Письма в ЭЧАЯ. 2018. Т. 15, № 4(216). С. 316–322

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА. ТЕОРИЯ

НЕОДНОРОДНЫЕ МОДЫ В PT-СИММЕТРИЧНОЙ КВАНТОВОЙ КОСМОЛОГИИ

О. О. Новиков [1]

Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

Мы рассматриваем возможность решения проблем космологии фантомных полей при помощи PT-симметричной квантовой теории. Приближение Борна–Оппенгеймера применяется к уравнению Уилера – Де Витта для изучения неоднородных флуктуаций вблизи однородного минисуперпространства. Эволюция продольных неоднородных мод в ВКБ-времени описывается с использованием зависящего от времени псевдоэрмитова эффективного гамильтониана.

We consider the possibility to solve the issues of the phantom field cosmology by means of the PT-symmetric quantum theory. The Born–Oppenheimer approximation is applied to the Wheeler–DeWitt equation to study the inhomogeneous fluctuations over the homogeneous minisuperspace. The evolution of the longitudinal inhomogeneous modes in WKB-time is described using a time-dependent pseudo-Hermitian effective Hamiltonian.

PACS: 98.80.Qc; 04.60.Ds

ВВЕДЕНИЕ

Природа темной энергии является одной из самых интересных проблем современной космологии. Один из возможных вариантов состоит в том, что она порождена так называемой фантомной материей, для которой $w = p/\epsilon$ ниже -1 по крайней мере на некоторой стадии космологической эволюции. Например, можно рассмотреть двухполевую модель с одним из скалярных полей ξ, имеющих неправильный знак кинетического члена [1],

$$L = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}\partial_\mu\xi\partial^\mu\xi - V(\phi, \xi). \tag{1}$$

Однако, поскольку энергия не ограничена снизу, это приводит к сильным нестабильностям, а космологическая эволюция в таких моделях в общем случае заканчивается неограниченным расширением за конечное космическое время (так называемый Большой разрыв).

Любопытно, что некоторые на первый взгляд нестабильные и даже комплексные классические гамильтонианы, обладающие PT-симметрией, могут все же обладать чисто вещественным положительным спектром энергий [2]. Самым известным примером является

$$\hat{H} = p^2 + x^2(ix)^\epsilon, \quad \hat{H}^{\mathrm{PT}} = \hat{H}. \tag{2}$$

[1] E-mail: o.novikov@spbu.ru

Оказывается, что для определенной нестандартной нормы $(\psi, \tilde{\psi})$ такие гамильтонианы производят унитарную эволюцию. Эти PT-симметричные гамильтонианы являются частным случаем так называемых псевдоэрмитовых операторов, связанных с эрмитовыми с помощью неунитарного оператора сплетания η,

$$\hat{H} = \eta^{-1}\hat{h}\eta, \quad \hat{h} = \hat{h}^{\dagger}, \quad (\psi, \tilde{\psi}) = \langle\psi|\eta^{\dagger}\eta|\tilde{\psi}\rangle. \tag{3}$$

Тем не менее, эрмитова форма обычно оказывается крайне сложной, и намного проще изучать подобные модели в неэрмитовой форме.

В [3,4] было предложено применить данную идею к космологии, заменив (1) классически эквивалентной моделью с полем $\tilde{\phi} = -i\xi$.

$$L = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{1}{2}\partial_\mu\tilde{\phi}\partial^\mu\tilde{\phi} - V(\phi, i\tilde{\phi}). \tag{4}$$

Тогда кинетическая энергия положительна, но потенциал комплексный. Чтобы обладать вещественными плотностью энергии и давлением, классическое решение для $\tilde{\phi}$ должно быть чисто мнимым. В противоположность этому возмущения рассматриваются вдоль вещественной оси $\tilde{\phi} = i\xi_{\text{class}} + \delta\phi$. Оказывается, что такие возмущения около классической траектории обладают положительно-определенным эффективным гамильтонианом. Чтобы отличить подобные поля от обычных фантомов, мы вводим новое название — ПТом. Реализация этой идеи в полной квантовой модели, ограниченной однородным мини-суперпространством, была рассмотрена в [5]. В этой небольшой работе мы кратко изложим, как данный подход может работать для продольных неоднородных мод.

