Письма в ЭЧАЯ. 2018. Т. 15, № 6(218). С. 467–475

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА. ТЕОРИЯ

О ТЕНЗОРЕ ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

Ю. В. Чугреев [1]

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва

Показано, что модификация симметрической, определенной по Гильберту полной плотности тензора энергии-импульса $t^{\mu\nu} \to t^{\mu\nu} - \dfrac{m^2}{16\pi G}\,\tilde{\varphi}^{\mu\nu}$ приводит к некорректным результатам базовых энергетических расчетов. Отмечается, что некоторые попытки доказать положительную определенность потока гравитационного излучения в РТГ базируются на несохраняющемся тензоре энергии-импульса.

It is shown that the following modification of the symmetric (Gilbert) total energy-momentum tensor (EMT) density $t^{\mu\nu} \to t^{\mu\nu} - \dfrac{m^2}{16\pi G}\,\tilde{\varphi}^{\mu\nu}$ leads to incorrect results in basic energetical calculations. It is pointed out that some attempts to prove a positive definiteness of the gravitational radiation flux in RTG were based on the nonconservative energy-momentum tensor.

PACS: 04.50.Kd; 95.30.Sf

Релятивистская теория гравитации была построена [1] как теория массивного гравитационного поля, обладающего строгими законами сохранения энергии-импульса, причем источником такого поля является полный (вещество + гравитационное поле) тензор энергии-импульса (ТЭИ), определенный по Гильберту как вариационная производная по метрике Минковского

$$(\Box + m^2)\,\tilde{\varphi}^{\mu\nu} = 16\pi G\,(t_g^{\mu\nu} + t_M^{\mu\nu}), \tag{1}$$

$$t_g^{\mu\nu} = -2\frac{\delta L_g}{\delta\gamma_{\mu\nu}} \tag{2}$$

— плотность ТЭИ гравитационного поля,

$$t_M^{\mu\nu} = -2\frac{\delta L_M}{\delta\gamma_{\mu\nu}} \tag{3}$$

— плотность ТЭИ вещества (все поля, кроме гравитационного). Здесь m — масса гравитона; $\Box \equiv \gamma^{\alpha\beta}\,D_\alpha\,D_\beta$ — даламбертиан; D_α — ковариантная производная по метрике Минковского $\gamma_{\alpha\beta}$; $\varphi^{\mu\nu}$ — тензор гравитационного поля, $\tilde{\varphi}^{\mu\nu} \equiv \sqrt{-\det{(\gamma_{\alpha\beta})}}\,\varphi^{\mu\nu}$; G — гравитационная постоянная, остальные фундаментальные постоянные равны единице:

[1] E-mail: chugreev@physics.msu.ru

$k = \hbar = c = 1$. L_M — плотность лагранжиана вещества; L_g — плотность лагранжиана гравитационного поля. Греческие индексы пробегают значения $0, 1, 2, 3$, а латинские — $1, 2, 3$. Сохраняющийся вследствие теоремы Нетер полный симметрический ТЭИ

$$D_\mu \left(t_g^{\mu\nu} + t_M^{\mu\nu}\right) = 0 \tag{4}$$

приводит к уравнениям поля, вырезающим из тензора гравитационного поля спины 1 и $0'$:

$$D_\beta \left(\sqrt{-\gamma}\varphi^{\alpha\beta}\right) = 0. \tag{5}$$

Универсальность действия гравитационного поля обусловливает зависимость плотности лагранжиана вещества только от метрики эффективного риманова пространства-времени $g_{\mu\nu}$ и полей материи ϕ_A: $L_M = L_M\left(g_{\mu\nu}, \phi_A\right)$. Для того чтобы уравнения (1), (3) следовали из принципа наименьшего действия, необходимо и достаточно [1], чтобы риманова метрика $g_{\mu\nu}$ была связана с метрикой Минковского и гравитационным полем следующим соотношением:

$$\begin{gathered} \sqrt{-g}g^{\alpha\beta} = \tilde{g}^{\alpha\beta} = \sqrt{-\gamma}(\gamma^{\alpha\beta} + \varphi^{\alpha\beta}), \\ g = \det\left(g_{\alpha\beta}\right), \quad \gamma = \det\left(\gamma_{\alpha\beta}\right). \end{gathered} \tag{6}$$

