

## К ТЕОРИИ ПРОДОЛЬНО НЕОДНОРОДНЫХ ВОЛНОВОДОВ С ИМПЕДАНСНЫМИ СТЕНКАМИ

*А. В. Максименко<sup>а, 1</sup>, Г. И. Загинайлов<sup>а, б</sup>, В. И. Щербинин<sup>а</sup>*

<sup>а</sup> Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт»,  
Научно-производственный комплекс «Возобновляемые источники энергии  
и ресурсосберегающие технологии», Харьков, Украина

<sup>б</sup> Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина, Харьков, Украина

Уравнения Максвелла для продольно неоднородных (нерегулярных) волноводов с импедансными стенками эквивалентно сведены к системе обыкновенных дифференциальных уравнений путем применения поперечных разложений. Полученная система уравнений для амплитуд связанных мод используется при расчетах резонаторов гиротронов. В частности, анализируется влияние эффектов конверсии мод и омических потерь на собственные частоты, добротности и распределение полей в резонаторах гиротронов, работающих в терагерцевом диапазоне.

Maxwell's equations for longitudinally inhomogeneous (irregular) waveguides with impedance walls are equivalently reduced to an infinite set of ordinary differential equations (SODE) by applying the transverse expansions. The resulting set of equations for the amplitudes of the coupled modes is used for calculations of gyrotron cavities. In particular, the impact of the mode conversion and ohmic losses on the eigenfrequencies, quality factors and field distributions in the gyrotron cavities operating in the terahertz (THz) wave range is investigated.

PACS: 84.40.Ik; 42.65.Wi

### ВВЕДЕНИЕ

Продольно неоднородные волноводы различной природы (электромагнитные, оптические, акустические, упругие и т. д.) являются предметом широких и интенсивных исследований. Весьма распространены и граничные условия импедансного типа. В частности, они могут быть использованы для описания естественного затухания на металлических поверхностях, моделирования периодических и шероховатых поверхностей, тонких диэлектрических и металлических слоев, композиционных материалов и т. д. Таким образом, теория продольно неоднородных волноводов с импедансными стенками может быть применена для широкого круга прикладных задач.

Несмотря на определенное многообразие подходов к анализу продольно неоднородных волноводов, ключевую роль в их теории играют методы поперечных сечений [1–3], в некоторой степени обобщающие метод разделения переменных. В основе этих методов лежит концепция волновода сравнения (регулярный волновод, сечение которого

---

<sup>1</sup>E-mail: maksimenko.mcme@yandex.ru

совпадает с сечением нерегулярного волновода при заданном значении продольной координаты). Поля в произвольном сечении нерегулярного волновода разлагаются в двумерные [1, 3] либо трехмерные [2] ряды по полям волновода сравнения. Последние, как известно, могут быть легко получены методом разделения переменных. Также следует упомянуть менее известный подход на основе скалярных разложений продольных полей [4], который, однако, не нашел широкого практического применения вследствие своей сложности. Он также позволяет свести систему уравнений Максвелла к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ) для коэффициентов разложения.

Вышеупомянутые методы и их различные модификации успешно работают для волноводов с идеальными граничными условиями. Однако существенные математические и вычислительные трудности возникают в случае использования более реалистичных — импедансных граничных условий [5]. При этом, если в качестве волновода сравнения брать регулярный импедансный волновод, собственные поля в нем необязательно обладают свойством базисности. Хотя базис, в принципе, может быть построен на основе собственных и присоединенных функций такого волновода, широкого практического использования такой подход не получил, а присоединенные функции анализировались лишь для немногих простейших геометрий (см., например, [5]). Если же в качестве базисных функций по-прежнему использовать векторные поля волновода сравнения с идеальными стенками, то задача не может быть эквивалентно сведена к СОДУ [6].

Возможен также альтернативный подход, основанный на предварительном преобразовании нерегулярного волновода в регулярный с неоднородным анизотропным заполнением [7, 8] путем введения криволинейных координат. Однако он сопряжен с большим количеством аналитических преобразований и численных расчетов, не всегда удобен и применим лишь для ограниченного числа поперечных сечений.

Как правило, скалярные разложения обладают лучшей сходимостью и гибкостью. Последнее и позволяет в случае нерегулярных волноводов с импедансными стенками получить СОДУ прямым образом из уравнений Максвелла, без каких-либо упрощений.

В качестве примера полученная СОДУ используется для расчетов резонатора гиротрона, работающего в терагерцевой области. Как известно [9], гиротроны представляются довольно перспективными источниками мощного терагерцевого излучения. Они могут эффективно использоваться в таких приложениях терагерцевого излучения, как динамическая поляризация ядер в спектроскопии, основанной на ядерном магнитном резонансе [10], изучение тонкой структуры позитрония [11], дистанционное обнаружение скрытых радиоактивных материалов [12], образование плазмы [13] и др. Однако эффективность работы терагерцевых гиротронов пока еще остается достаточно низкой, что обусловлено большим влиянием диссипативных эффектов в резонаторе гиротрона, в частности большими омическими потерями в стенках резонатора. Как известно, учет этих потерь эффективно моделируется граничными условиями импедансного типа [5], что и приводит к необходимости и целесообразности развития адекватной теории потерь энергии в резонаторах терагерцевых гиротронов за счет конверсии и омического затухания мод. Вследствие своей общности развитая теория представляет интерес и для многих других приложений, в частности для расчетов конвертеров [14, 15], транспортировки пучков заряженных частиц в волноводах [16], распространения волн в нерегулярных упругих [17], акустических [18, 19] и оптических [20] волноводах и др.