1. МОДЕЛЬ КВИНТЭССЕНЦИИ И ФАНТОМНОГО ПОЛЯ

Для согласия с наблюдениями необходимы совместно два скалярных поля: квинтэссенция и ПТом. Рассмотрим следующую модель [5]:

$$S = \int d^4x\,\sqrt{-g}\,\biggl(-\frac{1}{2\kappa^2}R + \frac{1}{2}M_{\Phi\Phi}\,\partial_\mu\Phi\,\partial^\mu\Phi + \frac{1}{2}M_{\tilde{\Phi}\tilde{\Phi}}\,\partial_\mu\tilde{\Phi}\,\partial^\mu\tilde{\Phi} + \\ + iM_{\Phi\tilde{\Phi}}\,\partial_\mu\Phi\,\partial^\mu\tilde{\Phi} - V(\Phi, \tilde{\Phi})\biggr), \tag{5}$$

где $\kappa^2 = 8\pi G = M_{\text{Pl}}^{-2}$. Мы полагаем все параметры вещественными и считаем, что $(V(\Phi, -\tilde{\Phi}))^* = V(\Phi, \tilde{\Phi})$ для сохранения симметрии

$$\mathcal{PT}: \quad t \mapsto -t, \quad i \mapsto -i, \quad \Phi \mapsto \Phi, \quad \tilde{\Phi} \mapsto -\tilde{\Phi}. \tag{6}$$

В квадратичном порядке поперечные (3-мерные тензорные и векторные) моды отщепляются от продольных (3-мерных скалярных.) В этой работе мы ограничимся рассмотрением только продольного неоднородного сектора. Рассмотрим следующий анзац для метрик и полей:

$$ds^2 = (N^2(t) + s(t,x))\,dt^2 + 2(\partial_k v(t,x))\,dt\,dx^k - \\ - \mathrm{e}^{2\rho}(\delta_{ij} + h(t,x)\delta_{ij} + \partial_i\partial_j E(t,x))\,dx^i\,dx^j, \tag{7}$$

$$\Phi(t,\mathbf{x}) = \Phi(t) + \phi(t,\mathbf{x}), \quad \tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}(t) + \tilde{\phi}(t,\mathbf{x}). \tag{8}$$

Переменные $\{Q_A\} \equiv \{N, \rho, \Phi, \tilde{\Phi}\}$ являются координатами ограниченного мини-суперпространства, в то время как $\{\chi_a\} \equiv \{s, v, h, E, \phi, \tilde{\phi}\}$ считаются малыми флуктуациями. Наложим следующую частичную калибровку:

$$h = E = 0. \tag{9}$$

Далее мы производим ИК-регуляризацию на конечный объем $\mathcal{V}$. Разложим оставшиеся переменные флуктуаций в суперпозицию ортонормированных собственных функций оператора Лапласа, действующего на регуляризованном пространстве,

$$\chi_a(t,\mathbf{x}) = \sum_n \chi_a^{(n)}(t) f_n(\mathbf{x}), \quad -\Delta f_n(\mathbf{x}) = \Omega_n^2 f_n(\mathbf{x}), \quad \int\limits_{\mathcal{V}} d^3x f_n(\mathbf{x}) f_m(\mathbf{x}) = \delta_{nm}. \tag{10}$$

