

## ПОЧТИ ВСЮДУ ОДНОРОДНЫЕ АБЕЛЕВЫ (АНТИ)САМОДУАЛЬНЫЕ ПОЛЯ КАК СЕТЬ ДОМЕННЫХ СТЕНОК

*С. Н. Неделько*<sup>1</sup>, *В. А. Тайнов*<sup>2</sup>

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

С помощью приближенных аналитических методов и численного моделирования исследованы свойства статистического ансамбля почти всюду однородных абелевых (анти)самодуальных полей, представленного в форме сетей доменных стенок. В аналитическом подходе в приближении не взаимодействующих доменных стенок получены двухточечные корреляционные функции плотности топологического заряда и найдена топологическая восприимчивость. Показано, что рассматриваемые вакуумные поля обеспечивают выполнение закона площади для петли Вильсона. С помощью прямого численного моделирования получена двухточечная корреляционная функция плотности топологического заряда в одномерной сети доменных стенок и продемонстрирована высокая точность приближения не взаимодействующих стенок для случая тонких доменных стенок. Показано, что в большем числе измерений приближение не взаимодействующих стенок неприменимо, так как не учитывает возможность аннигиляции кинков и антикинков в сети доменных стенок. На основе имеющихся оценок зависимости энергии домена от напряженности вакуумного калибровочного поля внутри домена и его размера построен ансамбль доменных стенок с эффективным потенциалом отталкивания между доменами. В частности, показано, что плотная упаковка доменов в типичной конфигурации ведет к появлению осцилляций двухточечной корреляционной функции плотности топологического заряда.

The properties of statistical ensemble of almost everywhere homogeneous Abelian (anti)-self-dual fields represented in the form of domain wall network are investigated using analytical methods and numerical modeling. Two-point correlation functions of the topological charge density are obtained and the topological susceptibility of the domain wall network is found in the analytical approach in the approximation of non-interacting domain walls. It is shown that the considered vacuum fields ensure the implementation of the area law for the Wilson loop. Two-point correlation function of the topological charge density in one-dimensional domain wall network is obtained and the high accuracy of the approximation of non-interacting domain walls for the case of thin domain walls is demonstrated using numerical simulation. It is shown that the approximation of non-interacting domain walls is not applicable in more dimensions, because it does not take into account the possibility of annihilation of kinks and anti-kinks in domain wall network. An ensemble of domain walls with an effective repulsion potential between domains is constructed based on the available estimates of the dependence of the domain energy on the strength of the vacuum gauge field inside the domain and its size. In particular, it is shown that the dense packing of the domains in a typical configuration leads to the appearance of oscillations of the two-point correlation function of the topological charge density.

PACS: 12.38.Aw; 12.38.Lg

---

<sup>1</sup>E-mail: nedelko@theor.jinr.ru

<sup>2</sup>E-mail: tainov@theor.jinr.ru

## ВВЕДЕНИЕ

Определение свойств калибровочных полей, необходимых для одновременного описания конфайнмента, нарушения киральной и  $U_A(1)$ -симметрий, — задача, преследуемая во многих подходах к описанию вакуума КХД. В частности, вакуум КХД строится с помощью суперпозиции топологически стабильных конфигураций, таких как инстантоны, монополи, вихри и дионы (обзор этих подходов можно найти в [1]).

Инстантоны — классические решения евклидовых уравнений движения теории Янга–Миллса [2], которые соответствуют туннелированию между вырожденными квантовыми состояниями в пространстве Минковского. В работе [3] развита модель инстантонной жидкости, которая предполагает, что доминирующими вакуумными конфигурациями являются суперпозиции инстантонов и антиинстантонов. Модель позволила решить проблему нарушения  $U_A(1)$ -симметрии, исследовать роль вкладов инстантонов в адронные корреляционные функции и рассчитать массы легких невозбужденных адронов. Однако инстантоны не обеспечивают конфайнмент, так как приводят к потенциалу взаимодействия статических кварков, который на больших расстояниях асимптотически приближается к константе [4]. Модели, позволяющие изучать конфайнмент статических кварков, основаны на ансамблях дионов [5, 6] и монополей [1].

В отличие от инстантонов, вихри, связанные с центром группы  $Z_3$ , не являются решением классических уравнений движения. В модели вакуума, основанной на статистическом ансамбле вихрей, выполняется закон площади для петли Вильсона [7].

Доменные стенки играют важную роль в теории конденсированного состояния, однако они исследованы в меньшей степени в применении к вакууму КХД. Ансамбль доменных стенок обеспечивает конфайнмент как статических (закон площадей для петли Вильсона), так и динамических кварков (отсутствие полюса в пропагаторе), спонтанное нарушение киральной симметрии и решение проблемы  $U_A(1)$ . Определяющими свойствами такого статистического ансамбля для механизмов конфайнмента и нарушения киральной симметрии являются (анти)самодуальность, абелевость и стохастичность.

Подход к описанию вакуума КХД, основанный на статистическом ансамбле почти всюду однородных абелевых (анти)самодуальных глюонных полей, играющих роль среднего поля, в целом основан на квантовом эффективном действии. Рассмотрение можно начать с производящего функционала для поля Янга–Миллса в евклидовом пространстве [8, 9]:

$$Z[J] = e^{W[J]} = N \int DA \exp \left\{ -S[A] + \int d^4x J_\mu^a A_\mu^a \right\},$$

$$S[A] = \int d^4x (F_{\mu\nu}^a)^2, \quad F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + i f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c.$$

Здесь  $S[A]$  — классическое действие Янга–Миллса;  $f^{abc}$  — структурные постоянные группы  $SU(3)$ . Поведение интеграла  $Z[J]$  определяется минимумом классического действия  $S[A]$ . Однако для теории Янга–Миллса нельзя заранее утверждать, что минимум классического действия совпадает с основным состоянием квантовой теории [8]. Поэтому не исключено, что квантовое основное состояние характеризуется ненулевыми значениями инвариантов, таких как  $\langle g^2 F^2 \rangle$ ,  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ . Это означает, что квантовое эффективное действие обладает нетривиальным глобальным минимумом.

Постановку задачи о квантовом основном состоянии можно найти в работах Леувиллера [10] и Фаддеева [11]. В функциональном интеграле в пространстве Минковского

для квантования поля  $A$

$$e^{iW[A_{in}, A_{out}]} = \int_{A \rightarrow \substack{A_{in}, t \rightarrow -\infty \\ A_{out}, t \rightarrow +\infty}} e^{iS[A]} dA \quad (1)$$

необходимо определить граничные условия для асимптотических состояний [11]. Выделим гауссову меру в (1) для  $Q_\mu$  путем сдвига переменной интегрирования

$$A_\mu = B_\mu + gQ_\mu$$

и будем рассматривать  $Q_\mu$  как квантовые флуктуации [11]. Поле  $B_\mu$  определяет асимптотическое поведение  $A_{in}, A_{out}$ .

В евклидовом пространстве можно начать с записи функционального интеграла в виде

$$Z = N \int_{\mathcal{F}} DA \int_{\Psi} D\psi D\bar{\psi} \exp \{-S[A, \psi, \bar{\psi}]\}, \quad (2)$$

$$\mathcal{F} = \left\{ A : \lim_{V \rightarrow \infty} \int_V \frac{d^4x}{V} g^2 F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a = B^2 \right\}.$$

Феноменология сильных взаимодействий требует существования ненулевых глюонных, кварковых и смешанных конденсатов в вакууме КХД. Возможность их формирования, в частности ненулевого глюонного конденсата  $\langle g^2 F^2 \rangle$ , должна быть обеспечена выбором подходящих условий (2) на функциональное пространство калибровочных полей. Функциональное пространство  $\mathcal{F}$  в общем случае содержит поля с ненулевой почти всюду в  $R^4$  напряженностью, а пространство  $\Psi$  содержит квадратично интегрируемые кварковые поля.

