Письма в ЭЧАЯ. 2018. Т. 15, № 1(213). С. 8–23

РАСПАД Δ-ИЗОБАРЫ В КОВАРИАНТНОЙ МОДЕЛИ КВАРКОВ

М. А. Иванов [а, 1], *Г. Нурбакова* [б, в, 2], *Ж. Тюлемисов* [а, б, 3]

[а] Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

[б] Научно-исследовательский институт экспериментальной и теоретической физики, Алма-Ата, Казахстан

[в] Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алма-Ата, Казахстан

Изучен сильный распад Δ-изобары в рамках ковариантной модели кварков. Приведено детальное построение на базе преобразования Фирца релятивистского трехкваркового тока с квантовыми числами $J^P = 3/2^+$. Показано, что данный ток имеет единственную форму. Фитированием свободного параметра модели была вычислена ширина распада. Получено поведение сильного формфактора $G_{\Delta p\pi}(Q^2)$ для пространственноподобных значений квадрата переданного импульса пиона.

We investigate strong decay of the Δ isobar as three-quark system in the covariant quark model. We analytically, based on the Fierz transformation, prove that the three-quark current of baryon with quantum numbers $J^P = 3/2^+$ has only one possible form. The width of decay is calculated by fitting of the model's free parameter. We also numerically compute strong form factor $G_{\Delta p\pi}(Q^2)$ of the Δ isobar, which is determined for the space-like transfer momenta.

PACS: 12.39.Ki; 13.30.Eg

ВВЕДЕНИЕ

В ядерной физике хорошо экспериментально изученным сильным распадом бариона, состоящего лишь из легких u- и d-кварков, является адронный распад Δ-изобары. При наличии канала сильного распада данный канал превалирует над остальными за счет большей вероятности, в случае Δ-изобары 99 % — адронный распад, 1 % — электромагнитный распад. Вследствие этого можно рассматривать распад Δ-изобары как эталонный для частиц со спином 3/2.

Δ-изобара исследовалась в качестве трехкварковой системы в рамках модели конфайнмента кварков [1]. Эта модель основана на двух гипотезах. Во-первых, конфайнмент кварков осуществляется путем усреднения по вакуумным глюонным полям, обеспечивающим конфайнмент любого цветного состояния. Во-вторых, адроны рассматриваются как коллективные бесцветные возбуждения кварк-глюонного взаимодействия.

[1] E-mail: ivanovm@theor.jinr.ru
[2] E-mail: g.nurbakova@gmail.com
[3] E-mail: zhomart@theor.jinr.ru

Целью данной работы является изучение свойств Δ-изобары, рассматриваемой как связанное состояние из легких u- и d-кварков, в рамках ковариантной модели кварков. Дано детальное построение релятивистского трехкваркового тока с квантовыми числами $J^P = 3/2^+$. Показано, что данный ток имеет единственную форму в отличие от нуклона, имеющего два независимых тока, соответствующих векторному и тензорному взаимодействию [2].

На основе нелокального обобщения трехкваркового тока Δ-изобары, в рамках ковариантной модели кварков с инфракрасным конфайнментом, вычислены массовый оператор, константа связи, а также матричный элемент распада $\Delta \to N\pi$.

Фит свободного параметра модели позволил получить значения для ширины распада, а также зависимость сильных формфакторов для пространственноподобных значений переданного импульса, которые находятся в удовлетворительном согласии с экспериментом для наблюдаемых величин, а также с теоретическими работами других авторов.

Работа выстроена следующим образом. В разд. 1 мы доказали, что трехкварковый ток Δ-изобары имеет единственно возможную форму. В разд. 2 мы представили явный вид нелокального лагранжиана взаимодействия бариона, записали выражение для массового оператора собственно энергетической диаграммы Δ-изобары, который возникает во втором порядке разложения S-матрицы по теории возмущений. В разд. 3 получили матричный элемент мезон-нуклонного распада Δ-изобары, численно определили ширину данного распада, а также при помощи дипольного фита описали сильный формфактор Δ-изобары.

1. ТРЕХКВАРКОВЫЕ ТОКИ БАРИОНОВ

Общий вид трехкваркового тока Δ-изобары с квантовыми числами $J^P = 3/2^+$ дается следующим выражением

$$(J^\mu)^{k_1k_2k_3} = \varepsilon^{a_1a_2a_3}\Gamma_1 q_{a_1}^{k_1}\left[(q_{a_2}^{k_2})^T C\Gamma_2 q_{a_3}^{k_3}\right], \tag{1}$$

где $a_1, a_2, a_3 = 1, 2, 3$ — цветовые индексы; $C = \gamma^0\gamma^2$ — матрица зарядового сопряжения; $k_1, k_2, k_3 = 1, 2$; лоренц-индекс μ, соответствующий спину 1, может быть либо в матрице Γ_1, либо в матрице Γ_2. Поэтому на данном этапе мы не выписываем его явно.

В случае трехкваркового тока протона с квантовыми числами $J^P = 1/2^+$ имеем

$$J_p = \varepsilon^{a_1a_2a_3}\Gamma^A\gamma^5 d^{a_1}(x)\left[u^{a_2}(x)C\Gamma_A u^{a_3}(x)\right], \tag{2}$$

для которого существует две возможности выбора нетривиальных трехкварковых токов: $\Gamma^A\otimes\Gamma_A = \gamma^\alpha\otimes\gamma_\alpha$ (векторный ток) и $\Gamma^A\otimes\Gamma_A = (1/2)\,\sigma^{\alpha\beta}\otimes\sigma_{\alpha\beta}$ (тензорный ток). Явный вид полного кваркового тока для нуклона дается выражением $J_N = xJ_N^T + (1-x)J_N^V$, где параметр смешивания $0 \leqslant x \leqslant 1$. В случае нейтрона нужно заменить $u \leftrightarrow d$ (см. [2]).

Матрица зарядового сопряжения обладает свойствами

$$C = C^{-1} = C^+ = -C^T. \tag{3}$$

Нам понадобятся следующие ее свойства

$$C\Gamma^T C^{-1} = \begin{cases} \Gamma & \text{для} \quad \Gamma = S, P, A, \\ -\Gamma & \text{для} \quad \Gamma = V, T, \end{cases} \tag{4}$$

где $S \to I$, $P \to \gamma_5$, $V \to \gamma^\mu$, $A \to \gamma^\mu\gamma_5$, $T \to \sigma^{\mu\nu}$.

Таблица 1. **Возможные квантовые комбинации дикварка**

Скалярный дикварк	$(q^{k_2}_{a_2})^T C\gamma_5 q^{k_3}_{a_3}\varepsilon^{a_1a_2a_3}$	$J^P = 0^+$
Псевдоскалярный дикварк	$(q^{k_2}_{a_2})^T C q^{k_3}_{a_3}\varepsilon^{a_1a_2a_3}$	$J^P = 0^-$
Векторный дикварк	$(q^{k_2}_{a_2})^T C\gamma_5\gamma^\mu q^{k_3}_{a_3}\varepsilon^{a_1a_2a_3}$	$J^P = 1^-$
Аксиально-векторный дикварк	$(q^{k_2}_{a_2})^T C\gamma^\mu q^{k_3}_{a_3}\varepsilon^{a_1a_2a_3}$	$J^P = 1^+$
Тензорный дикварк	$(q^{k_2}_{a_2})^T C\gamma_5\sigma^{\mu\nu} q^{k_3}_{a_3}\varepsilon^{a_1a_2a_3}$	$J^P = 1^+$
Псевдотензорный дикварк	$(q^{k_2}_{a_2})^T C\sigma^{\mu\nu} q^{k_3}_{a_3}\varepsilon^{a_1a_2a_3}$	$J^P = 1^-$

Двухкварковое цветное состояние $(q^{k_2}_{a_2})^T C\Gamma_2 q^{k_3}_{a_3}\varepsilon^{a_1a_2a_3}$ называется дикварком. Его возможные квантовые комбинации без производных приведены в табл. 1.

В табл. 1 использована матрица $\sigma^{\mu\nu} = i/2[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$.