Переменные N, v и s являются нединамическими и порождают связи. Как обычно в общей теории относительности, одна из связей — это гамильтониан, который с точностью до квадратичного порядка по флуктуациям принимает вид

$$H = \mathcal{V} H_0 + \sum_n H_2^{(n)} \simeq 0, \tag{11}$$

$$\begin{gathered} H_0 = -\frac{\kappa^2}{12\mathcal{V}^2} p_\rho^2 + \frac{M_{\tilde{\Phi}\tilde{\Phi}}}{2\mathcal{V}^2\mathcal{D}} p_\Phi^2 + \frac{M_{\Phi\Phi}}{2\mathcal{V}^2\mathcal{D}} \tilde{p}_\Phi^2 - i\frac{M_{\Phi\tilde{\Phi}}}{\mathcal{V}^2\mathcal{D}} p_\Phi \tilde{p}_\Phi + V(\Phi, \tilde{\Phi}), \\ \mathcal{D} = M_{\Phi\Phi} M_{\tilde{\Phi}\tilde{\Phi}} + M_{\Phi\tilde{\Phi}}^2, \end{gathered} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} H_2 = {} & \frac{M_{\tilde{\Phi}\tilde{\Phi}}}{2\mathcal{V}\mathcal{D}} (p_\phi^{(n)})^2 + \frac{M_{\Phi\Phi}}{2\mathcal{V}\mathcal{D}} (\tilde{p}_\phi^{(n)})^2 - i\frac{M_{\Phi\tilde{\Phi}}}{\mathcal{V}\mathcal{D}} p_\phi^{(n)} \tilde{p}_\phi^{(n)} + \frac{\kappa^2}{48\mathcal{V}^2} s^2 p_\rho^2 + \\ & + \frac{s}{2}\left[\frac{M_{\tilde{\Phi}\tilde{\Phi}}}{\mathcal{V}\mathcal{D}} p_\Phi p_\phi^{(n)} + \frac{M_{\Phi\Phi}}{\mathcal{V}\mathcal{D}} \tilde{p}_\Phi \tilde{p}_\phi^{(n)} - i\frac{M_{\Phi\tilde{\Phi}}}{\mathcal{V}\mathcal{D}} (p_\Phi \tilde{p}_\phi + p_\phi \tilde{p}_\Phi) + \mathrm{e}^{6\rho} \frac{\partial V}{\partial \Phi} \phi^{(n)} + \mathrm{e}^{6\rho} \frac{\partial V}{\partial \tilde{\Phi}} \tilde{\phi}^{(n)}\right] + \\ & + \frac{\mathrm{e}^{6\rho}}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial \Phi^2} (\phi^{(n)})^2 + \frac{\mathrm{e}^{6\rho}}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial \tilde{\Phi}^2} (\tilde{\phi}^{(n)})^2 + \mathrm{e}^{6\rho} \frac{\partial^2 V}{\partial \Phi \partial \tilde{\Phi}} \phi^{(n)} \tilde{\phi}^{(n)}. \end{aligned} \tag{13}$$

В дополнение следующие связи должны выполняться для каждой неоднородной моды:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_s^{(n)} = {} & \frac{\kappa^2}{12\mathcal{V}^2} s p_\rho^2 + \frac{M_{\tilde{\Phi}\tilde{\Phi}}}{\mathcal{V}\mathcal{D}} p_\Phi p_\phi^{(n)} + \frac{M_{\Phi\Phi}}{\mathcal{V}\mathcal{D}} \tilde{p}_\Phi \tilde{p}_\phi^{(n)} - i\frac{M_{\Phi\tilde{\Phi}}}{\mathcal{V}\mathcal{D}} (p_\Phi \tilde{p}_\phi + p_\phi \tilde{p}_\Phi) + \\ & + \mathrm{e}^{6\rho} \frac{\partial V}{\partial \Phi} \phi^{(n)} + \mathrm{e}^{6\rho} \frac{\partial V}{\partial \tilde{\Phi}} \tilde{\phi}^{(n)} \simeq 0, \end{aligned} \tag{14}$$

$$\mathcal{H}_v^{(n)} = \frac{s}{6} p_\rho + \frac{M_{\tilde{\Phi}\tilde{\Phi}}}{\mathcal{D}} p_\Phi \phi^{(n)} + \frac{M_{\Phi\Phi}}{\mathcal{D}} \tilde{p}_\Phi \tilde{\phi}^{(n)} - i\frac{M_{\Phi\tilde{\Phi}}}{\mathcal{D}} (p_\Phi \tilde{\phi} + \phi \tilde{p}_\Phi) \simeq 0. \tag{15}$$

Связи $\mathcal{H}_s^{(n)}$ и $\mathcal{H}_v^{(n)}$ отвечают неоднородным гамильтоновым и импульсным связям АДМ-формализма соответственно.

2. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ФЛУКТУАЦИЙ

Теперь производим дираковское квантование системы связей, полученной выше. Имеем систему уравнений Уилера – Де Витта (УДВ) в следующем виде:

$$\Big(\mathcal{V}\hat{H}_0 + \sum_n \hat{H}_2^{(n)}\Big)\Psi(\{Q_A\},\{\chi_a\}\Big) = 0, \tag{16}$$

$$\hat{\mathcal{H}}^{(n)}\Psi(\{Q_A\},\{\chi_a\}\Big) = 0, \quad \hat{\tilde{\mathcal{H}}}^{(n)}\Psi(\{Q_A\},\{\chi_a\}\Big) = 0. \tag{17}$$

Далее мы используем приближение Борна–Оппенгеймера [6–13] и разделяем переменные флуктуаций, соответствующие различным неоднородным модам,

$$\Psi(\{Q_A\},\{\chi_a\}\Big) \simeq \Psi_0(\{Q_A\})\prod_n \Psi_2^{(n)}(\{Q_A\},\{\chi_a^{(n)}\}). \tag{18}$$

Разлагая уравнения УДВ по различным порядкам $\kappa^3/\mathcal{V}$, сначала получаем уравнение УДВ на ограниченном мини-суперпространстве,

$$\hat{H}_0\Psi_0 = \left(\frac{\kappa^2}{12\mathcal{V}^2}\partial_\rho^2 - \frac{M_{\tilde{\Phi}\tilde{\Phi}}}{2\mathcal{V}^2\mathcal{D}}\partial_\Phi^2 - \frac{M_{\Phi\Phi}}{2\mathcal{V}^2\mathcal{D}}\partial_{\tilde{\Phi}}^2 + i\frac{M_{\Phi\tilde{\Phi}}}{\mathcal{V}^2\mathcal{D}}\partial_\Phi\partial_{\tilde{\Phi}} + V(\Phi,\tilde{\Phi})\right)\Psi_0 = 0. \tag{19}$$

Обращает внимание тот факт, что предел большого объема $\mathcal{V}/\kappa^3 \to \infty$ играет роль квазиклассического предела. Предполагая, что рассматриваем квазиклассический волновой пакет вдали от точек поворота, мы можем использовать ВКБ-приближение для мини-суперпространственной части волновой функции,

$$\Psi_0(\{Q_A\}) = \psi_0(\{Q_A\})\exp\left(i\mathcal{V}S(\{Q_A\})\right). \tag{20}$$

Мы пренебрегаем обратным влиянием на фон, полагая $\hat{H}_0\Psi_2^{(n)} = 0$. Тогда для флуктуационной части волновой функции получаем,

$$\hat{\mathcal{H}}^{(n)}\Psi_2^{(n)} = 0, \quad \hat{\tilde{\mathcal{H}}}^{(n)}\Psi_2^{(n)} = 0, \quad \frac{i}{\mathcal{V}}\partial_\tau\Psi_2^{(n)} = \hat{H}_2^{(n)}\Psi_2^{(n)}, \tag{21}$$

где ∂_τ — это производная по так называемому ВКБ-времени, направленная вдоль классической траектории [6],

$$\frac{1}{\mathcal{V}}\partial_\tau = G^{AB}(\partial_A S)\partial_B, \tag{22}$$