Плотность лагранжиана гравитационного поля, приводящая к уравнению поля (1) и не содержащая вторых производных, имеет вид [1]:

$$L_g = \frac{\tilde{g}^{\alpha\beta}}{16\pi G}\left(G^\sigma_{\alpha\beta}\, G^\mu_{\sigma\mu} - G^\mu_{\alpha\nu}\, G^\nu_{\beta\mu}\right) - \frac{m^2}{16\pi G}\left(\frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta} - \sqrt{-g} - \sqrt{-\gamma}\right). \tag{7}$$

Здесь тензор связности $G^\sigma_{\alpha\beta}$ равен

$$G^\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\, g^{\sigma\nu}\left(D_\alpha g_{\beta\nu} + D_\beta g_{\alpha\nu} - D_\nu g_{\alpha\beta}\right).$$

Обычно для решения конкретных задач уравнения гравитационного поля (1) удобнее записать в форме, обобщающей уравнения эйнштейновской общей теории относительности:

$$R_{\mu\nu} - \frac{m^2}{2}\left(g_{\mu\nu} - \gamma_{\mu\nu}\right) = 8\pi G\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right), \tag{8}$$

где

$$\sqrt{-g}T_{\mu\nu} = 2\frac{\delta L_M}{\delta g^{\mu\nu}} \tag{9}$$

— ТЭИ (негравитационного) вещества, $T \equiv g_{\mu\nu}T^{\mu\nu}$, $R_{\mu\nu}$ — тензор Риччи по метрике $g_{\mu\nu}$.

В последнем, 3-м издании монографии «Релятивистская теория гравитации» [1] вместо традиционного симметрического тензора энергии-импульса (2), (3), как это было во всех предшествующих изданиях, стал использоваться другой сохраняющийся тензор, оставляющий в левой части уравнений гравитационного поля лишь даламбертиан $\Box\tilde{\varphi}^{\mu\nu}$ (формула (8.3) в [1]):

$$\Box\tilde{\varphi}^{\mu\nu} = 16\pi G\frac{(-g)}{\sqrt{-\gamma}}\left(T^{\mu\nu} + \tau_g^{\mu\nu}\right) \equiv 16\pi G\hat{t}^{\mu\nu}_{\text{tot}}. \tag{10}$$

Связь тензора $\hat{t}^{\mu\nu}_{\text{tot}}$ с симметрическим $t_g^{\mu\nu} + t_M^{\mu\nu}$ будет установлена ниже (см. (20)).

Далее с помощью расчетов некоторых физических величин на основе тензора энергии-импульса (10) будет показано, что он не является корректным ТЭИ. Поэтому, на мой взгляд, отказываться от традиционного, определенного по Гильберту симметрического тензора энергии-импульса нет оснований.

Получим вначале явные выражения для $t_g^{\mu\nu}$ и $t_M^{\mu\nu}$, не представленные в [1], и разобьем их на структурные блоки. Это позволит определить их состав и нагляднее увидеть отличие $t_g^{\mu\nu} + t_M^{\mu\nu}$ от $T^{\mu\nu} + \tau_g^{\mu\nu}$.