Пусть $\Delta^{k_1k_2k_3}(x)$ есть мультиплет всех изоспиновых состояний Δ-изобары. Спинор Δ^{k_1,k_2,k_3} симметричен относительно перестановок k_1, k_2, k_3 и удовлетворяет условиям Рариты–Швингера: $\Delta_\mu\gamma^\mu = 0$ и $\partial^\mu\gamma_\mu = 0$. Связь элементов мультиплета с физическими состояниями дается соотношениями

$$\Delta^{111} = \Delta^{++}, \quad \Delta^{211} = \frac{1}{\sqrt{3}}\Delta^+, \quad \Delta^{122} = \frac{1}{\sqrt{3}}\Delta^0, \quad \Delta^{222} = \Delta^-. \tag{5}$$

В силу симметрии по произвольной перестановке изоспиновых индексов в спиноре $\Delta^{k_1k_2k_3}$ соответствующий трехкварковый ток также должен обладать этим свойством. Это означает, что ток в уравнении (1) должен быть симметричен при перестановке $k_1 \leftrightarrow k_2 \leftrightarrow k_3$. Данное условие накладывает ограничение на выбор матриц Γ_1 и Γ_2. Рассмотрим вначале перестановку индексов в дикварке. Должно выполняться равенство

$$\varepsilon^{a_1a_2a_3} q^{k_2}_{a_2\alpha_2}(C\Gamma_2)_{\alpha_2\alpha_3} q^{k_3}_{a_3\alpha_3} = \varepsilon^{a_1a_2a_3} q^{k_3}_{a_2\alpha_2}(C\Gamma_2)_{\alpha_2\alpha_3} q^{k_2}_{a_3\alpha_3}. \tag{6}$$

Переставим местами кварки в правой части равенства, учитывая антикоммутативность фермионных полей. Имеем

$$\begin{aligned}\varepsilon^{a_1a_2a_3} q^{k_3}_{a_2\alpha_2}(C\Gamma_2)_{\alpha_2\alpha_3} q^{k_2}_{a_3\alpha_3} = -\varepsilon^{a_1a_2a_3} q^{k_2}_{a_3\alpha_3}(C\Gamma_2)_{\alpha_2\alpha_3} q^{k_3}_{a_2\alpha_2} = \\ = \varepsilon^{a_1a_2a_3} q^{k_2}_{a_2\alpha_3}(C\Gamma_2)^T_{\alpha_3\alpha_2} q^{k_3}_{a_3\alpha_2}.\end{aligned}$$

Отсюда видно, что правая часть в уравнении (6) совпадает с левой, если

$$C\Gamma_2 = (C\Gamma_2)^T = \Gamma_2^T C^T = -\Gamma_2^T C, \qquad C\Gamma_2^T C^{-1} = -\Gamma_2. \tag{7}$$

Как следует из уравнения (4), Γ_2 может быть либо вектором $\Gamma_2 = \gamma^\mu$, либо тензором $\Gamma_2 = \sigma^{\mu\nu}$. Известно, что четность у Δ-изобары положительная. Рассмотрим случай $\Gamma_2 = \gamma^\mu$, которому соответствует аксиально-векторный дикварк (табл. 1) с положительной четностью, значит $\Gamma_1 = I$. Для случая $\Gamma_2 = \sigma^{\mu\nu}$ следует, что $\Gamma_1 = \gamma_\nu$.

Рассмотрим теперь перестановку индексов k_1 и k_3. В данном случае должно выполняться равенство

$$\begin{aligned}\varepsilon^{a_1a_2a_3}(\Gamma_1)_{\alpha\alpha_1} q^{k_1}_{a_1\alpha_1}\left[q^{k_2}_{a_2\alpha_2}(C\Gamma_2)_{\alpha_2\alpha_3} q^{k_3}_{a_3\alpha_3}\right] = \\ = \varepsilon^{a_1a_2a_3}(\Gamma_1)_{\alpha\alpha_1} q^{k_3}_{a_1\alpha_1}\left[q^{k_2}_{a_2\alpha_2}(C\Gamma_2)_{\alpha_2\alpha_3} q^{k_1}_{a_3\alpha_3}\right].\end{aligned} \tag{8}$$

Переставим местами кварки q^{k_3} и q^{k_1} в правой части равенства. Имеем

$$
\begin{aligned}
&-\varepsilon^{a_1a_2a_3}(\Gamma_1)_{\alpha\alpha_1}q^{k_1}_{a_3\alpha_3}\left[q^{k_2}_{a_2\alpha_2}(C\Gamma_2)_{\alpha_2\alpha_3}q^{k_3}_{a_1\alpha_1}\right]= \\
&\qquad\qquad = \varepsilon^{a_3a_2a_1}(\Gamma_1)_{\alpha\alpha_1}q^{k_1}_{a_3\alpha_3}\left[q^{k_2}_{a_2\alpha_2}C_{\alpha_2\beta_2}(\Gamma_2)_{\beta_2\alpha_3}q^{k_3}_{a_1\alpha_1}\right]. \qquad (9)
\end{aligned}
$$

Далее воспользуемся тождеством Фирца

$$
4(\Gamma_1)_{\alpha\alpha_1}(\Gamma_2)_{\beta_2\alpha_3}=\sum_D(\Gamma_1\Gamma^D)_{\alpha\alpha_3}(\Gamma_2\Gamma^D)_{\beta_2\alpha_1}, \qquad (10)
$$

где $\Gamma^D=\{I,\gamma^\mu,\sigma^{\mu\nu}(\mu<\nu),\gamma_5,i\gamma^\mu\gamma_5\}$ есть полный набор базисных матриц Дирака.

Введем обозначения

$$
\begin{cases}
(O_1)_{\alpha\alpha_1}(O_2)_{\beta_2\alpha_3}\equiv(\widetilde{O}_1)\otimes(\widetilde{O}_2),\\
(O_1)_{\alpha\alpha_3}(O_2)_{\beta_2\alpha_1}\equiv(O_1)\otimes(O_2).
\end{cases}
$$

У нас имеются две комбинации

$$
\Gamma_1\times\Gamma_2=I\times\gamma^\mu, \qquad (11)
$$

$$
\Gamma_1\times\Gamma_2=\gamma_\nu\times\sigma^{\mu\nu}. \qquad (12)
$$

Последовательно рассмотрим эти две возможности. Сначала случай, соответствующий уравнению (11). Имеем

$$
4\tilde{I}\otimes\tilde{\gamma}^\mu=I\otimes\gamma^\mu+\gamma_\alpha\otimes\gamma^\mu\gamma^\alpha+\frac{1}{2}\sigma_{\alpha\beta}\otimes\gamma^\mu\sigma^{\alpha\beta}+\gamma_5\otimes\gamma^\mu\gamma_5-\gamma_\alpha\gamma_5\otimes\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma_5.
$$

Преобразуем правую часть равенства к базису. Нам понадобится формула

$$
\gamma_5\sigma^{\mu\nu}=-\frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}, \qquad (13)
$$

где мы используем следующий вид тензора Леви-Чевиты $\epsilon_{0\,1\,2\,3}=-\epsilon^{0\,1\,2\,3}=1$.

После достаточно громоздких преобразований приходим к выражению

$$
\begin{aligned}
4\tilde{I}\otimes\tilde{\gamma}^\mu&=I\otimes\gamma^\mu+\gamma^\mu\otimes I-i\gamma_\nu\otimes\sigma^{\mu\nu}+i\sigma^{\mu\nu}\otimes\gamma_\nu+i\sigma^{\mu\nu}\gamma_5\otimes\gamma_\nu\gamma_5+\\
&\quad+\gamma_5\otimes\gamma^\mu\gamma_5-\gamma^\mu\gamma_5\otimes\gamma_5+i\gamma_\nu\gamma_5\otimes\sigma^{\mu\nu}\gamma_5. \qquad (14)
\end{aligned}
$$

Аналогичным образом преобразуем уравнение (12). Имеем

$$
\begin{aligned}
4\tilde{\gamma}_\nu\otimes\tilde{\sigma}^{\mu\nu}&=i\big(3I\otimes\gamma^\mu-3\gamma^\mu\otimes I+i\gamma_\nu\otimes\sigma^{\mu\nu}+i\sigma^{\mu\nu}\otimes\gamma_\nu-i\sigma^{\mu\nu}\gamma_5\otimes\gamma_\nu\gamma_5+\\
&\quad+i\gamma_\nu\gamma_5\otimes\sigma^{\mu\nu}\gamma_5-3\gamma_5\otimes\gamma^\mu\gamma_5-3\gamma^\mu\gamma_5\otimes\gamma_5\big). \qquad (15)
\end{aligned}
$$

Используя симметрию дикварка относительно перестановок индексов $k_2\leftrightarrow k_3$, условие Рариты–Швингера $\bar{\Delta}^\mu\gamma_\mu=0$ и тождество

$$
i\gamma_\nu\gamma_5\otimes\sigma^{\mu\nu}\gamma_5=-i\gamma_\nu\otimes\sigma^{\mu\nu},
$$