### СВЕДЕНИЕ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА К СИСТЕМЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Непосредственное сведение уравнений Максвелла к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для продольно неоднородных импедансных волноводов с помощью различных поперечных разложений не вызывает особых аналитических трудностей и проводится так же, как и для неоднородных волноводов с идеальными стенками (см., например, [1, 2, 21, 22] и ссылки в них). В последнем случае в качестве векторных базисных функций использовались либо полные трехмерные поля регулярного волновода с идеальными стенками [1] (волновода сравнения), либо поперечные компоненты полей волновода сравнения [2]. Так как обобщение этих методов на случай нерегулярных импедансных волноводов невозможно (см., например, [6]), за исключением планарных волноводов [23], ниже приводится иной подход, который позволяет это сделать [21, 22]. Для этого следует отказаться от векторных базисных

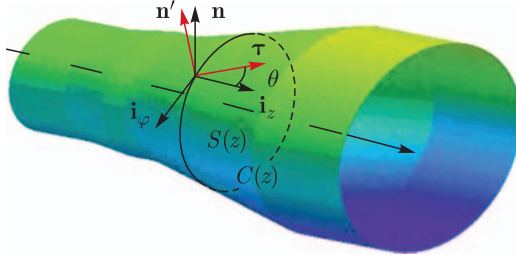


Рис. 1. Продольно неоднородный волновод

функций, а следовательно, и от концепции волновода сравнения. Вместо этого электромагнитные поля в произвольном поперечном сечении нерегулярного волновода (рис. 1) выражаем через две скалярные функции (магнитный и электрический потенциалы Герца), удовлетворяющие одному и тому же уравнению Гельмгольца [5]:

$$\left(\Delta_{\perp} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right)\Psi = 0, \quad \left(\Delta_{\perp} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right)\Phi = 0, \quad (1)$$

где  $k = \omega/c$ ,  $c$  — скорость света в вакууме;  $\omega$  — частота колебаний, временной множитель  $e^{-i\omega t}$  опущен.

Представим неизвестные функции в виде [21, 22]

$$\Psi = \sum_{i=1}^{\infty} A_i(z) \Psi_i(\mathbf{r}_{\perp}; z), \quad \Phi = \sum_{i=1}^{\infty} B_i(z) \Phi_i(\mathbf{r}_{\perp}; z), \quad (2)$$

где  $\Psi_i(\mathbf{r}_{\perp}; z)$  и  $\Phi_i(\mathbf{r}_{\perp}; z)$  — собственные функции задач Дирихле и Неймана соответственно для оператора Лапласа в двумерной области  $S(z)$ :

$$\begin{aligned} (\Delta_{\perp} + \alpha_i^2) \Psi_i &= 0, & (\Delta_{\perp} + \beta_i^2) \Phi_i &= 0, \\ \frac{\partial \Psi_i}{\partial n} \Big|_{C(z)} &= 0, & \Phi_i|_{C(z)} &= 0, \quad \mathbf{r}_{\perp} \in S(z). \end{aligned} \quad (3)$$

Причем следует отметить, что представление для  $\Psi$  сходится равномерно к  $\Psi$  всюду в поперечном сечении  $S(z)$ , включая контур  $C(z)$ , ограничивающий это сечение. В то же время представление для  $\Phi$  равномерно сходится к  $\Phi$  только внутри  $S(z)$ , а на  $C(z)$  стремится к нулю. Базисные функции удовлетворяют следующим условиям ортогональности:

$$\int_{S(z)} \nabla_{\perp} \Psi_i^* \nabla_{\perp} \Psi_k ds = \delta_{ik}, \quad \int_{S(z)} \nabla_{\perp} \Phi_i^* \nabla_{\perp} \Phi_k ds = \delta_{ik}. \quad (4)$$

Уравнения (1) заменяем двумя бесконечными сериями проекционных равенств:

$$\int_{S(z)} \Psi_i^* \left( \Delta_{\perp} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \Psi ds = 0, \quad \int_{S(z)} \Phi_i^* \left( \Delta_{\perp} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \Phi ds = 0. \quad (5)$$

Используя вторую формулу Грина в двумерном варианте для функций  $\Psi_i^*$  и  $\Psi$ :

$$\int_{S(z)} (\Psi_i^* \Delta_{\perp} \Psi - \Psi \Delta_{\perp} \Psi_i^*) ds = \oint_{C(z)} \left( \Psi_i^* \frac{\partial}{\partial n} \Psi - \Psi \frac{\partial}{\partial n} \Psi_i^* \right) dl, \quad (6)$$