Итак, для плотности лагранжиана материи $L_M = L_M(g_{\mu\nu}, \phi_A)$ плотность ТЭИ $t_M^{\mu\nu}$ равна по определению

$$t_M^{\mu\nu} = -2\frac{\delta L_M}{\delta\gamma_{\mu\nu}} = -2\frac{\delta\tilde{g}^{\alpha\beta}}{\delta\gamma_{\mu\nu}}\frac{\delta L_M}{\delta\tilde{g}^{\alpha\beta}} =$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{-\gamma}[\gamma^{\alpha\mu}\gamma^{\beta\nu} + \gamma^{\beta\mu}\gamma^{\alpha\nu} - \gamma^{\mu\nu}(\gamma^{\alpha\beta} + \varphi^{\alpha\beta})]\left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}T\right).$$

С помощью (6) находим отсюда

$$t_M^{\mu\nu} = \sqrt{-\gamma}\left[\gamma^{\alpha\mu}\gamma^{\beta\nu}T_{\alpha\beta} + \frac{T}{2}\left(\sqrt{\frac{g}{\gamma}}\gamma^{\mu\nu} - \gamma^{\alpha\mu}\gamma^{\beta\nu}g_{\alpha\beta}\right)\right]. \tag{11}$$

Опуская индексы метрикой $\gamma_{\mu\nu}$, получаем окончательно

$$t_{M,\mu\nu} \equiv \gamma_{\alpha\mu}\gamma_{\beta\nu}t_M^{\alpha\beta} = \sqrt{-\gamma}\left[T_{\mu\nu} - \frac{T}{2}\left(g_{\mu\nu} - \sqrt{\frac{g}{\gamma}}\gamma_{\mu\nu}\right)\right].$$

Для слабого поля $|\varphi^{\mu\nu}| \ll 1$ гильбертов и риманов ТЭИ совпадают:

$$t_{M,\mu\nu} = T_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\varphi_{\mu\nu}T + O\,(\varphi^2 T),$$

а для космологического фридмановского решения они могут сильно различаться.

Найдем теперь гильбертову плотность ТЭИ гравитационного поля в присутствии вещества. Заменяя частные производные на ковариантные $\partial_\mu \to D_\mu$, можно получить тождество, обобщающее формулу для псевдотензора Ландау–Лифшица:

$$\frac{(-g)}{8\pi G}\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right) \equiv D_\alpha D_\beta\left[\frac{(-g)}{16\pi G}\left(g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta} - g^{\beta\nu}g^{\alpha\mu}\right)\right] - (-g)\tau_{LL}^{\mu\nu},$$

где с учетом уравнения (5)

$$(-g)\tau_{LL}^{\mu\nu} = \frac{1}{16\pi G}\left[\frac{1}{2}\left(g^{\beta\nu}g^{\alpha\mu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\right)\left(g_{\epsilon\sigma}g_{\delta\lambda} - \frac{1}{2}g_{\delta\sigma}g_{\varepsilon\lambda}\right)D_\alpha\tilde{\varphi}^{\sigma\delta}D_\beta\tilde{\varphi}^{\varepsilon\lambda} + \right.$$
$$+ g^{\alpha\beta}g_{\tau\sigma}D_\alpha\tilde{\varphi}^{\mu\sigma}D_\beta\tilde{\varphi}^{\tau\nu} + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\tau\sigma}D_\alpha\tilde{\varphi}^{\beta\sigma}D_\beta\tilde{\varphi}^{\tau\alpha} -$$
$$\left. - g^{\mu\tau}g_{\alpha\beta}D_\tau\tilde{\varphi}^{\beta\epsilon}D_\epsilon\tilde{\varphi}^{\alpha\nu} - g^{\tau\nu}g_{\alpha\beta}D_\tau\tilde{\varphi}^{\beta\epsilon}D_\epsilon\tilde{\varphi}^{\mu\alpha}\right], \tag{12}$$

и в итоге

$$\frac{(-g)}{8\pi G}\left(R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right)=\frac{\sqrt{-\gamma}}{16\pi G}\Box\tilde{g}^{\mu\nu}-(-g)(\tau_{LL}^{\mu\nu}+\tau_{\mathrm{div}}^{\mu\nu}). \tag{13}$$

Здесь справа стоит симметричный тензор Круткова:

$$(-g)\tau_{\mathrm{div}}^{\mu\nu}=-\frac{1}{16\pi G}D_\alpha D_\beta\left(\tilde{\varphi}^{\mu\nu}\tilde{\varphi}^{\alpha\beta}-\tilde{\varphi}^{\mu\alpha}\tilde{\varphi}^{\beta\nu}\right), \tag{14}$$