окончательно получим

$$
\begin{cases}
4\tilde{I}\otimes\tilde{\gamma}^\mu=2I\otimes\gamma^\mu-2i\gamma_\nu\otimes\sigma^{\mu\nu},\\
4i\tilde{\gamma}_\nu\otimes\tilde{\sigma}^{\mu\nu}=-4I\otimes\gamma^\mu.
\end{cases}
$$

Легко видеть, что комбинация

$$\Gamma_1 \otimes \Gamma_2 = I \otimes \gamma^\mu - \frac{i}{2}\gamma_\nu \otimes \sigma^{\mu\nu} \tag{16}$$

при преобразовании Фирца переходит сама в себя и тем самым обеспечивает симметрию относительно перестановок $k_1 \leftrightarrow k_3$ в формуле (8). Поэтому трехкварковый ток Δ-изобары уравнения (1) имеет единственную форму вида

$$(J^\mu)^{k_1k_2k_3} = \varepsilon^{a_1a_2a_3}\left[q^{k_1}_{a_1}\cdot\left[q^{k_2}_{a_2}C\gamma^\mu q^{k_3}_{a_3}\right] - \frac{i}{2}\gamma_\nu q^{k_1}_{a_1}\cdot\left[q^{k_2}_{a_2}C\sigma^{\mu\nu}q^{k_3}_{a_3}\right]\right]. \tag{17}$$

2. ЭФФЕКТИВНЫЙ ЛАГРАНЖИАН И МАССОВЫЙ ОПЕРАТОР

2.1. Лагранжиан Δ-изобары. Массовый оператор. Константа связи. В ковариантной модели кварков основой является релятивистски-инвариантный лагранжиан, который описывает взаимодействие адронов с составляющими их кварками. При этом мы будем использовать нелокальное обобщение тока Δ-изобары в уравнении (17)

$$\mathcal{L}_\Delta(x,y) = ig_\Delta\bar{\Delta}^{k_1k_2k_3}_{\mu\alpha}(x)(J^{\mu\alpha})^{k_1k_2k_3}(x) + ig_\Delta(\bar{J}^{\nu\beta})^{k_1k_2k_3}(y)\Delta^{k_1k_2k_3}_{\nu\beta}(y), \tag{18}$$

где кварковый ток $(J^{\mu\alpha})^{k_1k_2k_3}(x)$ имеет вид

$$(J^{\mu\alpha})^{k_1k_2k_3}(x) = \iiint dx_1\,dx_2\,dx_3\,\delta\left(x - \sum_{i=1}^{3} w_i x_i\right)\Phi_\Delta\left[\sum_{i<j}(x_i - x_j)^2\right]\times$$
$$\times\,(J^{\mu\alpha}_{3q})^{k_1k_2k_3}(x_1,x_2,x_3), \tag{19}$$

$$(J^{\mu\alpha}_{3q})^{k_1k_2k_3}(x_1,x_2,x_3) = \varepsilon^{a_1a_2a_3}\Gamma^\mu_{\alpha;\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}q^{k_1}_{a_1\alpha_1}(x_1)q^{k_2}_{a_2\alpha_2}(x_2)q^{k_3}_{a_3\alpha_3}(x_3),$$

где согласно уравнению (17) матрица Γ^μ записывается в виде $\Gamma^\mu_{\alpha;\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3} = (\Gamma_1)_{\alpha\alpha_1}\otimes(\Gamma^\mu_2)_{\alpha_2\alpha_3} = (I)_{\alpha\alpha_1}\otimes(C\gamma^\mu)_{\alpha_2\alpha_3} - (i/2)(\gamma_\nu)_{\alpha\alpha_1}\otimes(C\sigma^{\mu\nu})_{\alpha_2\alpha_3}$, Φ_Δ — функция взаимодействия трех конституентных кварков с координатами x_1, x_2, x_3 и массами m_1, m_2, m_3 соответственно. Переменная w_i задается выражением $w_i = m_i/(m_1+m_2+m_3)$ так, что $\sum\limits_{i=1}^{3} w_i = 1$. Легко видеть, что Φ_Δ симметрична относительно перестановок $x_i \leftrightarrow x_j$.

Теперь запишем кварковый ток для $(\bar{J}^{\nu\beta})^{k_1k_2k_3}(y)$, который имеет вид

$$(\bar{J}^{\nu\beta})^{k_1k_2k_3}(y) = \iiint dx_1dx_2dx_3\delta\left(y - \sum_{i=1}^{3} w_i y_i\right)\Phi_\Delta\left[\sum_{i<j}(y_i - y_j)^2\right]\times$$
$$\times\,(\bar{J}^{\nu\beta}_{3q})^{k_1k_2k_3}(y_1,y_2,y_3), \tag{20}$$

$$(\bar{J}^{\nu\beta}_{3q})^{k_1k_2k_3}(y_1,y_2,y_3) = \varepsilon^{b_1b_2b_3}\bar{\Gamma}^\nu_{\beta_3,\beta_2,\beta_1;\beta}\bar{q}^{k_3}_{b_3\beta_3}(y_3)\bar{q}^{k_2}_{b_2\beta_2}(y_2)\bar{q}^{k_1}_{b_1\beta_1}(y_1),$$

где явный вид кваркового тока записывается через $\bar{\Gamma}^\nu_{\beta_3,\beta_2,\beta_1;\beta} = \left(\bar{\Gamma}_1\right)_{\beta_1\beta}\otimes\left(\bar{\Gamma}^\nu_2\right)_{\beta_3\beta_2} = (I)_{\beta_1\beta}\otimes(\gamma^\nu C)_{\beta_3\beta_2} + (i/2)(\gamma_\mu)_{\beta_1\beta}\otimes(\sigma^{\nu\mu}C)_{\beta_3\beta_2}$.

Вычислим массовый оператор (собственно энергетическую диаграмму) Δ-изобары, для этого рассмотрим второй порядок разложения S-матрицы по теории возмущений. Данному разложению соответствует диаграмма Фейнмана на рис. 1.

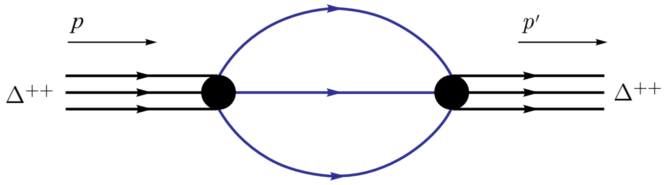

Рис. 1. Собственно энергетическая диаграмма Δ-изобары

Соответствующий вклад записывается в виде

$$S_2(x-y) = i \iint dx\, dy\, \bar{\Delta}^{++}_{\mu\alpha}(x)\, \Sigma^{\mu\nu}_{\alpha\beta}(x-y)\, \Delta^{++}_{\nu\beta}(y), \tag{21}$$

где, без ограничения общности, мы рассматриваем случай Δ^{++}-изобары с квантовым содержанием $q^{k_1} = q^{k_2} = q^{k_3} = u$. Здесь $\Sigma^{\mu\nu}_{\alpha\beta}(x-y)$ есть массовый оператор.

Запишем явный вид массового оператора в нелокальном случае, который будет соответствовать процессу, изображенному на рис. 1,

$$\begin{aligned}\Sigma^{\mu\nu}_{\alpha\beta}(x-y) = -i(ig_\Delta)^2 \int dx_1 \cdots dx_3 \delta\left(x - \sum_{i=1}^{3}\omega_i x_i\right) \Phi_\Delta\left[\sum_{i<j}(x_i - x_j)^2\right] \times \\ \times \int dy_1 \cdots dy_3 \delta\left(y - \sum_{i=1}^{3}\omega_i y_i\right) \Phi_\Delta\left[\sum_{i<j}(y_i - y_j)^2\right] \times \\ \times\, \Gamma^{\mu}_{\alpha;\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3} \left\langle 0 | T\left\{ J^{\mu}_{3q}(x) \bar{J}^{\nu}_{3q}(y)\right\} |0\right\rangle \bar{\Gamma}^{\nu}_{\beta_3,\beta_2,\beta_1;\beta},\end{aligned} \tag{22}$$

где трехкварковые токи даются выражениями в уравнениях (19) и (20).