и аналогичную для  $\Phi_i^*$  и  $\Phi$ , а также представления (2) и условия ортогональности (3), приходим к двум бесконечным СОДУ

$$(\hat{L}_1^2 + \hat{p})A = 0, \quad (\hat{L}_2^2 + \hat{q})B = 0, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{L}_1 &= \delta_{ik} \frac{d}{dz} + T_{ik}, \quad \hat{p} = \delta_{ik} (p_k^2 + I_k^A), \quad \hat{L}_2 = \delta_{ik} \frac{d}{dz} + S_{ik}, \quad \hat{q} = \delta_{ik} (q_k^2 + I_k^B), \\ p_k^2 &= k^2 - \alpha_i^2, \quad q_k^2 = k^2 - \beta_i^2, \quad A = \{A_i\}_{i=1}^{\infty}, \quad B = \{B_i\}_{i=1}^{\infty}, \\ T_{ik} &= \alpha_i^2 \int_{S(z)} \Psi_i^* \frac{\partial}{\partial z} \Psi_k ds, \quad S_{ik} = \beta_i^2 \int_{S(z)} \Phi_i^* \frac{\partial}{\partial z} \Phi_k ds, \quad I_i^A = \alpha_i^2 \oint_{C(z)} \Psi_i^* \frac{\partial}{\partial n} \Psi dl, \\ I_i^B &= -\beta_i^2 \oint_{C(z)} \Phi_i^* \frac{\partial}{\partial n} \Phi dl. \end{aligned}$$

Детали вывода приведены в приложении.

### ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ИМПЕДАНСНОГО ВИДА К ОБЫКНОВЕННЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

Основная принципиальная трудность, возникающая при анализе продольно нерегулярных импедансных волноводов методами поперечных сечений, заключается в том, чтобы выразить контурные интегралы  $I_i^{A,B}$ , входящие в (7), через уже введенные неизвестные коэффициенты разложений (2). Аналогичная задача решена в [1, 3] для продольно нерегулярных волноводов с идеальными стенками. Однако непосредственное обобщение этих подходов на случай продольно нерегулярных волноводов с импедансными стенками невозможно (см., например, [6]). В рамках предлагаемого подхода это становится возможным. Так как в общем случае волновода произвольного поперечного сечения математические преобразования достаточно громоздки, для простоты и наглядности рассмотрим один из наиболее распространенных и употребительных случаев — продольно нерегулярный волновод круглого сечения. Здесь базисные функции являются функциями Бесселя, а ряды (2) — рядами Дини и Фурье–Бесселя [24]. Явные выражения для базисных функций достаточно просты (см., например, [2]). Выражая граничные условия импедансного типа

$$\mathbf{n}' \times \mathbf{E} = -Z_s \mathbf{n}' \times (\mathbf{n}' \times \mathbf{H})|_{C(z)}, \quad (8)$$

где  $\mathbf{n}'$  — нормаль к поверхности волновода на контуре поперечного сечения (см. рис. 1),  $Z_s$  — импеданс стенок, через потенциалы Герца, приходим к двум соотношениям:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{iZ_s \sin \theta}{k} \frac{\partial}{\partial z}\right) \frac{\partial \Psi}{\partial r} &= \frac{m}{kR} \left(iZ_s k \sin \theta + \frac{\partial}{\partial z}\right) \Phi + \frac{iZ_s \cos \theta}{k} \left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \Psi \Big|_{C(z)}, \\ \left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \Phi &= \frac{m}{R} \left(k \operatorname{tg} \theta - \frac{iZ_s}{\cos \theta} \frac{\partial}{\partial z}\right) \Psi - \left(\frac{iZ_s k}{\cos \theta} + \operatorname{tg} \theta \frac{\partial}{\partial z}\right) \frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_{C(z)}, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $m$  — азимутальный номер,  $\operatorname{tg} \theta = R'(z)$ .

Два соотношения (9) связывают четыре неизвестных функции — два потенциала Герца и их нормальные производные. Таким образом, мы можем ввести две новые неизвестные функции, а две другие необходимо выразить через них и уже введенные неизвестные коэффициенты разложений (2). Тогда система уравнений (7) совместно с (9) образует замкнутую систему дифференциальных уравнений. Кроме того, необходимо частные производные от неизвестных функций, входящих в (9), выразить через полные производные. В качестве новых неизвестных функций целесообразно взять  $(\partial/\partial n)\Psi \equiv A_0$  и  $\Phi \equiv B_0$ . Поскольку для  $\Psi$  и ее  $z$ -производных на контуре  $C(z)$  мы можем использовать разложения типа (2) (см. приложение), остается только одна «лишняя» неизвестная функция, а именно  $(\partial/\partial n)\Phi$ , которая в рассматриваемом частном случае совпадает с  $(\partial/\partial r)\Phi$ . Как показано в приложении, ее можно выразить через  $\{B_i\}_{i=0}^{\infty}$ . Таким образом, после замены частных  $z$ -производных в (9) полными (см. также приложение) приходим к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$\begin{aligned} a_0 A'_0 + b_0 A_0 + c_0 B'_0 + d_0 B_0 &= \sum_{i=1}^{\infty} ((\hat{F}_1 A)_i a_i + d_1 ((\hat{L}_2^2 B)_i b_i + B_i c_i)), \\ B''_0 + d_2 B_0 &= \sum_{i=1}^{\infty} ((\hat{F}_2 A)_i a_i + (\hat{G}_1 B)_i b_i + (\hat{G}_2 B)_i c_i), \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} a_0 &= -k\delta \sin \theta, \quad b_0 = k \left(1 - \frac{\delta R'(z) \sin \theta}{R(z)}\right), \quad c_0 = -\frac{m}{R(z)}, \quad d_0 = -\frac{k^2 m \delta \sin \theta}{R(z)}, \\ d_1 &= \frac{m R'(z)}{R^2(z)}, \quad \hat{F}_1 = k\delta \cos \theta (1 + R'^2(z)) \hat{L}_1^2 + k\delta \cos \theta \left(R'^2(z) \left(k^2 - \frac{m^2}{R^2(z)}\right) + k^2\right), \\ \delta &= \frac{iZ_s}{k}, \quad a_i = \frac{1}{\sqrt{\pi(\mu_i'^2 - m^2)}}, \quad b_i = \int_0^{R(z)} \Phi_i r \, dr, \quad c_i = \left(k^2 - \frac{\mu_i^2}{R^2(z)}\right) b_i - \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \\ Z_s &= \left(\frac{\omega}{8\pi\sigma}\right)^{1/2} (1 - i), \quad d_2 = k^2 - \left(\frac{R'(z)m}{R(z)}\right)^2, \quad \hat{F}_2 = \frac{km(1 - R'^2(z))}{R(z) \cos \theta} (\sin \theta - \delta \hat{L}_1), \\ &J_m(\mu_i) = 0, \quad J'_m(\mu_i') = 0, \\ \hat{G}_1 &= \frac{(R'^2(z) - R''(z)R(z)) \cos \theta + k^2 \delta R(z)(1 - R'^2(z))}{R^2(z) \cos \theta} \hat{L}_2^2 - \frac{(1 + R'^2(z))R'(z)}{R(z)} \hat{L}_2^3, \\ \hat{G}_2 &= \frac{(R'^2(z) - R''(z)R(z)) \cos \theta + k^2 \delta R(z)(1 - R'^2(z))}{R^2(z) \cos \theta} - \frac{(1 + R'^2(z))R'(z)}{R(z)} \hat{L}_2, \end{aligned}$$