который автоматически сохраняется в силу своей антисимметричной конструкции

$$D_\mu\left[(-g)\tau_{\mathrm{div}}^{\mu\nu}\right]\equiv 0.$$

Так как $\Box\tilde{g}^{\mu\nu}=\Box\tilde{\varphi}^{\mu\nu}$, то из (13) находим

$$\frac{\sqrt{-\gamma}}{16\pi G}(\Box+m^2)\tilde{\varphi}^{\mu\nu}=\frac{(-g)}{8\pi G}\left(R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right)+(-g)\left(\tau_{LL}^{\mu\nu}+\tau_{\mathrm{div}}^{\mu\nu}\right)+\frac{\sqrt{-\gamma}m^2\tilde{\varphi}^{\mu\nu}}{16\pi G}.$$

Заменяя здесь тензор Эйнштейна в правой части его выражением из уравнений поля (8), получим окончательно

$$\frac{\sqrt{-\gamma}}{16\pi G}(\Box+m^2)\tilde{\varphi}^{\mu\nu}=(-g)\left(T^{\mu\nu}+\tau_{LL}^{\mu\nu}+\tau_{\mathrm{div}}^{\mu\nu}+\tau_m^{\mu\nu}\right)\equiv\sqrt{-\gamma}t_{\mathrm{tot}}^{\mu\nu}, \tag{15}$$

где мы обозначили через $\tau_m^{\mu\nu}$ вклад в полный ТЭИ $t_{\mathrm{tot}}^{\mu\nu}$, содержащий массу гравитона:

$$(-g)\tau_m^{\mu\nu}=-\frac{m^2}{16\pi G}\left[\sqrt{-g}\tilde{g}^{\mu\nu}+\left(\tilde{g}^{\alpha\mu}\tilde{g}^{\beta\nu}-\frac{1}{2}\tilde{g}^{\mu\nu}\tilde{g}^{\alpha\beta}\right)\gamma_{\alpha\beta}-\sqrt{-\gamma}\tilde{\varphi}^{\mu\nu}\right]. \tag{16}$$

Получив выражение для источника гравитационного поля в виде правой части (15), теперь несложно найти величину гильбертовой плотности ТЭИ гравитационного поля

$$t_g^{\mu\nu}=-2\frac{\delta L_g}{\delta\gamma_{\mu\nu}}=t_{\mathrm{tot}}^{\mu\nu}-t_M^{\mu\nu}=\frac{(-g)}{\sqrt{-\gamma}}(\tau_{LL}^{\mu\nu}+\tau_{\mathrm{div}}^{\mu\nu}+\tau_m^{\mu\nu}+\tau_M^{\mu\nu}), \tag{17}$$

где $\tau_M^{\mu\nu}$ — вклад в $t_g^{\mu\nu}$, содержащий ТЭИ вещества $T^{\mu\nu}$:

$$\tau_M^{\mu\nu}=T^{\mu\nu}-\frac{\gamma^{\mu\nu}}{2}\sqrt{\frac{\gamma}{g}}T-\gamma^{\mu\alpha}\gamma^{\beta\nu}\frac{\gamma}{g}\left(T_{\alpha\beta}-\frac{g_{\alpha\beta}}{2}T\right). \tag{18}$$

Таким образом, в веществе плотность ТЭИ гравитационного поля $t_g^{\mu\nu}$ наряду с первыми тремя слагаемыми в правой части (17), зависящими только от гравитационного поля, содержит и явно входящий тензор материи (18). Его, впрочем, также можно заменить с помощью уравнений поля (8).