Вычислим значение $\left\langle 0|T\left\{J^{\mu}(x)\bar{J}^{\nu}(y)\right\}|0\right\rangle$, которое запишем в явном виде

$$\begin{aligned}\langle 0|T\{\ldots\}|0\rangle = \varepsilon^{a_1a_2a_3}\varepsilon^{b_1b_2b_3} \times \\ \times \langle 0|T\left\{u_{a_1\alpha_1}(x_1)u_{a_2\alpha_2}(x_2)u_{a_3\alpha_3}(x_3)\bar{u}_{b_3\beta_3}(y_3)\bar{u}_{b_2\beta_2}(y_2)\bar{u}_{b_1\beta_1}(y_1)\right\}|0\rangle .\end{aligned} \tag{23}$$

Вакуумное среднее от T-произведений кварковых полей может быть раскрыто с помощью теоремы Вика

$$\begin{aligned}\langle 0|T\{\ldots\}|0\rangle = \varepsilon^{a_1a_2a_3}\varepsilon^{b_1b_2b_3} \times \\ \times \langle 0|T\left\{u_{a_1\alpha_1}(x_1)u_{a_2\alpha_2}(x_2)u_{a_3\alpha_3}(x_3)\bar{u}_{b_3\beta_3}(y_3)\bar{u}_{b_2\beta_2}(y_2)\bar{u}_{b_1\beta_1}(y_1)\right\}|0\rangle = \\ = \varepsilon^{a_1a_2a_3}\varepsilon^{b_1b_2b_3} \times \\ \times \langle 0|u_{a_1\alpha_1}(x_1)u_{a_2\alpha_2}(x_2)u_{a_3\alpha_3}(x_3)\bar{u}_{b_3\beta_3}(y_3)\bar{u}_{b_2\beta_2}(y_2)\bar{u}_{b_1\beta_1}(y_1)|0\rangle + \ldots = \\ = 6\varepsilon^{a_1a_2a_3}\varepsilon^{b_1b_2b_3}\delta_{a_1b_1}\delta_{a_2b_2}\delta_{a_3b_3} \times \\ \times \langle 0|u_{a_1\alpha_1}(x_1)u_{a_2\alpha_2}(x_2)u_{a_3\alpha_3}(x_3)\bar{u}_{b_3\beta_3}(y_3)\bar{u}_{b_2\beta_2}(y_2)\bar{u}_{b_1\beta_1}(y_1)|0\rangle = \\ = 36\langle 0|u_{a_1\alpha_1}(x_1)u_{a_2\alpha_2}(x_2)u_{a_3\alpha_3}(x_3)\bar{u}_{b_3\beta_3}(y_3)\bar{u}_{b_2\beta_2}(y_2)\bar{u}_{b_1\beta_1}(y_1)|0\rangle,\end{aligned} \tag{24}$$

где под «...» следует понимать шесть аналогичных членов T-произведения. Используем определения свертки вида

$$\overbrace{u_\alpha(x)\bar{u}}_\beta(y) = S_{\alpha\beta}(x-y). \tag{25}$$

Следовательно, $\Sigma^{\mu\nu}_{\alpha\beta}(x-y)$ окончательно примет вид

$$\Sigma^{\mu\nu}_{\alpha\beta}(x-y) = 36ig^2_\Delta \int dx \int dy \int dx_1 \cdots dx_3 \delta\left(x - \sum_{i=1}^{3} \omega_i x_i\right) \Phi_\Delta\left[\sum_{i<j}(x_i - x_j)^2\right] \times$$
$$\times \int dy_1 \cdots dy_3 \delta\left(y - \sum_{i=1}^{3} \omega_i y_i\right) \Phi_\Delta\left[\sum_{i<j}(y_i - y_j)^2\right] \times$$
$$\times \sum_{m,n=1}^{2} c_{mn}\Gamma_m S(x_1 - y_1)\Gamma_n \,\mathrm{tr}\,[\widetilde{\Gamma}_n S(y_2 - x_2)\widetilde{\Gamma}_m S(x_3 - y_3)], \tag{26}$$

где следует понимать

$$\begin{cases} c_{11}(\Gamma_1 \times \Gamma_1)(\widetilde{\Gamma}_1 \times \widetilde{\Gamma}_1) = (I \times I)(\gamma^\nu \times \gamma^\mu), \\ c_{12}(\Gamma_1 \times \Gamma_2)(\widetilde{\Gamma}_2 \times \widetilde{\Gamma}_1) = \dfrac{i}{2}(I \times \gamma^\rho)(\sigma^{\nu\rho} \times \gamma^\mu), \\ c_{21}(\Gamma_2 \times \Gamma_1)(\widetilde{\Gamma}_1 \times \widetilde{\Gamma}_2) = -\dfrac{i}{2}(\gamma_\delta \times I)(\gamma^\nu \times \sigma^{\mu\delta}), \\ c_{22}(\Gamma_2 \times \Gamma_2)(\widetilde{\Gamma}_2 \times \widetilde{\Gamma}_2) = \dfrac{1}{4}(\gamma^\delta \times \gamma^\rho)(\sigma^{\nu\rho} \times \sigma^{\mu\delta}). \end{cases} \tag{27}$$

Преобразование Фурье массового оператора записывается в виде

$$\widetilde{\Sigma}^{\mu\nu}_{\alpha\beta}(p,p') = \int dx\, \mathrm{e}^{ip'x} \int dy\, \mathrm{e}^{-ipy}\, \Sigma^{\mu\nu}_{\alpha\beta}(x-y). \tag{28}$$

Используя координаты Якоби, перейдем от координат (x_1, x_2, x_3) к (x, ρ_1, ρ_2):

$$\begin{aligned} x_1 &= x + \frac{1}{\sqrt{2}}\, w_3\, \rho_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}\,(2w_2 + w_3)\,\rho_2, \\ x_2 &= x + \frac{1}{\sqrt{2}}\, w_3\, \rho_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}\,(2w_1 + w_3)\,\rho_2, \\ x_3 &= x - \frac{1}{\sqrt{2}}\,(w_1 + w_2)\,\rho_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}\,(w_1 - w_2)\,\rho_2. \end{aligned} \tag{29}$$

Будем использовать краткое обозначение вида $x_i = x + \sum\limits_{j=1}^{2} w_{ij}\rho_j$. Координаты центра масс удовлетворяют выражениям $x = \sum\limits_{i=1}^{3} w_i x_i$, где $\sum\limits_{i=1}^{3} w_i = 1$. В терминах координат Якоби получим

$$\sum_{i<j}(x_i - x_j)^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2. \tag{30}$$

Отметим, что выбор координат Якоби не является единственно возможным. С данным выбором уравнения (29) можно перейти к следующему виду вершинной функции Φ_Δ:

$$\Phi_\Delta\left(\sum_{i<j}(x_i-x_j)^2\right)=\int\frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4p_2}{(2\pi)^4}\,\mathrm{e}^{-ip_1(x_1-x_3)-ip_2(x_2-x_3)}\,\overline{\Phi}_\Delta(-\omega^2),$$
$$\overline{\Phi}_\Delta(-\omega^2)=\int d^4\rho_1\int d^4\rho_2\,\mathrm{e}^{i\omega\rho}\,\Phi_\Delta(\rho^2), \tag{31}$$
$$\widetilde{\Phi}_\Delta[-\omega^2]=\exp\left[s_\Delta\omega^2\right],\quad S(x-y)=\frac{d^4k}{(2\pi)^4i}\,\mathrm{e}^{ik(x-y)}S(k),$$

где мы используем обозначение $\rho^2=\rho_1^2+\rho_2^2$, $\omega^2=\omega_1^2+\omega_2^2$, $\omega_1=(1/\sqrt{2})(p_1+p_2)$, $\omega_2=(-1/\sqrt{6})(p_1-p_2)$, $\omega\rho=\omega_1\rho_1+\omega_2\rho_2$, $s_\Delta\equiv 1/(\Lambda_\Delta^2)$, где Λ_Δ — характеризует размер Δ-изобары.

Так как ω^2 в евклидовом пространстве $\omega^2=-\omega_E^2$, вершинная функция, представленная в качестве гауссовской функции, обеспечивает сходимость в евклидовой метрике.