$\sigma$  — проводимость стенок.

Уравнения (7), (10) образуют замкнутую СОДУ для неизвестных коэффициентов  $\{A_i\}_{i=0}^{\infty}$  и  $\{B_i\}_{i=0}^{\infty}$ . Полученная СОДУ полностью эквивалентна первоначальной системе уравнений Максвелла и пригодна для анализа волноводов с произвольными продольными нерегулярностями и произвольным импедансом стенок. Обобщение данного подхода на случай импедансных условий другого типа не вызывает принципиальных затруднений. В отличие от аналогичных СОДУ, полученных другими поперечными разложениями [1–4], в рассматриваемом случае связь амплитудных коэффициентов  $A_i$  и  $B_i$  обусловлена лишь граничными условиями (8). Также следует отметить сравнительную простоту и компактность полученной СОДУ, что, безусловно, существенно облегчает численную реализацию. Для сравнения отметим, что в [1] необходимо вводить четыре бесконечные серии неизвестных коэффициентов даже в случае идеальных стенок, а в [3, 4] — шесть.

### ПРИМЕНЕНИЕ ПОЛУЧЕННОЙ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ РАСЧЕТОВ РЕЗОНАТОРОВ ТЕРАГЕРЦЕВЫХ ГИРОТРОНОВ

Идеальным примером приложения разработанного подхода является расчет резонаторов гиротронов, работающих в субмиллиметровом (терагерцевом) и миллиметровом диапазонах. Резонаторы гиротронов чаще всего представляют собой секцию волновода круглого сечения с изменяющимся радиусом (см. рис. 1). Центральная часть резонатора имеет постоянный радиус. Она соединяется с входной частью, представляющей собой закритическое (для рабочей моды) сужение, и выходной частью в виде плавно расширяющегося волновода (см., например, [21, 22]).

Для анализа резонатора гиротрона СОДУ (7), (10) должна быть дополнена граничными условиями на концах резонатора. Обычно это условия излучения либо условия затухания (если соответствующая волна не является распространяющейся). Также для простоты полагаем, что резонатор с обоих концов соединен с полубесконечными регулярными волноводами с идеальными стенками. Это позволяет положить  $A_0 = B_0 = 0$  на обоих концах резонатора.

Конкретные расчеты выполнялись для 1-ТГц гиротрона [25], для которого продольный профиль радиуса приведен в [21, 22]. Учитывая, что в рассматриваемом случае имеется два малых параметра  $Z_s \ll 1$  и  $\sin \theta \ll 1$ , граничные условия можно упростить, оставляя в них лишь линейные члены по этим малым параметрам. В таком приближении связью между ТЕ- и ТМ-модами поляризации можно пренебречь ( $\Phi(\mathbf{r}_{\perp}; z) \equiv 0$ ), а СОДУ учитывает лишь связь между различными радиальными ТЕ-модами.

СОДУ (7), (10) решалась методом конечных разностей. Достигнута сходимость относительно как количества точек дискретизации, так и количества учитываемых в (2) членов разложения. Точность расчетов контролировалась проверкой закона сохранения энергии. Значение проводимости выбиралось равным  $10^7$  См/м, что является типичной величиной для проводимости меди в терагерцевой области.