Тензор $t_{\mathrm{tot}}^{\mu\nu}$ (15) в приближении слабого поля не имеет линейных членов:

$$\begin{aligned}t_{\mathrm{tot}}^{\mu\nu}=T^{\mu\nu}+\frac{1}{32\pi G}\Big\{&\partial^\mu\varphi_{\alpha\beta}\partial^\nu\varphi^{\alpha\beta}-\frac{1}{2}\partial^\mu\varphi\partial^\nu\varphi+2\partial_\alpha\varphi_\beta^\nu\partial^\alpha\varphi^{\mu\beta}-\\&-2\partial_\alpha\varphi_\beta^\nu\partial^\mu\varphi^{\alpha\beta}-2\partial_\alpha\varphi_\beta^\mu\partial^\nu\varphi^{\alpha\beta}-\partial_\alpha\partial_\beta(\tilde{\varphi}^{\mu\nu}\tilde{\varphi}^{\alpha\beta}-\tilde{\varphi}^{\mu\alpha}\tilde{\varphi}^{\beta\nu})-\\&-\frac{\gamma^{\mu\nu}}{2}\left[\partial_\epsilon\varphi_{\alpha\beta}\partial^\epsilon\varphi^{\alpha\beta}-\frac{1}{2}\partial_\epsilon\varphi\partial^\epsilon\varphi-2\partial_\epsilon\varphi_{\alpha\beta}\partial^\alpha\varphi^{\epsilon\beta}\right]\Big\}-\\&-\frac{m^2}{32\pi G}\left[\varphi_\alpha^\mu\varphi^{\alpha\nu}-\frac{\gamma^{\mu\nu}}{2}\left(\varphi_{\alpha\beta}\varphi^{\alpha\beta}-\frac{\varphi^2}{2}\right)\right]+O\left(\varphi(\partial\varphi)^2\right)+O\left(m^2\varphi^3\right).\end{aligned} \tag{19}$$

Тензор энергии-импульса $\tau_g^{\mu\nu}$, который использовался в [1] (формула (8.3)), можно получить из плотности $t_{\rm tot}^{\mu\nu}$, если «убрать» из левой части (15) член с массой гравитона[1]:

$$\tau_g^{\mu\nu} = \frac{\sqrt{-\gamma}}{(-g)} \left(t_{\rm tot}^{\mu\nu} - \frac{m^2}{16\pi G} \tilde{\varphi}^{\mu\nu} \right). \tag{20}$$

Очевидно, что $\tau_g^{\mu\nu}$ в случае слабого поля содержит линейный по гравитационному полю член $m^2 \tilde{\varphi}^{\mu\nu}$. Его изъятие из ТЭИ нельзя оформить в виде соответствующей модификации лагранжиана гравитационного поля с добавлением полной производной, так как этот член не содержит производных. Покажем теперь, что использование $\tau_g^{\mu\nu}$ вряд ли имеет смысл, так как он дает нулевые результаты для наиболее значимых в теории гравитации энергетических задач.

В линейном по константе связи G приближении решение линейных уравнений гравитационного поля в статическом, сферически-симметричном случае задается потенциалом Юкавы [1]:

$$\varphi^{00} = \frac{4GM}{r} \, \mathrm{e}^{-mr}, \quad \varphi^{oi} = \varphi^{ij} = 0, \quad \tilde{g}^{ij} = \tilde{\gamma}^{ij}, \tag{21}$$

где M — гравитационная масса тела. Найдем инертную массу этого тела, основываясь на плотности полного тензора энергии-импульса $t_{\rm tot}^{\mu\nu}$ (15) и на плотности полного тензора энергии-импульса $\hat{t}_{\rm tot}^{\mu\nu}$ (10). Воспользуемся тем, что производные по времени равны нулю, а все поверхностные интегралы при $r \to \infty$ также обращаются в нуль из-за экспоненты Юкавы:

$$\lim_{r\to\infty} \int \Box \varphi^{00} dV = - \lim_{r\to\infty} \int \Delta \varphi^{00} dV = - \lim_{r\to\infty} \oint \partial_i (\varphi^{00}) \, dS^i = 0,$$