В результате преобразований получим

$$\widetilde{\Sigma}^{\mu\nu}(p,p')=36ig_\Delta^2\prod_{j=1}^{3}\left[\int\frac{d^4k_j}{(2\pi)^4i}\right]\int\frac{d\omega_1^x}{(2\pi)^4}\int\frac{d\omega_2^x}{(2\pi)^4}\int\frac{d\omega_1^y}{(2\pi)^4}\int\frac{d\omega_2^y}{(2\pi)^4}\times$$
$$\times\,\widetilde{\Phi}_\Delta[-\omega_x^2]\widetilde{\Phi}_\Delta[-\omega_y^2]\int d^4x\int d^4y\int d^4\rho_1^x\int d^4\rho_2^x\int d^4\rho_1^y\int d^4\rho_2^y\times$$
$$\times\sum_{m,n=1}^{2}c_{mn}\Gamma_mS(k_1)\Gamma_n\,\mathrm{tr}\,[\tilde{\Gamma}_nS(k_2)\tilde{\Gamma}_mS(k_3)]\exp\left[ip'x-ipy-i\omega_1^x\rho_1^x-i\omega_2^x\rho_2^x-\right.$$
$$\left.-\,i\omega_1^y\rho_1^y-i\omega_2^y\rho_2^y-ik_1(x_1-y_1)-ik_2(y_2-x_2)-ik_3(x_3-y_3)\right]. \tag{32}$$

Интегрирование по пространственным координатам приводит к набору δ-функций. После выделения δ-функции, соответствующей закону сохранения энергии-импульса $\Sigma^{\mu\nu}(p,p')=\delta^{(4)}(p-p')\widetilde{\Sigma}^{\mu\nu}(p)$, число интегрирований снижается до двух: k_1 и k_2. Окончательно получим

$$\Sigma^{\mu\nu}(p)=36g_\Delta^2\int\frac{dk_1}{(2\pi)^4i}\int\frac{dk_2}{(2\pi)^4i}\widetilde{\Phi}_\Delta^2[-\omega^2]\times$$
$$\times\sum_{m,n=1}^{2}c_{mn}\Gamma_mS(k_1+w_1p)\Gamma_n\,\mathrm{tr}\,[\widetilde{\Gamma}_nS(k_2-w_2p)\,\widetilde{\Gamma}_mS(k_2-k_1+w_3p)], \tag{33}$$

где $\omega_1=(k_1-k_2)/\sqrt{2}$, а $\omega_2=(k_1+k_2)/\sqrt{6}$.

Константу связи g_Δ определим из условия связности $Z_\Delta=0$, предложенного Вайнбергом [3] и Саламом [4] (см. обзор [5]) и в дальнейшем используемого во многих разделах физики частиц. Здесь $Z_\Delta=0$ есть константа перенормировки волновой функции бариона. Условие связности означает, что константа перенормировки барионного поля Z_Δ, появившаяся в результате взаимодействия с его конституантами, должна быть положена равной нулю $Z_\Delta = 0$. В случае Δ-изобары данное условие записывается в виде

$$Z_\Delta = 1 - \frac{d}{d\widehat{p}}\Sigma_0(\widehat{p}) = 0, \tag{34}$$

где $\Sigma_0(\widehat{p})$ возникает в разложении $\Sigma^{\mu\nu}$ в виде $g^{\mu\nu}\Sigma_0(\hat{p})$.

Докажем, что тождество $\bar{\Delta}_\nu(p)\dfrac{d}{d\widehat{p}}\,\Sigma_0(\widehat{p})\Delta_\nu(p) = \bar{\Delta}_\nu(p)\Delta_\nu(p)$ эквивалентно тождеству $\bar{\Delta}_\nu(p)\dfrac{d}{dp^\alpha}\Sigma_0(\widehat{p})\Delta_\nu(p) = \bar{\Delta}_\nu(p)\gamma^\alpha\Delta_\nu(p)$. Для этого представим $\Sigma_0(\widehat{p}) = A(p^2) + \widehat{p}B(p^2)$. Тогда уравнение (34), взятое в обкладках Δ-спиноров, записывается в виде

$$\langle\bar{\Delta}_\nu(p)|\frac{d}{d\widehat{p}}\Sigma_0(\widehat{p})|\Delta_\nu(p)\rangle = \left[2mA' + B + 2m^2B'\right]\bar{\Delta}_\nu(p)\Delta_\nu(p) = \bar{\Delta}_\nu(p)\Delta_\nu(p). \tag{35}$$

Следовательно, $\left[2mA' + B + 2m^2B'\right] = 1$.

Аналогичным образом, а также используя тождество $\langle\bar{\Delta}_\nu(p)|p^\alpha|\Delta_\nu(p)\rangle = m\langle\bar{\Delta}_\nu(p)|\gamma^\alpha|\Delta_\nu(p)\rangle$, получим

$$\langle\bar{\Delta}_\nu(p)|\frac{d}{dp^\alpha}\Sigma_0(\widehat{p})|\Delta_\nu(p)\rangle = \langle\bar{\Delta}_\nu(p)|\left[2mA' + B + 2m^2B'\right]\gamma^\alpha|\Delta_\nu(p)\rangle = \\ = \langle\bar{\Delta}_\nu(p)|\gamma^\alpha|\Delta_\nu(p)\rangle. \tag{36}$$

Данное условие является достаточным для вычисления производной массового оператора.

Следовательно, для определения константы сильного взаимодействия вычислим производную массового оператора, взяв производную по импульсной переменной от выражения, записанного в уравнении (33), а также зная, что общий вид лоренц-структуры $\Sigma^{\mu\nu}(p)$ может быть записан как $\Sigma^{\mu\nu}(p) = g^{\mu\nu}\Sigma_0(\hat{p}) + p^\mu p^\nu\Sigma_1 + p^\mu\gamma^\nu\Sigma_2 + p^\nu\gamma^\mu\Sigma_3 + \gamma^\mu\gamma^\nu\Sigma_4$. Очевидно из условий Рариты–Швингера, что $\dfrac{d}{dp^\alpha}\Sigma^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}\dfrac{d}{dp^\alpha}\Sigma_0$. В результате получаем выражение вида

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dp^\alpha}\Sigma^{\mu\nu}(p) = 36g_\Delta^2\int\frac{dk_1}{(2\pi)^4i}\int\frac{dk_2}{(2\pi)^4i}\tilde{\Phi}_\Delta^2[-\omega^2]\times\\
&\times\Bigg\{\omega_1\sum_{m,n=1}^{2}c_{mn}\Gamma_m S(k_1+\omega_1p)\gamma^\alpha S(k_1+\omega_1p)\Gamma_n\,\mathrm{tr}\,[\tilde{\Gamma}_n S(k_2-\omega_2p)\tilde{\Gamma}_m S(k_2-k_1+\omega_3p)]-\\
&-\omega_2\sum_{m,n=1}^{2}c_{mn}\Gamma_m S(k_1+\omega_1p)\Gamma_n\,\mathrm{tr}\,[\tilde{\Gamma}_n S(k_2-\omega_2p)\gamma^\alpha S(k_2-\omega_2p)\tilde{\Gamma}_m S(k_2-k_1+\omega_3p)]+\\
&+\omega_3\sum_{m,n=1}^{2}c_{mn}\Gamma_m S(k_1+\omega_1p)\Gamma_n\,\mathrm{tr}\,[\tilde{\Gamma}_n S(k_2-\omega_2p)\tilde{\Gamma}_m S(k_2-k_1+\omega_3p)\gamma^\alpha S(k_2-k_1+\omega_3p)]\Bigg\},
\end{aligned} \tag{37}$$

где мы использовали следующее соотношение:

$$\frac{d}{dp^\alpha}S(k+wp) = wS(k+wp)\gamma^\alpha S(k+wp). \tag{38}$$

При вычислении двухпетлевых интегралов по k_1 и k_2 вначале используем представление Фока–Швингера вида

$$S(p) = (m + \hat{p}) \int\limits_0^\infty d\alpha_1 \, \exp\{-\alpha_1[m^2 - p^2]\}, \quad (m^2 - p^2) > 0. \tag{39}$$

Для вычисления тензорных интегралов используем метод дифференцирования:

$$k^\mu \, \exp(kak + 2kr + z_0) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r_\mu} \, \exp(kak + 2kr + z_0). \tag{40}$$

Получившиеся гауссовы интегралы вычисляются стандартным образом:

$$\int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4 i} \int \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4 i} \, \exp\{kak + 2kr + z_0\} = \frac{1}{(4\pi)^4}\frac{1}{|a|^2} \, \exp(-ra^{-1}r + z_0), \tag{41}$$

где a есть матрица 2×2 с детерминантом $|a|$. Ее матричные элементы зависят от параметров α_i, s_Δ, m_i.