причем $\mathcal{G}^{AB}$ — метрика в мини-суперпространстве $\{Q_A\}$,

$$\mathcal{G}^{AB}X_AY_B \equiv \frac{\kappa^2}{12}\partial_\rho^2 - \frac{M_{\tilde{\Phi}\tilde{\Phi}}}{2\mathcal{D}}X_\Phi Y_\Phi - \frac{M_{\Phi\Phi}}{2\mathcal{D}}X_{\tilde{\Phi}}Y_{\tilde{\Phi}} + i\frac{M_{\Phi\tilde{\Phi}}}{2\mathcal{D}}(X_\Phi Y_{\tilde{\Phi}} + X_{\tilde{\Phi}}Y_\Phi). \tag{23}$$

Квадратичный член $H_2^{(n)}$ может быть интерпретирован как эффективный гамильтониан, порождающий эволюцию флуктуационной части волновой функции вдоль семейства классических траекторий, определяемого ВКБ-действием S. Мы можем теперь попробовать рассмотреть его как зависящий от времени псевдоэрмитов гамильтониан, обобщив (3), как это делается в [14],

$$\hat{H}_2^{(n)} = (\eta_n(\{Q_A\}))^{-1}\hat{h}^{(n)}(\{Q_A\})\eta_n(\{Q_A\}) - i(\eta_n(\{Q_A\}))^{-1}\partial_\tau(\eta_n(\{Q_A\})), \tag{24}$$

где как $\hat{h}^{(n)}$, так и η_n — эрмитовы операторы. Заметим, что из-за второго слагаемого в зависящем от времени случае получающийся неэрмитов гамильтониан может в действительности не быть наблюдаемой и обладать комплексными собственными значениями, но все же описывать некоторую унитарную эволюцию по отношении к норме $\langle\psi|\eta^\dagger\eta|\phi\rangle$.

Рассмотрим теперь конкретный потенциал и матрицу кинетического члена, которые допускают точные классические и квантовые однородные решения [5, 15]:

$$V(\Phi,\tilde{\Phi}) = V\mathrm{e}^{\Phi} - \tilde{V}\mathrm{e}^{i\tilde{\Phi}},\ \ \frac{M_{\Phi\tilde{\Phi}}}{\mathcal{D}} = 6\kappa^2,\ \ D = \frac{M_{\tilde{\Phi}\tilde{\Phi}}}{\mathcal{D}} - 6\kappa^2,\ \ \tilde{D} = \frac{M_{\Phi\Phi}}{\mathcal{D}} + 6\kappa^2. \tag{25}$$

В пределе слабой гравитации $\kappa \to 0$ после решения связи $\mathcal{H}_s^{(n)}$ эффективный гамильтониан существенно упрощается с расщеплением переменных ϕ и $\tilde{\phi}$,

$$\hat{H}_2^{(n)} = \hat{H}_{\phi,2}^{(n)} + \hat{H}_{\tilde{\phi},2}^{(n)} + O(\kappa), \tag{26}$$

$$\hat{H}_{\phi,2}^{(n)} = \frac{D}{2}(p_\phi^{(n)})^2 + \frac{V}{2}\,\mathrm{e}^{6\rho+\Phi}(\phi^{(n)})^2, \quad \hat{H}_{\tilde{\phi},2}^{(n)} = \frac{\tilde{D}}{2}(\tilde{p}_\phi^{(n)})^2 + \frac{\tilde{V}}{2}\,\mathrm{e}^{6\rho+i\tilde{\Phi}}(\tilde{\phi}^{(n)})^2. \tag{27}$$