где Δ — оператор Лапласа; dS^i — элемент поверхности сферы с радиусом r. Тогда инертная масса будет равна

$$M_{\rm in} = \int t_{\rm tot}^{00} \, dV = \frac{1}{16\pi G} \int (\Box + m^2) \varphi^{00} \, dV = M,$$
$$\hat{M}_{\rm in} = \int \hat{t}_{\rm tot}^{00} \, dV = \frac{1}{16\pi G} \int \Box \varphi^{00} \, dV = 0.$$

Здесь мы учли, что экспонента Юкавы обеспечивает конечность интеграла

$$\int \varphi^{00} \, dV = 4\pi \int_0^\infty r \, \mathrm{e}^{-mr} dr = \frac{4\pi}{m^2}.$$

Таким образом, стандартный симметрический ТЭИ $t_{\rm tot}^{\mu\nu}$ приводит к равенству инертной и гравитационной масс тела, а $\hat{t}_{\rm tot}^{\mu\nu}$ дает нефизический нулевой результат. Подчеркну, что

---

[1] Наряду с $\tau_g^{\mu\nu}$ (10), в [1] используется и свободный от вторых производных тензор $\tau_g^{\mu\nu} - \tau_{\rm div}^{\mu\nu}$ (формула (8.2а)), который обозначен как $t_g^{\mu\nu}$, т. е. так же, как гильбертова плотность тензора энергии-импульса гравитационного поля (см. (4.15), (4.25) в [1]). Как следует из (12)–(16), его необходимо отличать от плотности $t_g^{\mu\nu}$ (15).

вывод о равенстве инертной и гравитационной масс тела был сделан в [1] (см. § 9), но сделан именно на основе $t^{\mu\nu}_{\rm tot}$.

Аналогичный нулевой результат можно получить и для плотности энергии фридмановской Вселенной. Ее расчет естественно проводить в галилеевых координатах пространства Минковского:

$$ds^2 = a\,(t)^6 dt^2 - \beta^4 a\,(t)^2\,[dx^2 + dy^2 + dz^2], \tag{22}$$

$$d\sigma^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \tag{23}$$

Тогда

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad \tilde{\varphi}^{00} = \frac{\sqrt{-g}}{g_{00}} - 1 = \beta^6 - 1 = \text{const}.$$

Поэтому полная плотность энергии вещества и гравитационного поля во Вселенной будет равна большой постоянной величине в первом случае

$$t^{00}_{\rm tot} = \frac{m^2}{16\pi G}\,(\beta^6 - 1) \tag{24}$$

и снова нулю в последнем:

$$\hat{t}^{00}_{\rm tot} = 0.$$

Уравнения поля (8) для метрик (22), (23) получаются в виде

$$\frac{1}{a^8}\left(\frac{da}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{m^2}{6}\left(1 - \frac{3}{2a^2\beta^4} + \frac{1}{2a^6}\right). \tag{25}$$

Переходя к собственному времени τ, такому, что

$$\dot{a} = \frac{da}{d\tau} = \frac{1}{a^3}\frac{da}{dt},$$

и выражая из (25) m^2, получим первый интеграл:

$$m^2 = 4\beta^4\left(\dot{a}^2 - \frac{8\pi G}{3}\rho a^2 + \frac{m^2 a^2}{6} + \frac{m^2}{12a^4}\right).$$

Это позволит записать постоянную плотность энергии (24) в виде

$$\begin{gathered} t^{00}_{\rm tot} = \frac{\beta^4\left(\beta^6 - 1\right)}{2\pi G}E, \quad E = \left(\frac{\dot{a}^2}{2} + V\right) = \frac{m^2}{12\beta^4}, \\ V = -\frac{4\pi G}{3}\rho a^2 + \frac{m^2}{12}\left(a^2 + \frac{1}{2a^4}\right). \end{gathered} \tag{26}$$

Сохраняющуюся плотность энергии Вселенной (26) можно интерпретировать как сумму кинетической и потенциальной энергии. При этом естественным образом мы получаем ответ на вопрос, поставленный в [1, с. 160]: чем задается интеграл движения E?