Значения рабочей частоты и добротности резонатора в зависимости от количества учтенных членов разложения  $N$  в (2), которое соответствует количеству учтенных радиальных мод, приведены в таблице. Причем нумерация мод осуществлялась следующим образом:  $N = 1$  соответствует рабочей моде  $TE_{17,4}$ ,  $N = 2$  —  $TE_{17,3}$ ,  $N = 3$  —  $TE_{17,5}$ ,  $N = 4$  —  $TE_{17,2}$  и т. д. Так, номер радиальной моды возрастает по мере увеличения уда-

**Зависимость частоты и добротности рабочей моды от количества радиальных мод, учтенных в (2)**

$N$	Частота, ГГц	Добротность
1	1029,2366	1102,6
2	1029,2355	1134
3	1029,2444	1107,6
4	1029,243	1110,2
5	1029,245	1107,8
6	1029,2449	1109,4

ленности критической частоты соответствующей моды от критической частоты рабочей моды. Как видно из таблицы, резонансная частота несущественно зависит от  $N$ . Более существенная зависимость от  $N$  наблюдается у добротности. Тем не менее при увеличении  $N$  значения обеих величин сходятся к определенным пределам. Это демонстрируют графики на рис. 2 и 3, на которых представлены (в логарифмическом масштабе) величины  $\zeta(N) = \left| \frac{\omega_{N+1} - \omega_N}{\omega_N} \right|$  и  $\xi(N) = \left| \frac{Q_{N+1} - Q_N}{Q_N} \right|$ , где  $\omega_N$  и  $Q_N$  — частота и добротность, вычисленные при учете  $N$  членов разложения в (2).

Отметим, что немонотонность  $\zeta(N)$  и  $\xi(N)$  вызвана способом нумерации радиальных мод, так как высшие и низшие соседние ра-

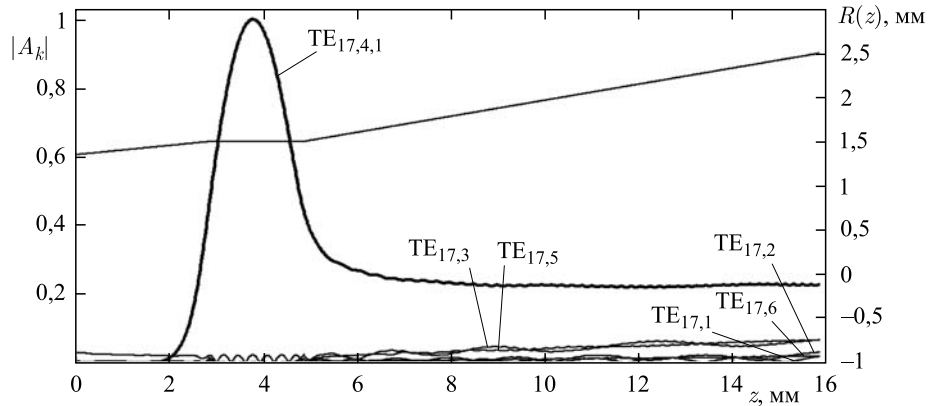


Рис. 2. Профиль полей для первого аксиального резонанса гиротрона и профиль резонатора гиротрона

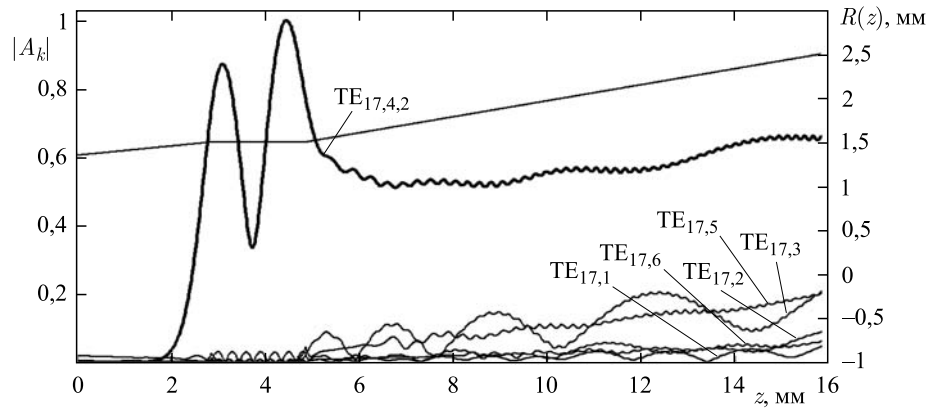


Рис. 3. Профиль полей для второго аксиального резонанса гиротрона и профиль резонатора гиротрона

диальные моды неравноценно влияют на получаемые результаты. Также отметим, что рассчитанная рабочая частота гиротрона хорошо совпадает с экспериментальным значением [25].

Что касается добротности, то экспериментальная погрешность измерения этой величины в рассматриваемом диапазоне частот много больше продемонстрированной погрешности вычислений, поэтому их сравнение не особенно информативно. Для оценки влияния на добротность омических потерь и конверсии мод приведем значение добротности этого же резонатора в одномодовом приближении в отсутствие омических потерь:  $Q_0 = 1312$ . Сравнивая это значение со значениями в таблице, приходим к выводу, что основной и существенный вклад ( $\sim 20\%$ ) в уменьшение добротности вносит именно учет омических потерь. В то же время учет низших радиальных мод приводит к некоторому увеличению добротности, а высших — к обратному эффекту.

На рис. 4, 5 демонстрируется распределение в случае основного (рабочего) и второго аксиального резонанса соответственно. Его вид в основном такой же, как и в одномодовом приближении в отсутствие потерь. Однако следует отметить, что вклад паразитных мод в излучение достаточно велик ( $\sim 7-9\%$ ) для обоих резонансов.

