right),\end{gathered} \tag{5}$$

где величины $\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{MDM}}$ и $\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{EDM}}$ определяют вклады магнитного и электрического дипольных моментов соответственно. Такой же вид приобретают квантово-механические уравнения движения спина частиц со спинами 1/2 [5] и 1 [6] после перехода к классическому пределу.

Угловая скорость вращения спина в цилиндрической системе координат получается вычитанием из $\mathbf{\Omega}$ величины $\dot{\phi}\mathbf{e}_z$. При пренебрежении поправкой o она определяется выражением

$$\mathbf{\Omega}^{\text{cyl}} = -\frac{e}{m}\left\{a\mathbf{B} - \frac{a\gamma}{\gamma+1}\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{B}) + \left(\frac{1}{\gamma^2-1} - a\right)(\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{E}) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\gamma}\left[\mathbf{B}_{\|} - \frac{1}{\beta^2}(\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{E})_{\|}\right] + \frac{\eta}{2}\left(\mathbf{E} - \frac{\gamma}{\gamma+1}\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{E}) + \boldsymbol{\beta}\times\mathbf{B}\right)\right\}, \quad (6)$$

где $a = (g-2)/2$. Сравнение уравнений (5) и (6) показывает, что горизонтальные проекции векторов $\mathbf{\Omega}$ и $\mathbf{\Omega}^{\text{cyl}}$ совпадают.

Для нахождения угловой скорости движения спина в системе координат ФС из $\mathbf{\Omega}$ необходимо вычесть угловую скорость вращения вектора $\mathbf{N}$. Таким образом, в данной системе координат угловая скорость вращения спина [3]

$$\mathbf{\Omega}^{\text{FS}} = -\frac{e}{m}\left[a\mathbf{B} - \frac{a\gamma}{\gamma+1}\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{B}) + \left(\frac{1}{\gamma^2-1} - a\right)(\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{E}) + \right.$$
$$\left. + \frac{\eta}{2}\left(\mathbf{E} - \frac{\gamma}{\gamma+1}\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{E}) + \boldsymbol{\beta}\times\mathbf{B}\right)\right]. \quad (7)$$

Уравнение (7) обычно используется в специальной литературе для описания движения спина в ускорителях и накопительных кольцах.

Безусловно, уравнение (7) является более компактным. Но эта компактность достигается благодаря тому, что углы отклонения осей системы координат ФС от вертикали изменяются со временем, радиальная и азимутальная же оси цилиндрической системы координат всегда находятся в горизонтальной плоскости. Поэтому, в частности, уравнение (7) может породить иллюзию, что в обычных условиях ($\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{B} = 0$) эффективность воздействия вертикального и радиального полей на спин является одинаковой. В действительности, однако, при $\mathbf{E} = 0$ и пренебрежении ЭДМ отношения $\Omega_\rho^{\text{cyl}}/B_\rho$ и $\Omega_z^{\text{cyl}}/B_z$ различаются в $(a\gamma+1)/(a\gamma)$ раз. Для лептонов (электрон, мюон) это отношение может быть весьма большим. Причина состоит в том, что для определения *наблюдаемого* эффекта к движению спина в системе координат ФС нужно прибавить движение тангенциальной и нормальной осей этой системы координат. При учете данного фактора цилиндрическая система координат и система координат ФС дают эквивалентное описание движения спина.

В качестве примера, демонстрирующего необходимость корректного учета вращения спина вокруг горизонтальных осей координат, укажем эксперимент по измерению аномального магнитного момента мюона [11]. В нем импульс мюонов удовлетворял условию $1/(\gamma^2-1) = a$. Наличие слабого радиального магнитного поля и компенсирующего его воздействие на движение частиц вертикального электрического поля приводит к некоторому увеличению угловой скорости вращения спина, $\sqrt{\Omega_z^2 + \Omega_\rho^2}$ вместо Ω_z. Наивное использование формулы (7) для расчета Ω_z без учета движения тангенциальной и нормальной осей системы координат ФС приводит к выражению, существенно отличающемуся от даваемого формулой (6) правильного результата. Отметим, что тщательное устранение неоднородностей магнитного поля в эксперименте [11] позволило существенно уменьшить радиальное магнитное поле, и его вклад в результирующую угловую скорость вращения спина в указанном эксперименте был пренебрежимо мал.