Для постановки задачи о самосогласованном среднем поле, ответственном за конденсат, представим общее калибровочное поле в виде суммы фонового среднего поля  $B_\mu^a$ , удовлетворяющего условию (2), и квадратично интегрируемых флуктуаций  $Q_\mu^a$ , удовлетворяющих фоновому калибровочному условию

$$A_\mu^a = B_\mu^a + Q_\mu^a, \quad D_\mu^{ab}(B)Q_\mu^b = 0. \quad (3)$$

Использование тождества

$$1 = \int_B DB \Phi[A, B] \int_Q DQ \int_\Omega D\omega \delta[A^\omega - Q^\omega - B^\omega] \delta[D(B^\omega)Q^\omega]$$

для фиксации калибровки полей флуктуаций и разделения (3) в функциональном интеграле определяет эффективное действие  $S_{\text{eff}}[B]$  для среднего поля

$$Z = N' \int_B DB \int_{\Psi} D\psi D\bar{\psi} \int_Q DQ \det [D(B)D(B + Q)] \times \\ \times \delta[D(B)Q] \exp \{-S_{\text{QCD}}[B + Q, \psi, \bar{\psi}]\} = N'' \int_B DB \exp \{-S_{\text{eff}}[B]\},$$

глобальный минимум которого определяет основное состояние системы.

Доступные в настоящее время результаты вычисления эффективного действия для полей  $B_\mu^a$  с постоянной напряженностью [8, 10, 12–16] указывают на ковариантно постоянное абелево (анти)самодуальное поле как конфигурацию среднего поля, минимизирующую эффективное действие. В частности, было вычислено эффективное квантовое действие для однородного абелева (анти)самодуального глюонного поля в однопетлевом приближении [10, 12], в ренормгрупповом подходе [8] и на решетке [16] и исследованы конфайнмирующие свойства такой глюонной конфигурации [9, 10, 17]. В этих работах получены указания на то, что абелевы (анти)самодуальные глюонные поля могут обеспечивать глобальный минимум эффективного действия КХД.

В работе [13] эффективный потенциал был рассчитан в рамках существенно непертурбативного метода функциональной ренормгруппы, что подтверждает результаты однопетлевых вычислений

$$U_{\text{eff}} = \frac{B^2}{2} + \frac{11}{48\pi^2}(gB)^2 \left[ \log \left( \frac{B}{\mu^2} \right) - \frac{1}{2} \right]$$

о минимуме эффективного потенциала [10, 14, 15] при постоянных абелевых (анти)самодуальных полях.

Вместе с этим Леутвиллер обратил внимание [12], что для абелева (анти)самодуального поля пропагатор заряженных частиц в импульсном представлении является целой функцией

$$G(p^2) \sim \frac{1}{p^2} \left( 1 - e^{-p^2/B} \right).$$

Отсутствие полюса было интерпретировано как динамический конфайнмент. Мильштейн и Пинелис заметили [17], что для ковариантно постоянного поля поляризационный оператор фотонов не имеет мнимой части, что означает конфайнмент динамических кварков в этом поле.

Как было замечено Леутвиллером [10, 12], вклад ненулевых глюонных и кварковых мод в функциональный интеграл приводит к естественной регуляризации нулевых мод. Это обеспечивает соответствующую гауссову меру для интегрирования по нулевым модам в функциональном интеграле. Однако в конечном объеме точные нулевые моды превращаются в квазинулевые моды и необходимо отдельное рассмотрение как ненулевых, так и квазинулевых мод. Важным шагом явилось исследование (см. работу [18]) эффектов конечного размера для плотности свободной энергии (анти)самодуального абелева поля. Было показано, что влияние квазинулевых мод глюонных и кварковых флуктуаций может обеспечивать минимум плотности свободной энергии как по напряженности поля  $B$ , так и по размеру  $R$  области однородности фонового поля, что означает возможность формирования устойчивых доменов конечного размера. Показано, что включение постоянной эффективной массы, полученной Леутвиллером для бесконечного объема [10], приводит к глобальному минимуму плотности свободной энергии при ненулевой конечной напряженности поля  $B$  и  $R \rightarrow \infty$ . Это означает, что в чистой глюодинамике размер области однородности увеличивался бы до бесконечности. В случае исчезновения эффективной массы при  $R \rightarrow 0$ , что ожидается из-за быстрого роста всех собственных значений при малом  $R$ , возникает глобальный минимум плотности свободной энергии при конечных  $B$  и  $R$ .

Различные аспекты адронизации и свойства бесцветных адронов в присутствии почти всюду однородного абелева (анти)самодуального поля исследовались в [19–23]. В работах [20–23] построено эффективное мезонное действие и на его основе рассчитаны массы всевозможных мезонов, включая возбужденные состояния и ряд формфакторов. Этот подход оказался успешным с феноменологической точки зрения. С минимальным набором параметров (калибровочная константа связи и массы кварков в инфракрасном пределе, скалярный конденсат глюонного поля  $\langle g^2 F^2 \rangle$  и средний размер области однородности вакуумного поля) массы и константы распадов мезонов из всех областей спектра (легкие, тяжело-легкие и тяжелые кварконии) были описаны с высокой точностью. Таким образом, было показано, что рассматриваемый класс вакуумных полей позволяет развить формализм среднего поля для одновременного описания конфайнмента, реализации киральной симметрии и адронизации. Вид пропагаторов глюонов и кварков в таком среднем поле согласуется с решениями для функциональной ренормгруппы и решеточной КХД в калибровке Ландау [22].

Дальнейшее развитие этого подхода требует более детального описания свойств ансамбля вакуумных полей, в частности построения явного формализма для вычисления корреляционных функций вакуумных полей. В особенности процессы с участием  $\eta'$ -мезонов чувствительны к виду корреляционной функции плотности топологического заряда [23]. В работах [24, 25] в рамках подхода Гинзбурга–Ландау к эффективному квантовому действию КХД доменные стенки возникают вследствие наличия вырожденных дискретных минимумов в эффективном потенциале, связанных преобразованиями четности и отражениями Вейля.

В простейшем случае решение квантовых эффективных уравнений движения является стандартным кинком модели синус-Гордона для угла между хромомэлектрическим и хромагнитным полями. Стенка разделяет области с почти однородными самодуальным и антисамодуальным абелевыми глюонными полями. С помощью стандартных методов [26] из доменных стенок можно построить ансамбль почти всюду однородных абелевых (анти)самодуальных глюонных полей в явном виде. По сути единственное предположение при этом состоит в постулировании ненулевого скалярного конденсата  $\langle g^2 F^2 \rangle$  в физическом вакууме КХД.

В работе [27] был явным образом построен ансамбль доменно структурированных почти всюду однородных абелевых (анти)самодуальных вакуумных глюонных полей в форме гиперсферических доменов, для которого непосредственно показано выполнение закона площади для петли Вильсона.

Ансамбль доменно структурированных почти всюду однородных абелевых (анти)самодуальных вакуумных глюонных полей представляет собой гетерофазную систему, где различным фазам отвечают домены с самодуальным и антисамодуальным глюонными полями, имеющими разную в разных доменах ориентацию в пространстве и изотопическом пространстве. Все эти конфигурации соответствуют фазам с конфайнментом динамических кварков. Доменные стенки при этом соответствуют фазе деконфайнмента [25]. Для физической интерпретации ансамбля почти всюду однородных абелевых (анти)самодуальных полей могут быть использованы методы, применяемые для описания гетерофазных систем [28, 29].

Представление почти всюду однородных полей как сети доменных стенок позволяет поставить задачу исследования свойств ансамбля таких вакуумных полей посредством явных численных и, в определенных приближениях, аналитических расчетов. В общем

случае решение этой задачи требует численных расчетов многомерных, а в термодинамическом пределе бесконечнократных интегралов по всем конфигурациям сети доменных стенок. В приближении невзаимодействующих доменных стенок (в одномерной системе) или доменов (в многомерном случае), которое представляется обоснованным для бесконечно тонких стенок, многомерные интегралы могут быть вычислены аналитически.