Поскольку мы считаем Φ и ϕ обычными эрмитовыми полями, $\hat{H}_{\phi,2}^{(n)}$ является явно эрмитовым, а η_n должен быть нетривиальным только по отношению к сектору $\tilde{\phi}$. Оставшаяся часть $\hat{H}_{\tilde{\phi},2}$ является зависящим от времени неэрмитовым осциллятором (или, в более общем смысле, гамильтонианом Свонсона), схожим с задачей, рассмотренной в [16, 17]. Вместо того чтобы апеллировать к их работам, мы предлагаем несколько иной подход. Мы начинаем, заметив, что для чисто мнимого решения $\tilde{\Phi} = i\xi_{\text{class}}$ это просто эрмитов осциллятор с зависящей от времени частотой. Затем разлагаем $\tilde{\Phi} \simeq i\xi_{\text{class}} + \delta\tilde{\Phi}$ и ищем решение в следующем виде;

$$\hat{h}_{\tilde{\phi}}^{(n)} = \hat{H}_{2,\tilde{\phi}}^{(n)}\Big|_{\tilde{\Phi}=i\xi_0},\ \eta_n \equiv \mathrm{e}^{X_n} = \exp\Big[\alpha_n(\delta\tilde{\Phi})p_{\tilde{\phi}}^2 + \beta_n(\delta\tilde{\Phi})\tilde{\phi}^2 + \gamma_n(\delta\tilde{\Phi})(\tilde{p}_\phi\tilde{\phi} + \tilde{\phi}\tilde{p}_\phi)\Big]. \tag{28}$$

Чтобы сосчитать $\hat{H}_{2,\tilde{\phi}}^{(n)}$, мы замечаем, что операторы $\{p_{\tilde{\phi}}^2, \tilde{\phi}^2, \tilde{p}_\phi\tilde{\phi} + \tilde{\phi}\tilde{p}_\phi\}$ образуют конечную алгебру $\mathcal{A}$. Тогда можем использовать следующее представление для операторных экспонент [18]:

$$\mathrm{e}^{-X_n}\hat{h}_{\tilde{\phi}}^{(n)}\mathrm{e}^{X_n} = \mathrm{e}^{-\mathrm{ad}_{X_n}}\hat{h}_{\tilde{\phi}}^{(n)}, \quad \mathrm{e}^{-X_n}\partial_\tau(\mathrm{e}^{X_n}) = \frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{ad}_{X_n}}}{\mathrm{ad}_{X_n}}\partial_\tau X_n, \tag{29}$$

где присоединенный оператор $\mathrm{ad}_X Y \equiv [X,Y]$ может быть представлен конечномерной матрицей, действующей на алгебре $\mathcal{A}$.

Чтобы упростить задачу, будем считать, что с точки зрения вероятностной меры на мини-суперпространстве (которая является вопросом за рамками данной работы) Ψ_0 — это волновой пакет, существенно сконцентрированный около $\tilde{\Phi} = i\xi_{\text{class}}$. Тогда $\delta\tilde{\Phi}$,

α_n, β_n и γ_n могут быть рассмотрены как малые параметры. Из следующего за главным порядка разложения (24) мы получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\partial_\tau \alpha_n = 2\gamma_n \tilde{D}, \quad \partial_\tau \gamma_n = 2\beta \tilde{D} - 2\alpha \tilde{V} e^{6\rho - \xi_{\text{class}}},$$
$$\partial_\tau \beta_n = \frac{\tilde{V}}{2} e^{6\rho - \xi_{\text{class}}} \delta\tilde{\Phi} - 4\gamma_n \tilde{V} e^{6\rho - \xi_{\text{class}}}. \tag{30}$$

Решения могут быть найдены численно с использованием точных классических решений ξ_{class}, полученных [5].