Далее дифференцирование гауссовской экспоненты приводится следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial r_i^\mu} \, \mathrm{e}^{-ra^{-1}r} = \mathrm{e}^{-ra^{-1}r} \left[-a_{ij}^{-1} r_j^\mu + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r_i^\mu}\right]. \tag{42}$$

Интегрирование по переменным α_i можно упростить с помощью замены

$$\begin{aligned} \int\int\int\limits_0^\infty d\alpha_1 \, d\alpha_2 \, d\alpha_3 \, f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \int\limits_0^\infty dt \, t^2 \int\int\int\limits_0^\infty d\alpha_1 \, d\alpha_2 \, d\alpha_3 \times \\ \times \delta\left(1 - \sum_1^3 \alpha_i\right) f(t\alpha_1, t\alpha_2, t\alpha_3) = \int\limits_0^\infty dt \, t^2 \int\int\limits_0^1 dx_1 \, dx_2 \, x_1 f(t\alpha_1, t\alpha_2, t\alpha_3), \end{aligned} \tag{43}$$

где $\alpha_1 = 1 - x_1$, $\alpha_2 = x_1(1 - x_2)$, $\alpha_3 = x_1 x_2$. В итоге имеется n интегрирований: по безразмерным параметрам α, пробегающим симплекс, и одно интегрирование по параметру t, имеющему размерность квадрата обратной массы и лежащему в пределах от нуля до бесконечности. Если кинематические переменные, соответствующие данной диаграмме, таковы, что появляется пороговая точка ветвления, то интеграл в уравнении (43) начинает расходиться при $t \to \infty$. Однако если обрезать интегрирование на верхнем пределе, то это обеспечит отсутствие любых пороговых сингулярностей в данной диаграмме, поскольку полученный интеграл абсолютно сходится для любого набора кинематических переменных. Массовый оператор окончательно примет вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp^\alpha}\Sigma_0(\hat{p}) = 36 g_\Delta^2 \int\limits_0^{1/\lambda^2} dt \, t^2 \int\int\limits_0^1 dx_1 \, dx_2 \, \frac{F(t, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, m_\Delta, m_u, s_\Delta)}{(4\pi)^4 |a|^2} \times \\ \times \exp(-ra^{-1}r + z_0), \end{aligned}$$

где $\lambda = 0{,}181$ ГэВ — параметр инфракрасного обрезания; $F(t, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, m_\Delta, m_u, s_\Delta)$ — функция, полученная в результате вычислений в программном пакете FORM. Трехинтегрирование производится численно с помощью кодов на FORTRAN.

3. РАСПАД $\Delta \to N\pi$: ШИРИНА И ФОРМФАКТОР

3.1. Матричный элемент распада $\boldsymbol{\Delta}$-изобары. Рассмотрим распад Δ^{++}-изобары на протон и положительно заряженный пион. Данный процесс описывается диаграммой Фейнмана, изображенной на рис. 2.

Матричный элемент, соответствующий данной диаграмме, имеет следующий вид:

$$M(\Delta \to p\pi) = g_\Delta g_p g_\pi \int dx \int dy \int dz\, \mathrm{e}^{ip'x - ipy + iqz} \times \\ \times \bar{u}_p(p') \langle 0 | T\{J_p(x) \bar{J}^\mu_\Delta(y) J_\pi(z)\} | 0 \rangle u^\mu_\Delta(p), \quad (44)$$

где трехкварковые токи J_P, $\bar{J}^\mu_\Delta$ определяются уравнениями (2) и (19) соответственно. Двухкварковый ток пиона имеет вид

$$J_\pi(z) = \int dz_1\, dz_2\, \delta\left(z - \sum_{i=1}^{2} z_i \eta_i\right) \Phi_\pi[(z_1 - z_2)^2] J_{3q}(z_1, z_2), \\ J_{3q}(z_1, z_2) = \bar{d}(z_1)\, i\gamma^5 u(z_2). \quad (45)$$

Выпишем отдельно T-произведение для данного матричного элемента

$$\langle 0 | T\{J_P(x_1, x_2, x_3) \bar{J}^\mu_\Delta(y_1, y_2, y_3) J_\pi(z_1, z_2)\} | 0 \rangle = \varepsilon^{a_1 a_2 a_3}\, \varepsilon^{b_1 b_2 b_3} \times \\ \times T\{\Gamma^A \gamma^5 d^{a_1}(x_1) [u^{a_2}(x_2)\, C\Gamma_A u^{a_3}(x_3)] [\bar{u}^{b_3}(y_3)\, C\Gamma^\mu_2 \bar{u}^{b_2}(y_2)] \bar{u}^{b_1}(y_1) \Gamma_1 [\bar{d}(z_1) i\gamma^5 u(z_2)]\}.$$

Перестановки кварков в дикварках нуклона и Δ-изобары являются симметричными, так как Γ_A, Γ_1 и Γ^μ_2 имеют вид тензоров или векторов. На основании определения свертки уравнения (25) и факторизации T-произведения получаем

$$\langle 0 | T\{\ldots\} | 0 \rangle = 12 \Gamma^A \gamma^5 S_d(x_1 - z_1) i\gamma_5 S_u(z_2 - y_1) \Gamma_1 \operatorname{tr}[S_u(y_2 - x_2) \Gamma_A S_u(x_3 - y_3) \Gamma^\mu_2] + \\ + 24 \Gamma^A \gamma^5 S_d(x_1 - z_1) i\gamma_5 S_u(z_2 - y_1) \Gamma^\mu_2 S_u(y_2 - x_2) \Gamma_A S_u(x_3 - y_3) \Gamma_1.$$

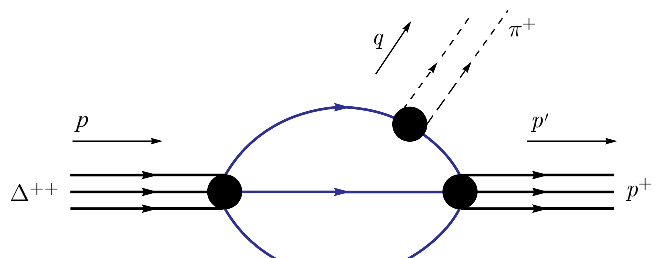

Рис. 2. Распад $\Delta^{++} \to p\pi^+$

Тогда матричный элемент уравнения (44) записывается как

$$
\begin{aligned}
M(\Delta \to p\pi) = 12 i g_\Delta g_p g_\pi \int dx \int dy \int dz\, \mathrm{e}^{ip'x - ipy + iqz} \times \\
\times \int dx_1\, dx_2\, dx_3\, \delta\left(x - \sum_{i=1}^{3} x_i v_i\right) \Phi_p\left[\sum_{i<j}(x_i - x_j)^2\right] \times \\
\times \int dy_1\, dy_2\, dy_3\, \delta\left(y - \sum_{i=1}^{3} y_i w_i\right) \Phi_\Delta\left[\sum_{i<j}(y_i - y_j)^2\right] \times \\
\times \int dz_1\, dz_2\, \delta\left(z - \sum_{i=1}^{2} z_i \eta_i\right) \Phi_\pi[(z_1 - z_2)^2] \times \\
\times \bar{u}_p(p')\{\Gamma^A \gamma^5 S_d(x_1 - z_1)\gamma_5 S_u(z_2 - y_1)\Gamma_1 \operatorname{tr}[S_u(y_2 - x_2)\Gamma_A S_u(x_3 - y_3)\Gamma_2^\mu] + \\
+ 2\Gamma^A \gamma^5 S_d(x_1 - z_1)\gamma_5 S_u(z_2 - y_1)\Gamma_2^\mu S_u(y_2 - x_2)\Gamma_A S_u(x_3 - y_3)\Gamma_1\} u_\Delta^\mu(p).
\end{aligned}
$$