Для численного расчета многомерных интегралов применяется метод Монте-Карло. В статистической физике нашел применение метод Монте-Карло по схеме марковских цепей, известный также как алгоритм Метрополиса–Гастингса, который и применяется в настоящей работе. Подробное описание алгоритма дано в разд. 2.

В аналитическом подходе в приближении невзаимодействующих доменных стенок получены в явном виде двухточечные корреляционные функции плотности топологического заряда и найдена топологическая восприимчивость сети доменных стенок как функция плотности. Показано, что рассматриваемые вакуумные поля обеспечивают выполнение закона площади для петли Вильсона в фундаментальном представлении цветовой группы, т. е. приводят к конфайнменту статических цветных зарядов. С помощью прямого численного моделирования получена двухточечная корреляционная функция плотности топологического заряда в одномерной сети доменных стенок и продемонстрирована высокая точность приближения невзаимодействующих стенок для случая тонких доменных стенок. Показано, что в большем числе измерений приближение невзаимодействующих стенок неприменимо, так как не учитывает возможность аннигиляции кинков и антикинков в сети доменных стенок. На основе имеющихся оценок зависимости энергии домена от напряженности вакуумного калибровочного поля внутри домена и его размера построен ансамбль доменных стенок с эффективным потенциалом отталкивания между доменами. Исследованы свойства этого ансамбля доменов в различных режимах. В частности, показано, что плотная упаковка доменов в типичной конфигурации ведет к появлению осцилляций двухточечной корреляционной функции плотности топологического заряда.

Работа организована следующим образом. В разд. 1 обсуждается квантовое эффективное действие КХД и его глобальные минимумы. Приведены решения в виде кинков для эффективных уравнений движения в подходе Гинзбурга–Ландау к эффективному лагранжиану. Из полученных решений построена сеть доменных стенок. В разд. 2 описывается метод Монте-Карло по схеме марковских цепей. В разд. 3 изучается одномерный и четырехмерный ансамбли сетей невзаимодействующих доменных стенок. Аналитически получена двухточечная корреляционная функция плотности топологического заряда и найдена топологическая восприимчивость сети невзаимодействующих доменных стенок как функция плотности. В разд. 4 проведен численный анализ с использованием алгоритма Метрополиса–Гастингса для одномерной сети доменных стенок: получена двухточечная корреляционная функция плотности топологического заряда. Двумерная сеть доменных стенок преобразована в ансамбль антисамодуальных доменов, и в нем исследованы: двухточечная корреляционная функция плотности топологического заряда и петля Вильсона. Разд. 5 посвящен вычислению потенциала между статическими кварками для ансамбля гиперкубических доменов. Продемонстрировано выполнение закона площади для петли Вильсона. В заключении приведены основные результаты настоящей работы и обсуждаются направления дальнейших исследований.

## 1. СЕТЬ ДОМЕННЫХ СТЕНОК КАК ВАКУУМ КХД

Рассмотрим эффективный лагранжиан в подходе типа Гинзбурга–Ландау:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{eff}} &= -\frac{1}{4\Lambda^2} (D_\nu^{ab} F_{\rho\mu}^b D_\nu^{ac} F_{\rho\mu}^c + D_\mu^{ab} F_{\mu\nu}^b D_\rho^{ac} F_{\rho\nu}^c) - U_{\text{eff}}, \\ U_{\text{eff}} &= \frac{\Lambda^4}{12} \text{Tr} \left( C_1 \hat{f}^2 + \frac{4}{3} C_2 \hat{f}^4 - \frac{16}{9} C_3 \hat{f}^6 \right), \quad \hat{f} = \frac{\hat{F}}{\Lambda^2}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\Lambda$  — некоторый масштаб, ассоциирующийся с  $\Lambda_{\text{QCD}}$  и связанный со скалярным глюонным конденсатом. Тензор напряженности неабелевых калибровочных полей может быть записан в терминах структурных постоянных  $f^{abc}$  алгебры Ли  $su(3)$  как

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + i f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c.$$

Ковариантная производная записывается в привычном виде

$$\begin{aligned} D_\mu^{ab} &= \delta^{ab} \partial_\mu - i \hat{A}_\mu^{ab} = \partial_\mu - i A_\mu^c (T^c)^{ab}, \quad \hat{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a T^a, \quad T_{bc}^a = -i f^{abc}, \\ \text{Tr}(\hat{F})^2 &= -3 F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a \leq 0, \quad F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a = 4b_{\text{vac}}^2 \Lambda^4 > 0, \quad C_1 > 0, \quad C_2 > 0, \quad C_3 > 0. \end{aligned}$$

Знаки констант  $C_1, C_2, C_3$  выбираются таким образом, чтобы обеспечить минимум  $\mathcal{L}_{\text{eff}}$  при ненулевом значении скалярного глюонного конденсата. Эффективный потенциал был предложен в работе [27] и детальнее исследован в работе [24].

Лагранжиан (4) удовлетворяет всем симметриям КХД, за исключением масштабной инвариантности. Глобальный минимум достигается для полей с постоянной напряженностью, рассмотрение которых показывает [23, 24], что абелевы ковариантно постоянные поля

$$\hat{A}_\mu = -\frac{1}{2} \hat{n} F_{\mu\nu} x_\nu, \quad \hat{n} = T^3 \cos(\xi) + T^8 \sin(\xi) \quad (5)$$

обеспечивают меньшее значение лагранжиана, нежели неабелевы поля с постоянным векторным потенциалом  $A_\mu^a = \text{const}$ . Подставляя абелево поле (5) в лагранжиан и обозначая хромоэлектрическое  $\mathbf{e}$  и хромомагнитное  $\mathbf{h}$  поля как

$$e_i = \frac{F_{4i}}{\Lambda^2}, \quad h_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \frac{F_{jk}}{\Lambda^2}, \quad \mathbf{e}^2 + \mathbf{h}^2 = 2b^2,$$

получаем

$$U_{\text{eff}} = \Lambda^4 \left\{ -C_1 b^2 + C_2 b^4 (1 + \sin^2 \omega) + \frac{1}{9} C_3 b^6 (10 + \cos 6\xi) (1 + 3 \sin^2 \omega) \right\}. \quad (6)$$

Рассмотрим случай  $\mathbf{e}^2 = \mathbf{h}^2 = b^2$ , для этого параметризуем векторы  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{h}$  в следующем виде:

$$\mathbf{h} = b \{ \sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta \}, \quad (7)$$

$$\mathbf{e} = O \left( \frac{\mathbf{h}}{b}, \psi \right) O \left( \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{h}}{|\mathbf{k} \times \mathbf{h}|}, \omega \right) \mathbf{h}, \quad k_i = \delta_{i3}, \quad (8)$$

где матрица

$$O_{ij}(\mathbf{m}, \alpha) = m_i m_j + (\delta_{ij} - m_i m_j) \cos \alpha - \varepsilon_{ijk} m_k \sin \alpha$$

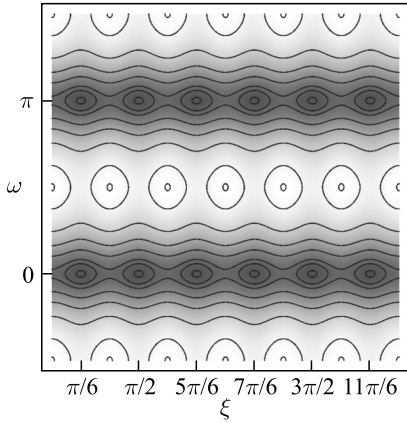


Рис. 1. Эффективный потенциал  $U_{\text{эф}}$  как функция угла  $\omega$  между хромозлектрической и хромомангнитной компонентами глюонного поля и угла  $\xi$ . Минимумы, обозначенные темно-серым цветом, образуют периодическую структуру (рисунок из работы [23])

описывает поворот вокруг единичного вектора  $\mathbf{m}$  на угол  $\alpha$ . В такой параметризации  $\mathbf{e}\mathbf{h} = b^2 \cos \omega$ .