Кроме того, следует отметить некоторые общие закономерности конверсии мод для резонаторов гиротронов.

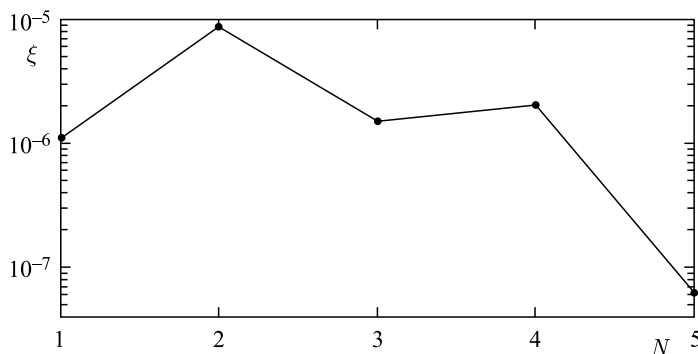


Рис. 4. Относительная погрешность вычисления частоты гиротрона для первого аксиального резонанса

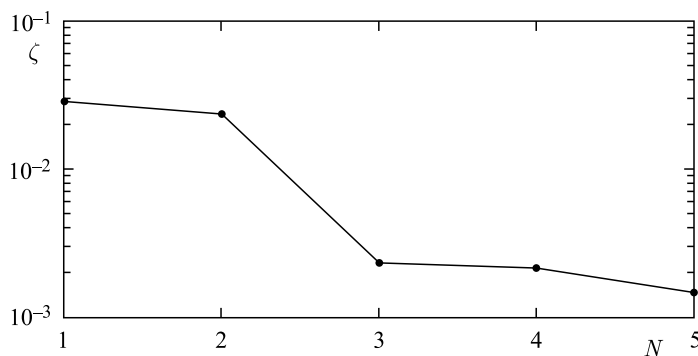


Рис. 5. Относительная погрешность вычисления добротности гиротрона для второго аксиального резонанса



1. Паразитные моды появляются преимущественно в выходной секции резонатора.
2. Амплитуды мод уменьшаются при удалении критических частот этих мод от рабочей частоты, которая находится вблизи критической частоты рабочей моды.
3. Амплитуды высших радиальных мод меньше амплитуд низших радиальных мод, критические частоты которых примерно одинаково удалены от рабочей частоты.
4. Амплитуды как рабочей, так и паразитных мод в выходной секции являются часто и мелко осциллирующими функциями продольной координаты.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленная теория является дальнейшим развитием методов поперечных сечений, использующихся для анализа продольно неоднородных волноведущих структур. По сравнению с предыдущими вариантами этих методов она носит более абстрактный характер и поэтому является более универсальной и гибкой.

Следует отметить также преимущества данного подхода над подходами, основанными на использовании криволинейных систем координат [7, 8]. Данный прием упрощает граничные условия, которые становятся такими же, как и в регулярном волноводе, и допускают разделение переменных. Однако при этом уравнения для полей внутри волновода невероятно усложняются как с точки зрения их компьютерной реализации, так и с точки зрения их получения. В рамках рассматриваемого подхода уравнения для полей остаются такими же, как в случае регулярного волновода. В то же время аналитические преобразования, связанные с приведением граничных условий к надлежащему виду, не являются столь сложными, так же как и компьютерная реализация соответствующих уравнений.

Указанные преимущества наглядно подтверждаются и продемонстрированы конкретными расчетами резонатора гиротрона, работающего в терагерцевой области. В частности, показано, что омические потери в стенках резонатора являются основной причиной существенного понижения добротности резонатора. Вклад конверсии мод в этот эффект не такой существенный, хотя для гиротронов она достаточно велика. Рассматриваемые эффекты могут привести к снижению эффективности работы гиротронов в терагерцевой области. Метод ослабления омических потерь может быть основан на использовании гофрированных стенок резонатора [26–28].

Для компьютерной реализации развитой теории не требуется мощного компьютерного оборудования, а для воспроизведения вывода СОДУ — глубокой математической подготовки, что вполне по силам аспирантам, молодым специалистам и экспериментаторам. Более того, в ряде конкретных случаев допускаются существенные упрощения.

Ближайшие обобщения развитого подхода могут быть связаны с рассмотрением нерегулярных импедансных волноводов более сложных поперечных сечений, диэлектрических волноводов, волноводов с неоднородным и анизотропным заполнением, а также задач возбуждения указанных волноводов.