Используя координаты Якоби уравнения (29) в вершинных функциях нуклона и Δ-изобары, получаем

$$
\begin{aligned}
M(\Delta \to p\pi) = \\
= 12 i g_\Delta g_p g_\pi \prod_{i=1}^{4} \int \frac{d^4 k_i}{(2\pi)^4 i} \int \frac{d\omega_1^x}{(2\pi)^4} \frac{d\omega_2^x}{(2\pi)^4} \tilde{\Phi}_p[-\omega_x^2] \int \frac{d\omega_1^y}{(2\pi)^4} \frac{d\omega_2^y}{(2\pi)^4} \tilde{\Phi}_\Delta[-\omega_y^2] \times \\
\times \int \frac{dl}{(2\pi)^4} \tilde{\Phi}_\pi[-l^2]\, \bar{u}_p(p')\{\Gamma^A \gamma^5 S_d(k_1)\gamma_5 S_u(k_2)\Gamma_1 \operatorname{tr}[S_u(k_3)\Gamma_A S_u(k_4)\Gamma_2^\mu] + \\
+ 2\Gamma^A \gamma^5 S_d(k_1)\gamma_5 S_u(k_2)\Gamma_2^\mu S_u(k_3)\Gamma_A S_u(k_4)\Gamma_1\}\, u_\Delta^\mu(p) \times \\
\times \int dx \int dy \int d\rho_1^x \int d\rho_2^x \int d\rho_1^y \int d\rho_2^y \int dz_1 \int dz_2 \times \\
\times \exp[ip'x - ipy + iq(\eta_1 z_1 + \eta_2 z_2) - i\omega_1^x \rho_1^x - i\omega_2^x \rho_2^x - i\omega_1^y \rho_1^y - i\omega_2^y \rho_2^y - il(z_1 - z_2)] \times \\
\times \exp[-ik_1(x_1 - z_1) - ik_2(z_2 - y_1) - ik_3(y_2 - x_2) - ik_4(z_3 - y_3)].
\end{aligned}
$$

Интегрирование по пространственным координатам дает набор δ-функций, с помощью которых снимается часть интегрирования по импульсным переменным. В результате имеем

$$
M(\Delta^{++} \to p\pi^+) = (2\pi)^4 i \delta(p - p' - q)\, T(\Delta^{++} \to p\pi^+), \tag{46}
$$

где

$$
\begin{aligned}
T(\Delta^{++} \to p\pi^+) = -12 g_\Delta g_p g_\pi \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4 i} \int \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4 i} \tilde{\Phi}_p[-\omega_x^2] \tilde{\Phi}_\Delta[-\omega_y^2] \tilde{\Phi}_\pi[-(k_1 - \eta_2 q)^2] \times \\
\times \bar{u}_p(p')\{\Gamma^A \gamma^5 S_d(k_1 - q)\gamma_5 S_u(k_1)\Gamma_1 \operatorname{tr}[S_u(k_2)\Gamma_A S_u(k_2 - k_1 + p)\Gamma_2^\mu] + \\
+ 2\Gamma^A \gamma^5 S_d(k_1 - q)\gamma_5 S_u(k_1)\Gamma_2^\mu S_u(k_2)\Gamma_A S_u(k_2 - k_1 + p)\Gamma_1\} u_\Delta^\mu(p) = \\
= G_{\Delta p\pi} p'_\mu \bar{u}_p(p', \lambda') u_\Delta^\mu(p, \lambda).
\end{aligned} \tag{47}
$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{cases} \omega_1^x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}[-k_1 + k_3 + p - v_3 p'], \\ \omega_2^x = \dfrac{1}{\sqrt{6}}[k_1 + k_3 - p + (2v_2 + v_3)p'], \end{cases} \qquad \begin{cases} \omega_1^y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}[k_1 - k_3 - (\omega_1 + \omega_2)p], \\ \omega_2^y = \dfrac{1}{\sqrt{6}}[-k_1 - k_3 + (\omega_1 - \omega_2)p]. \end{cases}$$

В приложении дано подробное вычисление ширины распада. Окончательно выражение имеет вид

$$\Gamma(\Delta^{++} \to p\pi^+) = \frac{G^2_{\Delta p\pi}}{24\pi}|\mathbf{q}|^3 \left[\left(1 + \frac{m_N}{m_\Delta}\right)^2 - \frac{m_\pi^2}{m_\Delta^2}\right]. \tag{48}$$

Здесь $|\mathbf{q}|$ есть импульс пиона в системе покоя Δ-изобары.

Для численных расчетов были использованы значения $\Lambda_\pi = 0{,}87$ ГэВ, $\Lambda_N = 0{,}36$ ГэВ, полученные в предыдущих работах (см. [2, 6]). При значениях $\Lambda_\Delta = 0{,}93$ ГэВ и коэффициента смешивания $x = 0$ ширина распада, определенная численно на FORTRAN с помощью библиотеки NAG, дает величину $\Gamma(\Delta^{++} \to p\pi^+) = 110{,}6$ МэВ, что хорошо согласуется с экспериментом 110–112 МэВ. Данной величине ширины распада соответствует константа сильного взаимодействия $G_{\Delta p\pi} = 15{,}2$ ГэВ$^{-1}$, при $q^2 = m_\pi^2$.

3.2. Сильный формфактор. Рассмотрим поведение сильного формфактора $G_{\Delta p\pi}(Q^2)$ в евклидовой области квадрата переданного импульса $Q^2 = -q^2$. Для удобства будем исследовать график функции $G(Q^2) = \dfrac{G_{\Delta p\pi}(Q^2)}{G_{\Delta p\pi}(0)}$, нормированный на 1 при $Q^2 = 0$. В нашей модели данная функция определяется из уравнения (47). После взятия петлевых интегралов она представляется в виде четырехкратного интеграла, который находится численно с помощью программы, написанной на FORTRAN. Результат численного вы-

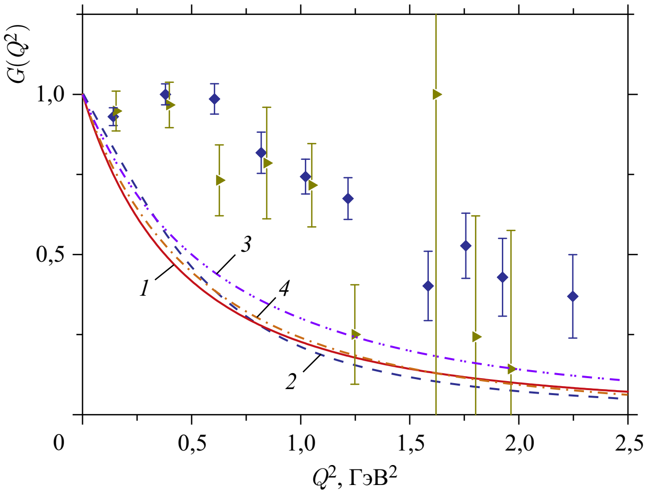

Рис. 3. Поведение сильного формфактора Δ-изобары в рамках различных теоретических подходов: *1* — данная работа; *2* — QCM-модель [1]; *3* — RCQM-модель [7]; *4* — работа [8]; ◆, ► — результаты вычислений на решетке [9] для $m_\pi = 297$ МэВ, $m_\pi = 330$ МэВ соответственно

Таблица 2. **Константы связи $G_{\Delta p\pi}$ (ГэВ$^{-1}$)**

Эксперимент	Данная работа	[1]	[7]	[8]	[10]	[11]	[12]	[13]
$15{,}4\pm 2{,}9$	15,2	17,0	11,14	14,98	14,85	17,76	15,2	$13{,}4\pm 5{,}4$

числения удобно аппроксимировать функцией дипольного вида

$$G(Q^2) = \frac{1}{[1+Q^2/\Lambda_D^2]^2}, \tag{49}$$

где параметр $\Lambda_D = 0{,}96$ ГэВ. Поведение функции $G(Q^2)$ в интервале $0 \leqslant Q^2 = -q^2 \leqslant 2{,}5$ ГэВ^2 приведено на рис. 3. Для сравнения приведены результаты других теоретических подходов $[1, 7, 8]$ и результаты вычислений на решетке [9]. Для построения графика *3* на рис. 3 мы использовали параметризацию, данную в работе [7]

$$G(\mathbf{q}^2) = \frac{1}{[1+\mathbf{q}^2/\lambda_1^2 + \mathbf{q}^4/\lambda_2^4]}, \tag{50}$$

где численные значения параметров $\lambda_1 = 0{,}594$ ГэВ, $\lambda_2 = 0{,}998$ ГэВ. Мы использовали связь $\mathbf{q}^2 = q_0^2 + Q^2$, явный вид приведен в приложении, уравнение (П.1). Видно, что поведение нашей кривой почти идеально согласуется с поведением кривой, полученной в работе [7].

В табл. 2 приведены численные значения $G_{\Delta p\pi}$. Отметим, что часто используется константа $f_{\Delta p\pi} = m_\pi G_{\Delta p\pi}$, константы из табл. 2 были вычислены с помощью данного тождества.

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

В данной работе дано подробное построение трехкваркового тока Δ-изобары. Вывод сделан с использованием тождеств Фирца. Вычислен матричный элемент $\Delta \to p\pi$ и ширина распада данного процесса. Единственный свободный параметр Λ_Δ, характеризующий размер Δ-изобары, получен путем фита теоретического значения ширины распада $\Delta \to p\pi$ к его экспериментальному значению. Соответствующая константа сильного взаимодействия оказалась равной $G_{\Delta p\pi} = 15{,}2$ ГэВ$^{-1}$.