Из выражения (6) видно, что минимум потенциала достигается на самодуальных полях ( $\omega = k\pi$ ) при  $\xi = (2l + 1)\pi/6$  для  $l = 0, 1, \dots, 5$ , что проиллюстрировано на рис. 1. Предположение о существовании ненулевого скалярного глюонного конденсата ведет к существованию периодической системы вырожденных минимумов эффективного потенциала, в каждом из которых нарушена пространственная четность и дискретная группа вейлевских отражений.

При изучении структуры полупростой алгебры Ли и ее линейных представлений важную роль играет симметрия в классе корней и корневых векторов [30]. Более детальное изучение этой симметрии позволяет связать с каждой полупростой алгеброй Ли некоторую конечную группу симметрий, называемую группой Вейля. Пусть  $G$  — полупростая алгебра Ли и  $H$  — ее картановская подалгебра. Для каждой пары векторов  $\alpha, \gamma \in H$  преобразование

$$\sigma_\alpha(\gamma) = \gamma - 2 \frac{\alpha, \gamma}{\alpha, \alpha} \alpha$$

является зеркальным отражением относительно гиперплоскости  $H_\alpha$ , ортогональной вектору  $\alpha$ . Группа, порожденная отражениями  $\sigma_\alpha$  в корневом пространстве, где  $\alpha$  пробегает систему всех простых корней алгебры  $G$ , называется группой Вейля. Гиперплоскости  $H_\alpha$  делят  $r$ -мерное корневое пространство на неперекрывающиеся конусы, каждый из которых называется камерой Вейля. Другими словами, группа Вейля переводит одну камеру Вейля в другую, и, следовательно, группа Вейля действует на множестве камер Вейля.

В работе [31] показано, что эффективный потенциал в подходе Гинзбурга–Ландау [24] для  $\hat{F}_{\mu\nu} = \hat{n}F_{\mu\nu}$  включает ограничение полной калибровочной теории  $SU(3)$  на абелево подпространство  $U(1) \times U(1)$ , где генераторы даются линейной комбинацией диагональных матриц Гелл-Манна

$$\hat{n} = \chi_1 T^3 + \chi_2 T^8.$$

Минимумы эффективного потенциала имеют место при

$$\chi = \left( \cos \frac{(2n + 1)\pi}{6}, \sin \frac{(2n + 1)\pi}{6} \right), \quad n \in \{0, \dots, 5\}$$

и связаны дискретными преобразованиями Вейля. Конфигурации доменных стенок формируются калибровочными полями, интерполирующими между различными минимумами.

С точностью до периодичности, для калибровочной группы  $SU(3)$  имеется шесть различных значений угла  $\xi$  и два значения угла  $\omega$ , соответствующие двенадцати различным вырожденным глобальным минимумам эффективного действия. Минимумы связаны



дискретными преобразованиями четности и отражениями Вейля, поэтому для лагранжиана (4) уравнения движения на угловые переменные  $\omega$  и  $\xi$  имеют решения в форме солитонов (в пространстве Минковского) и кинков (в евклидовом пространстве).

Если положить  $\theta = 0, \phi = 0, \psi = \pi/2$  в выражениях (7) и (8), то получим уравнения движения для лагранжиана (4) на переменные  $b, \omega, \xi$  (см. работу [32])

$$\begin{aligned} -6b'\omega' + b^3 \sin 2\omega (C_3 b^2 (\cos 6\xi + 10) + 3C_2) - 3b\omega'' &= 0, \\ -15b'' + 3b(-4C_1 + 2\omega'^2 + 5\xi'^2) - 12C_2 b^3 (\cos 2\omega - 3) - \\ -2C_3 b^5 (3 \cos 2\omega - 5)(\cos 6\xi + 10) &= 0, \\ 2C_3 b^6 (3 \cos 2\omega - 5) \sin 6\xi - 15b(2b'\xi' + b\xi'') &= 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Решая численно систему уравнений (9) с граничными условиями

$$b'(x_{\min}) = -b'(x_{\max}), \quad \omega(x_{\min}) + \omega(x_{\max}) = \pi, \quad \xi(x_{\min}) + \xi(x_{\max}) = \frac{2\pi}{3},$$

получим решения для переменных  $b, \omega, \xi$ , изображенных на рис. 2.

В настоящей работе исследован случай, когда значение напряженности глюонного поля  $b$  и угол  $\xi$  принимают вакуумные значения, а угол между хромоэлектрическим и хромомагнитным полями может меняться от точки к точке в евклидовом пространстве–времени  $\omega = \omega(x)$ , что соответствует изменению плотности топологического заряда  $Q(x)$ , который пропорционален  $\cos(\omega)$ ,

$$Q(x) = \frac{g^2}{32\pi^2} \tilde{F}_{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \frac{\Lambda^4}{32\pi^2} b_{\text{vac}}^2 \cos \omega(x). \tag{10}$$

В этом случае лагранжиан принимает вид

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{1}{2} \Lambda^2 b_{\text{vac}}^2 (\partial_\nu \omega \partial_\nu \omega + \mu^2 \sin^2 \omega).$$

Уравнение движения для поля  $\omega(x)$  является хорошо изученным уравнением синус-Гордона

$$\partial^2 \omega = \frac{\mu^2}{2} \sin 2\omega, \quad \mu^2 = 2b_{\text{vac}}^2 \Lambda^2 (C_2 + 3C_3 b_{\text{vac}}^2),$$

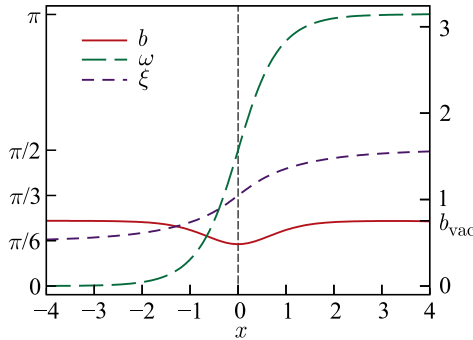


Рис. 2. Решения системы уравнений (9). При  $x \ll 0$   $b = b_{\text{vac}}, \omega = 0, \xi = \pi/6$ ; при  $x \gg 0$   $b = b_{\text{vac}}, \omega = \pi, \xi = \pi/2$  (рисунок из работы [32])

имеющим решение в виде кинка

$$\omega(x) = 2 \arctan (\exp (\mu(\eta_\nu x_\nu - q))), \quad (11)$$

описывающего плоскую доменную стенку, ортогональную единичному 4-вектору  $\eta$  и расположенную на расстоянии  $q$  (вдоль  $\eta$ ) от начала координат в некоторой системе отсчета. Заметим, что в четырехмерном пространстве это решение само по себе не характеризуется топологической стабильностью, но может стабилизироваться топологическими дефектами более низкой размерности, а также из-за влияния квазиулевых фермионных (кварковых) мод. Далее будут рассмотрены свойства сетей доменных стенок аналогично тому, как это делается в физике сплошных сред (см. [26]).