ВЫВОДЫ

Проведенный сравнительный анализ описания динамики спина в цилиндрической системе координат и системе координат ФС демонстрирует возможность использования обеих систем координат. Преимуществом системы координат ФС является наличие детально разработанного математического аппарата, построенного на ее базе для описания эволюции спина частиц и ядер в ускорителях и накопительных кольцах. Однако цилиндрическая система координат также может эффективно использоваться для этой цели. Ее достоинством является отсутствие движения координатных осей относительно плоскости невозмущенного движения частиц и, следовательно, относительно неподвижных детекторов.

Работа поддержана грантом Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований № Ф14Д-007.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Thomas L. H.* The Motion of the Spinning Electron // Nature (London). 1926. V. 117, No. 2945. P. 514;
Thomas L. H. The Kinematics of an Electron with an Axis // Phil. Mag. 1927. V. 3, No. 13. P. 1;
Bargmann V., Michel L., Telegdi V. L. Precession of the Polarization of Particles Moving in a Homogeneous Electromagnetic Field // Phys. Rev. Lett. 1959. V. 2, No. 10. P. 435.
2. *Fukuyama T.* Searching for New Physics beyond the Standard Model in Electric Dipole Moment // Intern. J. Mod. Phys. A. 2012. V. 27, No. 16. P. 1230015.
3. *Fukuyama T., Silenko A. J.* Derivation of Generalized Thomas–Bargmann–Michel–Telegdi Equation for a Particle with Electric Dipole Moment // Intern. J. Mod. Phys. A. 2013. V. 28, No. 29. P. 1350147.
4. *Silenko A. J.* Equation of Spin Motion in Storage Rings in the Cylindrical Coordinate System // Phys. Rev. ST Accel. Beams. 2006. V. 9, No. 3. P. 034003.
5. *Силенко А. Я.* Квантово-механическое описание электромагнитного взаимодействия релятивистских частиц с электрическим и магнитным дипольными моментами // Рос. физ. журн. 2005. Т. 48, вып. 8. С. 9 (*Silenko A. J.* Quantum-Mechanical Description of the Electromagnetic Interaction of Relativistic Particles with Electric and Magnetic Dipole Moments // Rus. Phys. J. 2005. V. 48, No. 8. P. 788).
6. *Silenko A. J.* Quantum-Mechanical Description of Spin-1 Particles with Electric Dipole Moments // Phys. Rev. D. 2013. V. 87, No. 7. P. 073015.
7. *Silenko A. J.* Tensor Electric Polarizability of the Deuteron in Storage-Ring Experiments // Phys. Rev. C. 2007. V. 75, No. 1. P. 014003.
8. *Silenko A. J.* Potential for Measurement of the Tensor Polarizabilities of Nuclei in Storage Rings by the Frozen Spin Method // Phys. Rev. C. 2009. V. 80, No. 4. P. 044315.
9. *Baryshevsky V. G., Silenko A. J.* Potential for the Measurement of the Tensor Electric and Magnetic Polarizabilities of the Deuteron in Storage-Ring Experiments with Polarized Beams // J. Phys. Conf. Ser. 2011. V. 295, No. 1. P. 012034.
10. *Silenko A. J.* High Precision Description and New Properties of a Spin-1 Particle in a Magnetic Field // Phys. Rev. D. 2014. V. 89, No. 12. P. 121701(R).
11. *Bennett G. W. et al. (Muon $(g-2)$ Collab.).* Final Report of the E821 Muon Anomalous Magnetic Moment Measurement at BNL // Phys. Rev. D. 2006. V. 73, No. 7. P. 072003.

Получено 21 июня 2014 г.