Третьей важной областью применения ТЭИ в любой теории гравитации является расчет потери энергии двойной системой на излучение гравитационных волн для сравнения с уже давно измеряемым в астрономических наблюдениях уменьшением орбитального периода двойных систем с пульсаром [2, 3].

Расчет величины потока, уносимого гравитационными волнами от нестационарного источника островного типа, основанного на ТЭИ $t^{\mu\nu}_{\rm tot}$ в линейном по G и m^2 приближении, содержится в [4]. В итоге получается соотношение, обобщающее известную эйнштейновскую формулу 1/45:

$$\dot{M} = -\frac{1}{45}\left(\dddot{I}^{kq}\right)^2 G^2 \left(1 + \frac{5}{6}\frac{m^2}{\omega_0^2}\right) + \frac{1}{9}\frac{m^2}{\omega_0^2}\, G^2\, (\dddot{J}^{\,kk})^2, \tag{27}$$

где I^{ij} и J^{ij} — квадрупольные моменты источника:

$$J^{ij} = \int \rho(t, \mathbf{r}) r^i r^j d\mathbf{r}, \quad I^{ij} = 3J^{ij} - \delta^{ij} J^{kk}, \quad I^{kk} = 0.$$

Так как величина параметра m^2/ω_0^2 очень мала из-за малости массы гравитона ($m < 10^{-10}$ лет [5]), выражение (27), полученное на базе $t^{\mu\nu}_{\rm tot}$ (15), успешно описывает наблюдаемую деградацию орбит двойных систем.

Выражение для потока $\hat{t}^{0i}_g$ в приближении слабого поля содержит линейный член $m^2\varphi^{0i}$. Для того чтобы корректно рассчитать поток в этом случае, необходимо вычислить поле φ^{0i} во втором по гравитационной постоянной G порядке, причем в правой части уравнений поля (10) в качестве источника будет стоять нелокальная величина $\sim (\partial\varphi)^2$. Как отмечал еще Фок [6], она приведет к возникновению во втором порядке гравитационного поля членов типа $\ln R/R$, что делает задачу нетривиальной. Таким образом, ТЭИ $\hat{t}^{\mu\nu}_g$ не подходит для подсчета потери энергии системой островного типа на излучение гравитационных волн.

Из формулы (27) следует еще один важный вывод. Для сферически-симметричного нестатического источника гравитационных волн величина $I^{ij} = 0$, и поэтому он излучает отрицательную энергию, т. е. его масса растет [7]:

$$\dot{M} = \frac{1}{9}\, m^2 G^2\, (\ddot{J}^{kk})^2. \tag{28}$$

Так проявляет себя духовая компонента гравитационного поля [8].

Решению этой проблемы была посвящена давняя работа Лоскутова [9], где был сделан вывод о строгой неотрицательности потока гравитационного излучения и равенстве его нулю в случае сферически-симметричного источника. В дальнейшем этот же подход развивался в [10] [1]. В [9] за основу был взят не гильбертов, а риманов ТЭИ:

$$\tau^{\mu\nu} = -2\frac{\delta L_g}{\sqrt{-g}\delta g_{\mu\nu}} = \frac{1}{8\pi G}\left[R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R + \frac{m^2}{2}\times \right.$$
$$\left. \times \left[g^{\mu\nu} + \left(g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\right)\gamma_{\alpha\beta}\right]\right], \tag{29}$$

такой что

$$\tau^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}.$$

[1] Актуальность подхода [9, 10] подтверждалась в [1, с. 140].