Норма флуктуационной части, сохраняющаяся в ВКБ-времени, строится следующим образом:

$$(\Psi_2|\tilde{\Psi}_2)_{\{Q_A\}} = \langle \Psi_2 | \eta^\dagger \eta | \tilde{\Psi}_2 \rangle_{\{Q_A\}}, \tag{31}$$

$$\langle \Psi_2 | \tilde{\Psi}_2 \rangle_{\{Q_A\}} = \prod_n \left(\int_{\mathbb{R}^2} d\phi_n \, d\tilde{\phi}_n \right) \Psi_2^*(\{Q_A\}, \{\chi_a^{(n)}\}) \tilde{\Psi}_2(\{Q_A\}, \{\chi_a^{(n)}\}). \tag{32}$$

Случай широкого волнового пакета и следствия полученных результатов для задачи построения полной вероятностной меры будут рассмотрены в будущей работе.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке грантом РФФИ, проект 16-02-00348, а также грантом СПбГУ 11.41449.2017. Автор благодарен А. А. Андрианову, Чень Ланю, А. В. Головневу и Л. Паризи за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Cai Y. F., Saridakis E. N., Setare M. R., Xia J. Q.* Quintom Cosmology: Theoretical Implications and Observations // Phys. Rep. 2010. V. 493. P. 1.
2. *Bender C. M.* Making Sense of Non-Hermitian Hamiltonians // Rep. Prog. Phys. 2007. V. 70. P. 947.
3. *Andrianov A. A., Cannata F., Kamenshchik A. Y.* Phantom Universe from CPT Symmetric QFT // Intern. J. Mod. Phys. D. 2006. V. 15. P. 1299.
4. *Andrianov A. A., Cannata F., Kamenshchik A. Y.* Complex Lagrangians and Phantom Cosmology // J. Phys. A. 2006 V. 39. P. 9975.
5. *Andrianov A. A., Lan C., Novikov O. O.* PT Symmetric Classical and Quantum Cosmology // Non-Hermitian Hamiltonians in Quantum Physics. Springer Proc. in Phys. V. 184. Springer, Cham, 2016.
6. *Kiefer C.* Quantum Gravity. II Ed. Oxford Univ. Press, 2007. P. 168.
7. *Brout R.* On the Concept of Time and the Origin of the Cosmological Temperature // Found. Phys. 1987. V. 17. P. 603.
8. *Brout R., Venturi G.* Time in Semiclassical Gravity // Phys. Rev. D. 1989. V. 39. P. 2436.
9. *Kamenshchik A. Y., Tronconi A., Venturi G.* Inflation and Quantum Gravity in a Born–Oppenheimer Context // Phys. Lett. B. 2013. V. 726. P. 518.
10. *Kamenshchik A. Y., Tronconi A., Venturi G.* Signatures of Quantum Gravity in a Born–Oppenheimer Context // Phys. Lett. B. 2014. V. 734. P. 72.

11. *Kiefer C., Kraemer M.* Quantum Gravitational Contributions to the CMB Anisotropy Spectrum // Phys. Rev. Lett. 2012. V. 108. P. 021301.
12. *Brizuela D., Kiefer C., Kraemer M.* Quantum-Gravitational Effects on Gauge-Invariant Scalar and Tensor Perturbations during Inflation: The Slow-Roll Approximation // Phys. Rev. D. 2016. V. 94. P. 123527.
13. *Kamenshchik A. Y., Tronconi A., Venturi G.* The Born–Oppenheimer Method, Quantum Gravity and Matter. arXiv:1709.10361.
14. *Fring A., Moussa M. H. Y.* Unitary Quantum Evolution for Time-Dependent Quasi-Hermitian Systems with Nonobservable Hamiltonians // Phys. Rev. A. 2016. V. 93. P. 042114.
15. *Andrianov A. A., Novikov O. O., Lan C.* Quantum Cosmology of the Multi-Field Scalar Matter: Some Exact Solutions // Theor. Math. Phys. 2015. V. 184. P. 1224.
16. *Fring A., Moussa M. H. Y.* The Non-Hermitian Swanson Model with a Time-Dependent Metric // Phys. Rev. A. 2016. V. 94. P. 042128.
17. *Maamache M., Djeghiour O. K., Mana N., Koussa W.* Quantum Evolution of the Time-Dependent Non-Hermitian Hamiltonians: Real Phases. arXiv: 1705.06341.
18. *Rossmann W.* Lie Groups — An Introduction through Linear Groups. Oxford Univ. Press, 2002.