Сеть  $N$  доменных стенок представим как аддитивную суперпозицию кинков, имеющих всевозможные ориентации  $\eta_i$  и положения  $q_i$

$$\omega(x|N) = \sum_{i=1}^N \omega_i(x), \quad (12)$$

$$\omega_i(x) = 2 \arctan \exp (\mu(\eta_i^\nu x_\nu - q_i)),$$

где  $\mu$  — обратная ширина, одинаковая для всех доменных стенок в суперпозиции. Далее все размерные физические величины приводятся в единицах степеней масштаба  $\Lambda$ . В термодинамическом пределе

$$N \rightarrow \infty, \quad V \rightarrow \infty, \quad \rho = \frac{N}{V} = \text{const}$$

статистическая сумма для сети доменных стенок имеет вид

$$Z = \mathcal{N} \lim_{N, V \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^N \int_V \frac{d^4 q_j}{V} \exp \left\{ -S^{(N)}(q) \right\}.$$

Действие для сети доменных стенок может быть представлено в виде суммы

$$S^{(N)} = S_0^{(N)} + S_{\text{int}}^{(N)}, \quad S_0^{(N)} = \sum_{i=1}^N \int_V d^4 x \mathcal{L}_i(x),$$

$$S_{\text{int}}^{(N)} = \int_V d^4 x \left[ \mathcal{L}(x) - \sum_{i=1}^N \mathcal{L}_i(x) \right],$$

$$\mathcal{L}_i = \frac{b_{\text{vac}}^2}{2} ([\partial_\nu \omega_i(x)]^2 + \mu^2 \sin^2 \omega_i(x)),$$

$$\mathcal{L} = \frac{b_{\text{vac}}^2}{2} ([\partial_\nu \omega(x|N)]^2 + \mu^2 \sin^2 \omega(x|N)),$$

где  $\omega(x|N)$  определена в (12).

Нетрудно убедиться, что для очень тонких стенок ( $\mu \gg 1$ ) часть действия  $S_{\text{int}}^{(N)}$  очень мала по сравнению с  $S_0^{(N)}$  для конфигураций сети, в которой координаты  $q_i$  не совпадают для любых двух и более доменных стенок. В пределе бесконечно тонких

стенки  $S_{\text{int}}^{(N)}$  по сути дела описывает контактное, т. е. отличное от нуля только при совпадении их координат, взаимодействие между стенками, а  $S_0^{(N)}$  представляет собой действие для невзаимодействующей системы  $N$  доменных стенок. Далее,  $S_{\text{int}}^{(N)}$  в свою очередь может быть представлено как сумма действий, описывающих только парное, тройное и т. д. взаимодействие стенок. Такая иерархия может быть положена в основу схемы аналитического вычисления статистической суммы и корреляционных функций в статистической системе сетей доменных стенок.

При рассмотрении суперпозиции доменных стенок в терминах векторного потенциала на пересечениях доменных стенок неизбежно возникают сингулярные области, где  $\text{div } H \neq 0$ ,  $\text{div } E \neq 0$ . Это означает, что цветовой вектор  $\hat{n}$  в этих областях должен отклоняться от своего постоянного значения, и само поле должно становиться неабелевым, что может свидетельствовать о наличии дионов на пересечении доменных стенок. Описание сети доменных стенок (12) в терминах векторного потенциала требует применения параметризации калибровочного поля, предложенной в серии работ [33–40]. В этой параметризации абелева часть  $\hat{V}_\mu(x)$  явно отделена от неабелева поля  $\hat{A}_\mu(x)$  так, что

$$\begin{aligned} \hat{A}_\mu(x) &= \hat{V}_\mu(x) + \hat{X}_\mu(x), \quad \hat{V}_\mu(x) = \hat{B}_\mu(x) + \hat{C}_\mu(x), \\ \hat{B}_\mu(x) &= [n^a A_\mu^a(x)] \hat{n}(x) = B_\mu(x) \hat{n}(x), \\ \hat{C}_\mu(x) &= g^{-1} \partial_\mu \hat{n}(x) \times \hat{n}(x), \\ \hat{X}_\mu(x) &= g^{-1} \hat{n}(x) \times (\partial_\mu \hat{n}(x) + g \hat{A}_\mu(x) \times \hat{n}(x)), \end{aligned}$$

где  $\hat{A}_\mu(x) = A_\mu^a(x) t^a$ ,  $\hat{n}(x) = n_a(x) t^a$ ,  $n^a n^a = 1$ , и

$$\partial_\mu \hat{n} \times \hat{n} = i f^{abc} \partial_\mu n^a n^b t^c, \quad [t^a, t^b] = i f^{abc} t^c.$$

Поле  $\hat{V}_\mu(x)$  рассматривается как абелево в том смысле, что  $[\hat{V}_\mu(x), \hat{V}_\nu(x)] = 0$ . Сингулярные области охватывают весь спектр топологических дефектов — вихрей, дионов, инстантонов.

В недавней работе [18] показано, что плотность свободной энергии (эффективный потенциал) для случая четырехмерной области радиуса  $R$ , заполненной антисамодуальным абелевым полем, имеет глобальный минимум при конечном значении напряженности фонового глюонного поля  $B$  и размера области  $R$ , обусловленный присутствием квазинулевых мод кварков.

## 2. МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО ПО СХЕМЕ МАРКОВСКИХ ЦЕПЕЙ

Метод Монте-Карло используется для вычислений функциональных интегралов вида

$$Z = \mathcal{N} \int_V Dx e^{-S[x]}.$$

При этом оказывается невыгодным интегрировать последовательно по координатам  $x$ , а удобно заменить многократный интеграл суммой по состояниям системы и вычислять эту сумму методом Монте-Карло.

Пусть состояние системы, обозначаемое буквой  $X$ , характеризуется набором координат

$$X = \{x_0, x_1, \dots, x_m\}.$$

Последовательное интегрирование по  $x$  можно представить как сумму по всем состояниям системы

$$\int_V Dx = \sum_X.$$

Таким образом, среднее от некоторой величины  $O(x)$  можно вычислить следующим образом:

$$\langle O \rangle = \sum_X O(X) e^{-S[X]} / \sum_X e^{-S[X]}, \quad (13)$$

где  $O(X)$  и  $S[X]$  представляют значения усредняемой величины  $O$  и действия  $S$  в данном состоянии  $X$  соответственно.

В случае если полное число состояний системы велико, то перебрать их все не представляется возможным, и для вычисления средней величины (13) используется стандартный метод Монте-Карло. Для вычисления суммы (13) случайным образом генерируется последовательность состояний системы

$$A = \{X_0, X_1, \dots, X_n\}. \quad (14)$$

Если состояние  $X_i$  системы встречается в последовательности состояний системы  $A$  с вероятностью  $p(X_i)$ , то среднее (13) приближенно можно записать

$$\langle O \rangle \approx \sum_{i=0}^n O(X_i) p^{-1}(X_i) e^{-S[X_i]} / \sum_{i=0}^n p^{-1}(X_i) e^{-S[X_i]}. \quad (15)$$

Выгодно генерировать состояние  $X_i$  с вероятностью

$$p(X_i) \propto e^{-S[X_i]}, \quad (16)$$

чтобы выражение (15) приняло вид среднего арифметического

$$\langle O \rangle \approx \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n O(X_i).$$

Последовательность состояний, которые генерируются с вероятностью (16), называется равновесной последовательностью состояний. Построить равновесный ансамбль состояний не так-то просто, потому что заранее неизвестно значение вероятности (16). С этой целью устраивается марковский процесс, с помощью которого каждое новое состояние в последовательности (14) строится из предыдущего. Марковским процессом называется такой случайный процесс, который полностью определяется матрицей перехода  $P(X \rightarrow X')$  из состояния  $X$  в состояние  $X'$ , причем эта вероятность не зависит от истории системы. Матрица перехода  $P(X \rightarrow X')$  удовлетворяет принципу детального равновесия

$$e^{-S[X]} P(X \rightarrow X') = e^{-S[X']} P(X' \rightarrow X). \quad (17)$$

Элементы матрицы перехода  $P$  называются вероятностями перехода

$$P(X \rightarrow X') = \{p(i, j); i, j = 0, 1, \dots, m\}.$$

Конкретные алгоритмы, по которым проводятся монте-карловские вычисления, различаются выбором матрицы перехода  $P(X \rightarrow X')$ , однако непременно выполняется свойство (17).