### ПРИЛОЖЕНИЕ

Для упрощения получения СОДУ можно установить следующие правила для представления  $z$ -производных  $\Psi$  и  $\Phi$ :

$$\frac{\partial^n \Psi}{\partial z^n} = \sum_{i=1}^{\infty} (\hat{L}_1^n A)_i \Psi_i, \quad \frac{\partial^n \Phi}{\partial z^n} = \sum_{i=1}^{\infty} (\hat{L}_2^n B)_i \Phi_i. \quad (11)$$

Для этого представим  $\partial\Psi/\partial z$  в виде

$$\frac{\partial\Psi}{\partial z} = \sum_{i=1}^{\infty} X_i \Psi_i. \quad (12)$$

Домножая (12) на  $\Psi_k^*$  и интегрируя по поперечному сечению, получаем

$$X_i = \alpha_i^2 \int_{S(z)} \Psi_i^* \frac{\partial}{\partial z} \Psi ds. \quad (13)$$

Пользуясь правилом дифференцирования интегралов по параметру, имеем

$$\left(\frac{A_i}{\alpha_i^2}\right)' \equiv \frac{d}{dz} \int_{S(z)} \Psi_i^* \Psi ds = S'(z) \Psi_i^* \Psi \Big|_{C(z)} + \int_{S(z)} \left( \Psi \frac{\partial}{\partial z} \Psi_i^* + \Psi_i^* \frac{\partial}{\partial z} \Psi \right) ds. \quad (14)$$

Далее в подынтегральном выражении представляем  $\Psi$  в виде разложения (2) и используем то же правило еще раз:

$$\begin{aligned} \int_{S(z)} \Psi \frac{\partial}{\partial z} \Psi_i^* ds &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \int_{S(z)} \Psi_k \frac{\partial}{\partial z} \Psi_i^* ds = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left( - \int_{S(z)} \Psi_i^* \frac{\partial}{\partial z} \Psi_k ds + \frac{d}{dz} \int_{S(z)} \Psi_i^* \Psi_k ds - S'(z) \Psi_i^* \Psi_k \Big|_{C(z)} \right). \end{aligned}$$

Подставляя полученное выражение в (14) и используя равенство  $\int_{S(z)} \Psi_i^* \Psi_k ds = \delta_{ik}/\alpha_i^2$  (что следует из (3), (4)), приходим к соотношению

$$X_i = A_i' + \sum_{k=1}^{\infty} T_{ik} A_k \equiv (L_1 A)_i. \quad (15)$$

Для функции  $\Phi$  все делается аналогично. Повторяя эту процедуру  $n$  раз, приходим к (11).

Избавление от частных производных в (9) происходит следующим образом. Для  $\Psi$  и ее  $z$ -производных можно воспользоваться представлением (11), которое справедливо не только всюду внутри  $S(z)$ , но и на контуре  $C(z)$ . Частная  $z$ -производная от  $(\partial/\partial r)\Psi$  на  $C(z)$  находится в соответствии с определением:

$$A_0(z) \equiv \frac{\partial}{\partial r} \Psi(R(z); z). \quad (16)$$

Дифференцируя (16) по  $z$ , получаем

$$A_0'(z) \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} \Psi(R(z); z) R'(z) + \frac{\partial^2}{\partial z \partial r} \Psi(R(z); z). \quad (17)$$

Используя уравнение (1) на  $C(z)$ , можно выразить  $(\partial^2/\partial r^2)\Psi(R(z); z)$  через  $A_0(z)$ ,  $\Psi(R(z); z)$  и  $(\partial^2/\partial z^2)\Psi(R(z); z)$ . Последние вычисляются согласно (11).

Применяя аналогичную процедуру дважды к  $B_0(z) \equiv \Phi(R(z); z)$ , можно выразить  $(\partial^2/\partial z^2)\Phi(R(z); z)$  через  $B_0(z)$ ,  $(\partial^2/\partial z\partial r)\Phi(R(z); z)$  и  $(\partial/\partial r)\Phi(R(z); z)$ . Последние находим из (1):

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \int_0^r \left( \frac{m^2}{r^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2 \right) \Phi r \, dr + B(z), \quad (18)$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial r} = \frac{1}{r} \int_0^r \left( \frac{m^2}{r^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2 \right) \frac{\partial}{\partial z} \Phi r \, dr + B'(z), \quad (19)$$

где  $B(z)$  — константа интегрирования. Полагая  $r = R(z)$  и используя (11), выражаем указанные неизвестные функции через уже введенные неизвестные коэффициенты  $B_i(z)$ . Константа интегрирования  $B(z)$  находится следующим образом.

Применяя первую формулу Грина для функций  $\Phi(\mathbf{r}_\perp; z)$  и  $\exp(-im\varphi)$  ( $\varphi$  — азимутальный угол) в двумерной области (поперечного сечения), имеем

$$\int_{S(z)} \exp(-im\varphi) \Delta_\perp \Phi \, ds = - \int_{S(z)} \nabla_\perp \exp(-im\varphi) \nabla_\perp \Phi \, ds + \int_{C(z)} \exp(-im\varphi) \frac{\partial\Phi}{\partial r} \, dl. \quad (20)$$

Используя (1), после несложных преобразований (20) сводим к

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r} = \frac{1}{R(z)} \int_0^{R(z)} \left( \frac{m^2}{r^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2 \right) \Phi r \, dr,$$

что совпадает с (18), взятым при  $r = R(z)$ , но без  $B(z)$ . Следовательно,  $B(z) \equiv 0$ . Представляя  $\Phi$  и  $(\partial/\partial z)\Phi$  под интегралами в (18) и (19) в соответствии с (11) и выполняя интегрирование почленно, получаем связь  $\frac{\partial\Phi}{\partial r}$  и  $\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial r}$  с  $B_i(z)$  и их производными.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Reiter G. // Proc. of IEE — Part B: Elect. Commun. Eng. 1959. V. 106. P. 54–61.
2. Каценеленбаум Б. З. Теория нерегулярных волноводов с медленно меняющимися параметрами. М.: Изд-во АН СССР, 1961.
3. Машковцев Б. М. и др. Теория волноводов. М.: Наука, 1966.
4. Stevenson A. F. General Theory of Electromagnetic Horns // J. Appl. Phys. 1951. V. 22. P. 1447–1460.
5. Ильинский А. С., Слепян Г. Я. Колебания и волны в электродинамических системах с потерями. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983.
6. Vlasov A. N., Antonsen T. M. // IEEE Trans. ED. 2001. V. 48. P. 45–55.
7. Кравченко В. Ф. и др. // Докл. РАН. 2007. Т. 412, № 6. С. 759.
8. Ильинский А. С., Свешников А. Г. Методы исследования нерегулярных волноводов // Журн. вычисл. мат. и мат. физ. 1968. Т. 8, № 2. С. 363–373.