Поэтому вне источника он равен нулю:

$$\tau^{\mu\nu} = 0. \tag{30}$$

Разложение правой части (29) по гравитационному полю содержало линейные члены, которые заменялись на основе некоторых физических соображений на квадратичные:

$$(\Box + m^2)\varphi^{\mu\nu} = \left(\varphi^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\gamma^{\alpha\beta}\varphi\right)\partial_\alpha\partial_\beta\varphi^{\mu\nu}. \tag{31}$$

В результате такой замены $\tau^{\mu\nu}$ становился отличным от нуля, а соответствующий поток τ^{0i} — строго положительным. Некорректность этого приема, с моей точки зрения, заключалась, помимо использования нулевого ТЭИ (29), еще и в том, что соотношение (31) противоречит полевому уравнению (5), так как дивергенция от его левой части равна нулю, а от правой — нет. Вследствие этого полученный ТЭИ теряет свойство консервативности, т. е. перестает сохраняться.

Более поздняя модификация такого подхода [10] основывалась уже на корректном ТЭИ $t^{\mu\nu}_{\text{tot}}$ (15), вне вещества, совпадающего с $t^{\mu\nu}_g$, но гравитационное поле разбивалось на сумму потенциалов излучения $\psi^{\mu\nu}$ и потенциалов $\chi^{\mu\nu}$ остальной части поля, «не участвующей в формировании потока излучения, но образующей некий фон с зыбью» [10]. При этом также без достаточных оснований производилась замена линейных членов на квадратичные:

$$(\Box + m^2)\psi^{\mu\nu} = \left(\psi^{\alpha\beta} + \chi^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\gamma^{\alpha\beta}(\psi + \chi)\right)\partial_\alpha\partial_\beta\psi^{\mu\nu},$$

в результате чего тензор энергии-импульса $t^{\mu\nu}_{\text{tot}}$ опять-таки переставал сохраняться. Поэтому и в этом случае вывод о положительности энергии излучения островной системой, сделанный в [10], с моей точки зрения, несправедлив.

В этой связи упомяну также о некотором прогрессе в проблеме излучения. В работе [4] было показано, что если время жизни источника гравитационных волн конечно, то возникает длительный ($\sim 1/m$) и сильный краевой эффект, обусловленный нестационарной частью функции Грина оператора Фока–Клейна–Гордона, в результате чего потеря массы источника на «создание» такой нестатической компоненты в $(c/v)^4$ раз превышает отрицательный поток энергии (28). Здесь c — скорость света, v — скорость частиц источника.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Логунов А. А.* Релятивистская теория гравитации. Изд. 3-е. М.: Наука, 2012. 319 с.
2. *Hulse R. A., Taylor J. H.* Discovery of a Pulsar in a Binary System // Astrophys. J. Lett. 1975. V. 195. P. L51–L53.
3. *Уилл К. У.* Двойной пульсар, гравитационные волны и Нобелевская премия // УФН. 1994. Т. 164, № 7. С. 765–773.
4. *Chugreev Yu. V.* A Benign Property of the Ghost Mode in Massive Theory of Gravitation // Phys. Part. Nucl. Lett. 2018. V. 15. P. 43–48.

5. *Chugreev Yu. V.* Cosmological Constraints on the Graviton Mass in RTG // Phys. Part. Nucl. Lett. 2017. V. 14. P. 539–549.
6. *Фок В. А.* Теория пространства, времени и тяготения. М.: Гостехтеоретиздат, 1955. 504 с.
7. *Власов А. А., Чугреев Ю. В.* Гравитационное излучение в релятивистской теории гравитации с ненулевой массой гравитона. Препринт ИФВЭ № 87-165. Серпухов, 1987.
8. *Рубаков В. А., Тиняков П. Г.* Модификация гравитации на больших расстояниях и массивный гравитон // УФН. 2008. Т. 178. С. 785–822.
9. *Loskutov Yu. M.* On a Gravitational Emission in the Case of a Nonzero Graviton Mass // Proc. of the VI Marcel Grossman Meeting on GR. Part B. World Sci., 1991. P. 1658–1660.
10. *Лоскутов Ю. М.* Положительная определенность интенсивности гравитационного излучения в теории гравитации с ненулевой массой гравитона // ТМФ. 1996. Т. 107, № 2. С. 329–343.

Получено 7 февраля 2018 г.