Существует некоторое количество алгоритмов, основанных на марковских цепях. Одним из самых популярных и простых алгоритмов, применяемых к широкому классу задач, является алгоритм Метрополиса. Более подробно об этом алгоритме можно прочесть в работе [41]. Обобщение алгоритма Метрополиса было дано в 1970 г. Гастингсом [42]. Гастингс предложил использовать произвольную матрицу перехода  $P$ , которая в общем случае не симметрична, т. е.  $p(i, j) \neq p(j, i)$ . Остановимся более подробно на алгоритме Метрополиса–Гастингса.

Предположим, что наша цель — сгенерировать последовательность состояний по некоторому распределению  $\pi(X) = z^{-1}f(X)$ , где  $z$  есть нормировочная константа, которая в общем случае неизвестна и трудно определяема. Напомним, что  $X_i = \{x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_m}\}$ .

Марковская цепь строится следующим образом:

1. Задается начальное состояние системы  $X_0$ .
2. Используя текущее состояние  $X$ , выбираем новое состояние  $X'$  в соответствии с матрицей перехода  $P(X \rightarrow X')$ .
3. Вычисляем отношение

$$r = \frac{\pi(X')P(X' \rightarrow X)}{\pi(X)P(X \rightarrow X')} = \frac{f(X')P(X' \rightarrow X)}{f(X)P(X \rightarrow X')}.$$

4. Если отношение  $r > 1$ , то состояние  $X'$  принимается и возвращаемся к п.2.
5. Если отношение  $r < 1$ , то генерируем случайное число  $U$  на интервале  $(0,1)$  и принимаем состояние  $X'$  с вероятностью  $\min(r, 1)$ , если  $U \leq r$ . В противном случае остаемся в состоянии  $X$ .

Таким образом, в результате  $k$  шагов мы получим последовательность состояний  $A = \{X_0, X_1, \dots, X_k\}$ , где вероятность перехода из состояния  $X_i$  в состояние  $X_{i+1}$  зависит только от состояния  $X_i$  и не зависит от  $\{X_0, \dots, X_{i-1}\}$ . После достаточно большого числа шагов последовательность состояний  $\{X_k, X_{k+1}, \dots\}$  будет в точности описывать исходное распределение  $\pi(X)$ .

### 3. СИСТЕМА НЕВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ДОМЕННЫХ СТЕНОК: ДВУХТОЧЕЧНЫЕ КОРРЕЛЯЦИИ

Статистическая сумма  $N$  невзаимодействующих доменных стенок имеет факторизованную по одиночным стенкам форму

$$Z_0(N, V) = \prod_{j=1}^N \int_V \frac{d^4 q_j}{V} \exp \{-S_V(q_j)\}.$$

Действие одиночной стенки легко вычисляется и в термодинамическом пределе не зависит от ее координат. В итоге получаем

$$Z_0(N, V) = \exp \{-2b_{\text{vac}}^2 \rho \mu V\},$$

где  $\rho$  — плотность доменных стенок;  $V$  — четырехмерный объем.

Рассмотрим двухточечную корреляционную функцию плотности топологического заряда

$$G(x - y) = \lim_{N, V \rightarrow \infty} Z_0^{-1}(N, V) \prod_{j=1}^N \int_V \frac{d^4 q_j}{V} Q(x|N) Q(y|N) e^{-S_0^{(N)}}.$$

Здесь  $Q(x|N)$  определяется в (10) с заменой  $\omega(x)$  на суперпозицию  $\omega(x|N)$ .

Пользуясь тем, что при  $\mu \rightarrow \infty$

$$\cos \omega(x, N) \cos \omega(y, N) \approx \prod_{j=1}^N \cos \omega_j(x) \cos \omega_j(y),$$

получаем в пределе  $\mu \rightarrow \infty$

$$G(x - y) = \lim_{N, V \rightarrow \infty} \left( \int_V \frac{d^4 q}{V} Q(x) Q(y) \right)^N.$$

Интеграл по координатам  $q$  можно вычислить аналитически, после чего, подставляя соотношение  $N = \rho * V$  и пользуясь вторым замечательным пределом для вычисления термодинамического предела, находим корреляционную функцию.

Интересно привести результат для одномерного случая, когда все доменные стенки параллельны друг другу:

$$G(x) = C \exp \{-2\rho x \coth(\mu x)\}.$$

График нормированной в нуле двухточечной корреляционной функции  $G(x)$  для одномерно упорядоченной системы стенок приведен на рис. 3, а для двух значений плотности  $\rho$  при фиксированной ширине доменной стенки.

При  $\mu|x| \gg 1$  корреляционная функция  $G(x)$  представляет собой убывающую экспоненту

$$G(x) \propto \exp \{-2\rho|x|\}.$$

Для общего случая неупорядоченных стенок аналогичное вычисление дает следующий результат для коррелятора плотности топологического заряда:

$$G(r) = C \exp \left\{ -\frac{\rho}{480\pi\mu^4} \int_{-1}^1 dt \sqrt{1-t^2} \coth(\mu r t) [720\text{Li}_4(-e^{-2\mu r t}) + 7\pi^4] \right\}, \quad r = |x - y|.$$

График нормированной двухточечной корреляционной функции  $G(r)$  изображен на рис. 3, б для двух значений плотности  $\rho$  при фиксированной ширине доменной стенки.

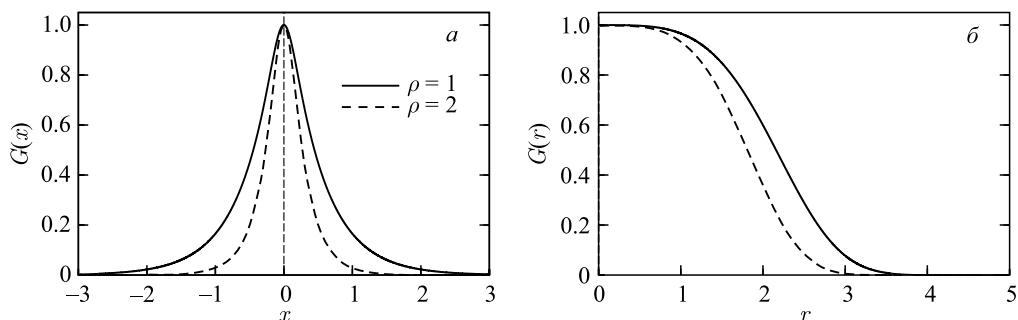


Рис. 3. Нормированная двухточечная корреляционная функция плотности топологического заряда для одномерной (а) и четырехмерной (б) сети доменных стенок для плотностей  $\rho = 1$  (сплошная линия) и  $\rho = 2$  (штриховая линия) и обратной ширины доменной стенки  $\mu = 10$

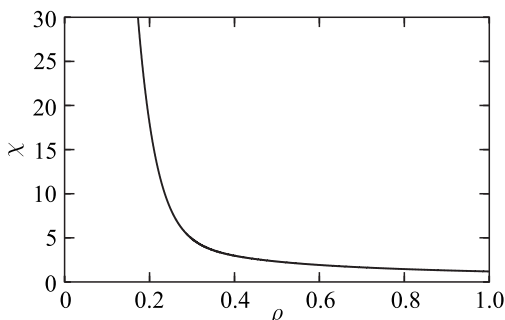


Рис. 4. Зависимость топологической восприимчивости  $\chi$  от плотности доменных стенок  $\rho$  при обратной ширине доменной стенки  $\mu = 10$

С ростом плотности длина корреляции уменьшается. При  $\mu r \gg 1$  эта корреляционная функция очень быстро убывает, быстрее экспоненты от любой степени расстояния  $r$ :

$$G(r) \propto \exp \left\{ -\frac{\rho e^{2\mu r}}{1920\sqrt{\pi}\mu^{11/2}r^{3/2}} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{\mu r}\right) \right] \right\}.$$

Топологическая восприимчивость системы определяется интегралом

$$\chi = \int_V d^4x G(x).$$

На рис. 4 показана зависимость топологической восприимчивости от плотности доменных стенок. При стремлении плотности доменных стенок к нулю топологическая восприимчивость неограниченно растет, что связано со стремлением в этом пределе корреляционной длины к бесконечности.