Построена зависимость $G(Q^2)$ в евклидовой области квадрата переданного импульса пиона $Q^2 = -q^2$. Проведено сравнение с работами [1, 7–13]. Оказалось, что наши результаты наиболее близки к работе [7].

Благодарности. Авторы выражают признательность W. Plessas за плодотворное обсуждение. Они также благодарят Министерство образования и науки Республики Казахстан за предоставление грантов «ЛП ВУЗа» (2016) и № 3091/ГФ4 (госрегистрация № 0115RK01041).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Согласно закону сохранения импульса и расстановке импульсов видно, что $p = p' + q$, где p, p', q — 4-векторы импульса. Для $p^2 = m_\Delta^2$, $p'^2 = m_N^2$, $q^2 = m_\pi^2$, а для пространственных компонент имеем соотношения вида

$$\begin{cases} \mathbf{p} = \mathbf{p}' + \mathbf{q} = 0, \\ \mathbf{p}' = -\mathbf{q} \Rightarrow |\mathbf{p}'| = |\mathbf{q}|. \end{cases}$$

Распишем уравнения по компонентам и совершим замену переменных, полученных выше, вследствие чего выражения для импульсов примут вид

$$\begin{cases} p^2 = p_0^2 - \mathbf{p}^2 = p_0^2 = m_\Delta^2, \\ p'^2 = p_0'^2 - \mathbf{p}'^2 = p_0'^2 - \mathbf{q}^2 = m_N^2, \\ q^2 = q_0^2 - \mathbf{q}^2 = q_0^2 - \mathbf{q}^2 = m_\pi^2. \end{cases}$$

Выразив энергетическую компоненту 4-вектора импульса, имеем $p_0' = \sqrt{m_N^2 + |\mathbf{q}^2|}$ для нуклона, а для пиона, соответственно, $q_0 = \sqrt{m_\pi^2 + |\mathbf{q}^2|}$. В свою очередь, для Δ-изобары $p_0 = m_\Delta$.

Вследствие закона сохранения энергии получаем уравнение $p_0 = p_0' + q$. Осуществляя подстановку полученных выше значений и возводя их в квадрат, можно выразить квадрат пространственной части 4-вектора импульса пиона, который примет вид

$$|\mathbf{q}^2| = \frac{m_\Delta^4 + m_N^4 + m_\pi^4 - 2m_\Delta^2 m_N^2 - 2m_\Delta^2 m_\pi^2 - 2m_N^2 m_\pi^2}{4m_\Delta^2} = \\ = \left[\frac{\lambda^{1/2}(m_\Delta^2, m_N^2, m_\pi^2)}{2m_\Delta}\right]^2. \quad (\text{П}.1)$$

Транслятор для спина 1/2:

$$\sum_\lambda u(p,\lambda)\bar{u}(p,\lambda) = \widehat{p} + m. \quad (\text{П}.2)$$

Транслятор для спина 3/2:

$$\sum_\lambda u(p,\lambda)\bar{u}(p,\lambda) = (\widehat{p} + m)\left[-g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{m^2} + \frac{1}{3}\left(g_{\mu\alpha} - \frac{p_\mu p_\alpha}{m^2}\right)\left(g_{\nu\beta} - \frac{p_\nu p_\beta}{m^2}\right)\gamma^\alpha\gamma^\beta\right]. \quad (\text{П}.3)$$

Матричный элемент имеет вид

$$M(\Delta^{++} \to p\pi^+) = G_{\Delta p\pi} p'_\mu \bar{u}_N(p',\lambda') u_\Delta^\mu(p,\lambda).$$

Возведем в квадрат матричный элемент и просуммируем по поляризациям, умножив на 1/4 для получения ширины распада Δ-изобары на нуклон и пион:

$$\frac{1}{4}\sum_{\lambda\lambda'} |M|^2 = \frac{1}{4} G_{\Delta p\pi}^2 p'_\mu p'_\nu \sum_{\lambda\lambda'} [\bar{u}_N(p',\lambda') u_\Delta^\mu(p,\lambda)][\bar{u}_\Delta^\nu(p,\lambda) u_N(p',\lambda')].$$

Подставим в данное выражение значения трансляторов и факторизуем выражение, в результате получим

$$\frac{1}{4}\sum_{\lambda\lambda'} |M|^2 = \frac{G_{\Delta N\pi}^2}{4} p'_\mu p'_\nu \operatorname{tr}\left[(\widehat{p}' + m_N)(\widehat{p} + m_\Delta)\left(p'_\mu p'_\nu \bar{g}^{\mu\nu} + \frac{1}{3} p'_\mu \bar{g}^{\mu\alpha}\gamma_\alpha p'_\nu \bar{g}^{\nu\beta}\gamma_\beta\right)\right].$$

Окончательно производя все вычисления, можно удостовериться, что ширина распада будет равна

$$\Gamma(\Delta^{++} \to p\pi^+) = \frac{G_{\Delta N\pi}^2}{24\pi}|\mathbf{q}|^3\left[\left(1 + \frac{m_N}{m_\Delta}\right)^2 - \frac{m_\pi^2}{m_\Delta^2}\right].$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Efimov G. V., Ivanov M. A., Lyubovitskij V. E.* Strong Nucleon and Δ Isobar Form Factors in the Quark Confinement Model // Few Body Syst. 1989. V. 6. P. 17–43.
2. *Gutsche Th., Ivanov M. A., Körner J. G., Lyubovitskij V. E., Santorelli P.* Light Baryons and Their Electromagnetic Interactions in the Covariant Constituent Quark Model // Phys. Rev. D. 2012. V. 86, No. 7; arXiv:1207.7052 [hep-th].
3. *Weinberg S.* Elementary Particle Theory of Composite Particles // Phys. Rev. 1963. V. 130. P. 776–783.
4. *Salam A.* Lagrangian Theory of Composite Particles // Nuovo Cim. 1962. V. 25. P. 224–227.
5. *Hayashi K., Hirayama M., Muta T., Seto N., Shirafuji T.* Compositeness Criteria of Particles in Quantum Field Theory and S-Matrix Theory // Fort. Phys. 1967. V. 15, No. 10. P. 625–660.
6. *Ivanov M. A., Körner J. G., Kovalenko S. G., Santorelli P., Saidullaeva G. G.* Form Factors for Semileptonic, Nonleptonic and Rare $B(B_s)$ Meson Decays // Phys. Rev. D. 2012. V. 85, No. 6. P. 625; arXiv:1112.3536 [hep-ph].
7. *Melde T., Canton L., Plessas W.* Structure of Meson–Baryon Interaction Vertices // Phys. Rev. Lett. 2009. V. 102, No. 13. P. 625; arXiv:0811.0277 [nucl-th].
8. *Mader V., Eichmann G., Blank M., Krassnigg A.* Hadronic Decays of Mesons and Baryons in the Dyson–Schwinger Approach // Phys. Rev. D. 2011. V. 84, No. 3; arXiv:1106.3159 [hep-ph].
9. *Alexandrou C., Koutsou G., Negele J. W., Proestos Y., Tsapalis A.* Nucleon to Delta Transition Form Factors with $N_F = 2 + 1$ Domain Wall Fermions // Phys. Rev. D. 2011. V. 83, No. 1. P. 31; arXiv:1011.3233 [hep-lat].
10. *Sato T., Lee T. S. H.* Meson Exchange Model for πN Scattering and Gamma $N \to \pi N$ Reaction // Phys. Rev. C. 1996. V. 54, No. 5. P. 2600–2684; arXiv:nucl-th/9606009 [nucl-th].
11. *Polinder H., Rijken T. A.* Soft-Core Meson–Baryon Interactions. II. πN and K^+N Scattering // Phys. Rev. C. 2005. V. 72, No. 6. P. 065210; arXiv:nucl-th/0505083 [nucl-th].
12. *Niskanen J. A.* The $\pi N \Delta$ Coupling and the $\Delta(1232)$ Resonance Width // Phys. Lett. B. 1981. V. 107. P. 344; arXiv:1411.5911 [hep-th].
13. *Wang Z.* Strong Decay $\Delta^{++} \to p\pi$ with Light-Cone QCD Sum Rules // Eur. Phys. J. C. 2008. V. 57. P. 711–718; arXiv:0707.3736 [hep-th].

Получено 23 апреля 2017 г.