9. *Booske J. H. et al.* Vacuum Electronic High Power Terahertz Sources // IEEE Trans., Terahertz Sci. Technol. 2011. V. 1. P. 54–75.
10. *Matsuki Y. et al.* Application of Continuously Frequency-Tunable 0.4 THz Gyrotron to Dynamic Nuclear Polarization for 600 MHz Solid-State NMR // J. Infrar. Millim. Terahz. Waves. 2012. V. 33. P. 745–755.
11. *Dumbrajs O., Idehara T.* Frequency Tunable Gyrotron FU CW VA for Measuring Hyperfine Split of Positronium // J. Infrar. Millim. Terahz. Waves. 2010. V. 31. P. 1265–1270.
12. *Nusinovich G. S., Glyavin M. Yu., Luchinin A. G.* The Concept of Remote Detection of Concealed Radioactive Materials by Using High-Power THz Radiation // Proc. of the 38th IRMMW-THz, Mainz, Germany, 2013.
13. *Bratman V. L. et al.* Features of Plasma Glow in Low Pressure Terahertz Gas Discharge // Phys. Plasmas. 2013. V. 20. P. 123512.
14. *Doane J. L.* Polarization Converters for Circular Waveguide Modes // Inr. J. Electron. 1986. V. 61. P. 1109–1133.
15. *Bucley M. J., Stein I. A., Vernon R. J.* A Single-Period  $TE_{02}$ – $TE_{01}$  Mode Converter in a Highly Overmoded Circular Waveguide // IEEE Trans. Microw. Theory Tech., MTT-39. 1991. P. 1301–1306.
16. *Yu J., Antonsen T., Nusinovich G. S.* Excitation of Backward Waves in Beam Tunnel of High-Power Gyrotrons // IEEE Trans., Plasma Sci. 2010. V. 38, No. 6. P. 1193–1199.
17. *Галаненко В. Б.* Обобщение метода поперечных сечений на задачу распространения волн в упругом слое с плавно изменяющимися параметрами // Акустичн. вісник. 1998. Т. 1, № 2. С. 41–47.
18. *Arnold J. M., Felsen I. B.* Couple Mode Theory of Intrinsic Modes in Wedge // J. Acoust. Soc. Amer. 1986. V. 79. P. 31–40.
19. *Belibassakis K. A. et al.* Acoustic Wave Propagation in Inhomogeneous, Layered Waveguides Based on Modal Expansions and hp-FEM // Wave Motion. 2014 (in press).
20. *Арсланов Н. А.* Нанооптика ближнепольной спектроскопии: эффекты распространения светового поля в сужающемся субволновом зонде. Дис. . . . канд. физ.-мат. наук. Казань, 2006.
21. *Zagayaylov G. I. et al.* Novel Approach to the Theory of Longitudinally Inhomogeneous Lossy Waveguides // MSMW'13, Kharkov, 2013. P. 523.
22. *Zagayaylov G. I. et al.* New Approach to the Theory of Irregular Lossy Waveguides and Its Application to Design of Terahertz Gyrotrons // EuMW2013, Nuremberg, 2013. P. 971.
23. *Gallava R. L.* Propagation in Nonuniform Waveguides with Impedance Walls // Radio Sci. 1964. V. 68D, No. 11. P. 1201–1213.
24. *Watson G. N.* A Treatise on the Theory of Bessel Functions. 2nd ed. Cambridge Univ. Press, 1966. Part XVIII.
25. *Glyavin M. Yu., Luchinin A. G., Golubiatnikov G. Yu.* Generation of 1.5-kW, 1-THz Coherent Radiation from a Gyrotron with a Pulsed Magnetic Field // Phys. Rev. Lett. 2008. V. 100. P. 015101.
26. *Zagayaylov G. I. et al.* Calculation of Energy Losses in Cavity of ITER Relevant Coaxial Gyrotron // Proc. of the 35th EuMW. Paris, 2005. P. 1107–1110.
27. *Zagayaylov G. I., Mitina I. V.* Electromagnetic Analysis of Coaxial Gyrotron Cavity with the Inner Conductor Having Corrugations of an Arbitrary Shape // Progress in Electromag. Res. B. 2011. V. 31. P. 339–356.
28. *Zagayaylov G. I., Iaremenko S. S., Schuenemann K.* Improved Theory on Energy Losses in Corrugated Inner Conductor of Coaxial Gyrotron Cavity // Proc. of Intern. Conf. Math. Methods in Electromag. Theory. Kharkov, 2012. P. 283–287.

Получено 16 сентября 2014 г.