#### 4. ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ОДНОМЕРНОЙ И ДВУМЕРНОЙ СЕТИ ДОМЕННЫХ СТЕНОК

В предыдущем разделе была получена двухточечная корреляционная функция плотности топологического заряда для одномерной сети в приближении невзаимодействующих очень тонких доменных стенок.

Воспользуемся алгоритмом Метрополиса–Гастингса для анализа полного действия  $S^{(N)}$  одномерной сети доменных стенок. Напомним, что полное действие сети доменных стенок определяется выражением

$$S^{(N)} = \frac{b_{\text{vac}}^2}{2} \int_{-\tilde{l}}^{\tilde{l}} dx ([\partial_\nu \omega(x|N)]^2 + \mu^2 \sin^2 \omega(x|N)).$$

Средняя плотность топологического заряда и двухточечная корреляционная функция плотности топологического заряда записываются в виде суммы по конфигурациям доменных стенок

$$\langle Q(x) \rangle = Z^{-1} \prod_{j=1}^N \int_{-l}^l \frac{dq_j}{2l} Q(x|N) e^{-S^{(N)}} \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Q(x|N),$$

$$G(x-y) = Z^{-1} \prod_{j=1}^N \int_{-l}^l \frac{dq_j}{2l} Q(x|N) Q(y|N) e^{-S^{(N)}} \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Q(x|N) Q(y|N),$$

где  $Q(x|N)$  определяется в (10) с заменой  $\omega(x)$  на суперпозицию  $\omega(x|N)$ , которая, в свою очередь, определена в (12). Здесь индекс  $i$  пробегает по номерам конфигураций доменных стенок, т. е.  $q_i = (q_{i1}, q_{i2}, \dots, q_{iN})$ .

Пределы интегрирования должны удовлетворять условию  $\tilde{l} > l$ , что делает невозможным  $j$ -й доменной стенке довольно близко подойти к границе области интегрирования в действии.

Вычисления по схеме Метрополиса–Гастингса приведены на рис. 5. Средняя плотность топологического заряда (рис. 5, а) в среднем по ансамблю равна нулю. Нормированная двухточечная корреляционная функция плотности топологического заряда изображена на рис. 5, б.

Несмотря на простоту одномерной модели, добавление степени свободы у доменной стенки (поворот доменной стенки на плоскости) приводит к вырождению сети доменных

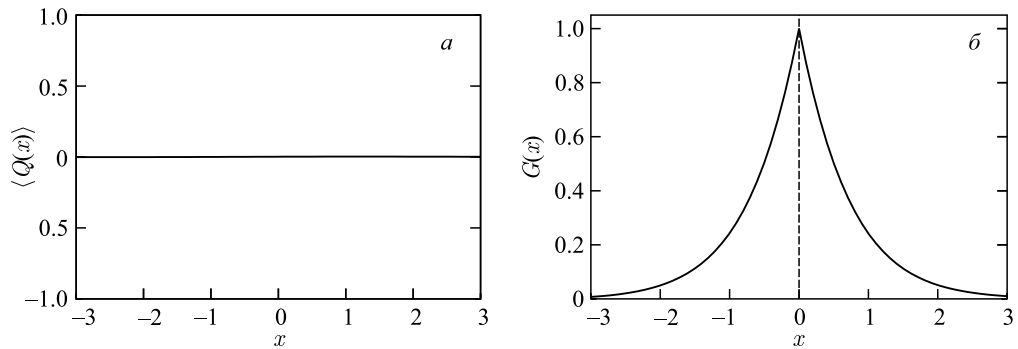


Рис. 5. Средняя плотность топологического заряда (а) и нормированная двухточечная корреляционная функция плотности топологического заряда (б), вычисленные по схеме Метрополиса–Гастингса. Плотность доменных стенок  $\rho = 1,0$  и обратная ширина доменной стенки  $\mu = 10$ . Количество отобранных конфигураций по схеме Метрополиса–Гастингса  $n = 10^6$



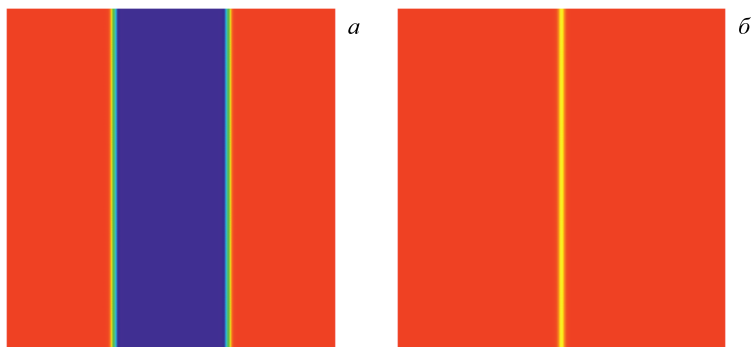


Рис. 6 (цветной в электронной версии). Двумерная проекция для плотности топологического заряда  $Q(x)$ : а) конфигурация кинка и антикинка, находящихся на некотором расстоянии друг от друга; б) ситуация столкновения кинка и антикинка. Зеленый (светло-серый) цвет соответствует калибровочному полю с бесконечно малой плотностью топологического заряда. Синий (темно-серый) и красный (серый) цвета соответствуют абелеву самодуальному и антисамодуальному глюонным полям соответственно

стенок в один большой домен. Доминирующими конфигурациями, минимизирующими действие, являются аннигиляция кинка и антикинка с образованием однородного самодуального или антисамодуального поля. Такая ситуация показана на рис. 6, где на рис. 6, а показаны кинк и антикинк, находящиеся на некотором расстоянии друг от друга. На рис. 6, б показано вырождение сети доменных стенок в один большой антисамодуальный домен. Синий (темно-серый) и красный (серый) цвета соответствуют абелеву самодуальному и антисамодуальному глюонным полям соответственно.

Случай однородного поля не представляет интерес, потому что действие однородного поля всегда равно нулю. Выйти из этого положения можно путем построения конечной области однородного поля. Процедура построения была проделана в работе [25] как мультипликативная и аддитивная суперпозиция доменных стенок, которая в случае квадратных доменов с ребром  $a$  может быть записана в виде

$$\omega(x | q) = \pi \sum_{i=1}^N \prod_{j=1}^4 \zeta \left( (x - q_i) \eta^{ij} + \frac{a}{2} \right), \quad (18)$$

$$\zeta \left( (x - q_i) \eta^{ij} + \frac{a}{2} \right) = \frac{2}{\pi} \arctan \exp \left\{ \mu \left( (x - q_i)_\nu \eta_\nu^{ij} + \frac{a}{2} \right) \right\}, \quad \nu = 1, 2.$$

В полярной системе координат положение  $i$ -й доменной стенки выглядит как

$$q_i = (z_i \cos \phi_i, z_i \sin \phi_i),$$

и матрица

$$\eta^{ij} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_i + \pi/2(j-1)) \\ \sin(\alpha_i + \pi/2(j-1)) \end{pmatrix}$$

описывает поворот домена вокруг собственного центра.

Выражения для средней плотности топологического заряда и двухточечной корреляционной функции плотности топологического заряда примут вид

$$\langle Q(x) \rangle = \frac{1}{Z} \prod_{i=1}^N \int_0^l dz_i z_i \int_0^{2\pi} d\phi_i \int_0^{2\pi} d\alpha_i Q(x|z, \phi, \alpha) \times \exp \left\{ - \int_0^{\bar{l}} dr r \int_0^{2\pi} d\gamma \mathcal{L}(r, \gamma|z, \phi, \alpha) \right\},$$

$$G(x - y) = \frac{1}{Z} \prod_{i=1}^N \int_0^l dz_i z_i \int_0^{2\pi} d\phi_i \int_0^{2\pi} d\alpha_i Q(x|z, \phi, \alpha) Q(y|z, \phi, \alpha) \times \exp \left\{ - \int_0^{\bar{l}} dr r \int_0^{2\pi} d\gamma \mathcal{L}(r, \gamma|z, \phi, \alpha) \right\}.$$

Вычисления по схеме Метрополиса–Гастингса с ансамблем антисамодуальных доменов приводят к кластеризации доменов в один большой антисамодуальный домен, что энергетически выгодно. На рис. 7 представлена типичная ситуация кластеризации доменов в один большой антисамодуальный домен.

Рассмотрим полностью случайный ансамбль антисамодуальных доменов, т. е. ансамбль, в котором статистические веса абсолютно всех конфигураций равны друг другу. В этом случае мы имеем равенство нулю средней плотности топологического заряда

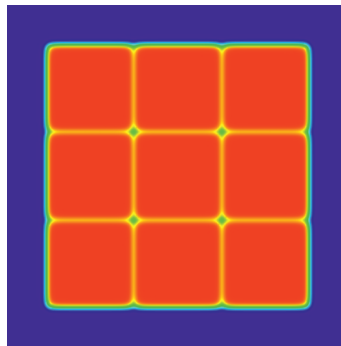


Рис. 7 (цветной в электронной версии). Двумерная проекция для плотности топологического заряда  $Q(x)$ . Представлена кластеризация доменов в один большой антисамодуальный домен. Зеленый (светло-серый) цвет соответствует калибровочному полю с бесконечно малой плотностью топологического заряда. Синий (темно-серый) и красный (серый) цвета соответствуют абелеву самодуальному и антисамодуальному глюонным полям соответственно

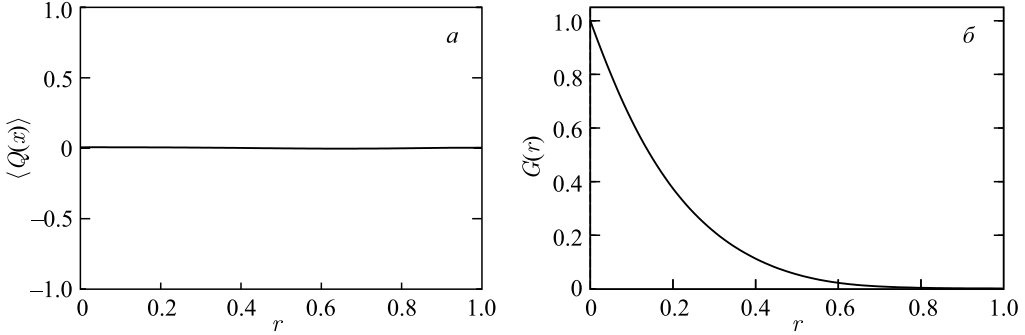


Рис. 8. Средняя плотность топологического заряда (а) и нормированная двухточечная корреляционная функция плотности топологического заряда (б) для полностью случайного ансамбля антисамодуальных доменов с плотностью доменов  $\rho = 1,3$ . Обратная ширина доменной стенки  $\mu = 10$

по ансамблю, что показано на рис. 8, а, и нормированную двухточечную корреляционную функцию плотности топологического заряда, изображенную на рис. 8, б.

Петля Вильсона для группы  $SU(2)$  имеет форму

$$W(L, T) = \frac{1}{Z} \prod_{i=1}^N \int_0^l dz_i z_i \int_0^{2\pi} d\phi_i \int_0^{2\pi} d\alpha_i \cos \left( \frac{b_{\text{vac}}^2}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-T/2}^{T/2} d^2x \cos \omega(x|z, \phi, \alpha) \right) \times \\ \times \exp \left\{ - \int_0^{\bar{l}} dr r \int_0^{2\pi} d\gamma \mathcal{L}(r, \gamma|z, \phi, \alpha) \right\}.$$

При больших  $T$  и  $L$  петля Вильсона ведет себя как

$$W(L, T) \approx e^{-TU(L)}.$$

Для случайного ансамбля антисамодуальных доменов потенциал  $U(L)$  изображен на рис. 9.

Смоделировать вклад квазиулевых мод кварков для ансамбля антисамодуальных доменов можно введением функции  $F(z^2)$ , способной обеспечивать отталкивание между соседними доменами, в то время как размер самого домена оставался бы фиксированным и равным  $a$ . Функция  $F$  может быть, например,

$$F(z^2) = \frac{2}{\pi} \arctan \exp(-\varkappa(z^2 - 2a^2)).$$

Построим потенциал отталкивания  $V$ , зависящий только от расстояния между двумя доменами как

$$V = \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=k+1}^N F((z_k - z_j)^2).$$

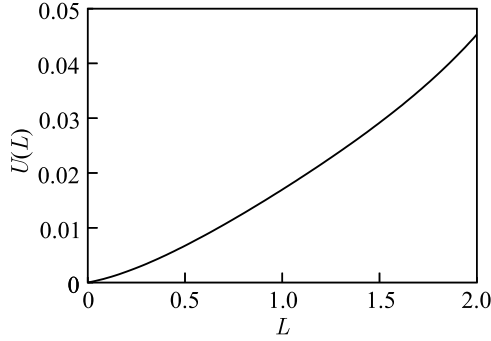


Рис. 9. Потенциал  $U(L)$  взаимодействия статических кварков для прямоугольного контура петли Вильсона размера  $L \times T$ , где  $T = 2$ . Плотность доменов  $\rho = 1,3$ , обратная ширина доменной стенки  $\mu = 10$

Итоговые выражения для средней плотности топологического заряда и двухточечной корреляционной функции плотности топологического заряда будут иметь вид

$$\langle Q(x) \rangle = \frac{1}{Z} \prod_{i=1}^N \int_0^l dz_i z_i \int_0^{2\pi} d\phi_i \int_0^{2\pi} d\alpha_i Q(x|z, \phi, \alpha) \times \\ \times \exp \left\{ - \int_0^{\tilde{l}} dr r \int_0^{2\pi} d\gamma \mathcal{L}(r, \gamma|z, \phi, \alpha) + V \right\},$$

$$G(x - y) = \frac{1}{Z} \prod_{i=1}^N \int_0^l dz_i z_i \int_0^{2\pi} d\phi_i \int_0^{2\pi} d\alpha_i Q(x|z, \phi, \alpha) Q(y|z, \phi, \alpha) \times \\ \times \exp \left\{ - \int_0^{\tilde{l}} dr r \int_0^{2\pi} d\gamma \mathcal{L}(r, \gamma|z, \phi, \alpha) + V \right\}.$$

В ансамбле антисамодуальных доменов объемы самодуальной и антисамодуальной составляющих поля могут различаться. Это может привести к ненулевой средней плотности топологического заряда, что означало бы нарушение четности в целом по ансамблю. Равенство самодуальной и антисамодуальной составляющих поля накладывает ограничение на предел интегрирования  $\tilde{l}$ , который можно получить из

$$2Na^2 = \pi \tilde{l}^2.$$

На рис. 10, б показана идеализированная ситуация с некоторым характерным размером домена  $a$  и введенным потенциалом отталкивания  $V$ . Помимо идеализированной ситуации возможна ситуация, изображенная на рис. 10, а. Такое расположение доменов имеет меньший статистический вес по сравнению с расположением доменов, как на рис. 10, б, что подтверждается вычислением действия отдельно для каждой конфигурации.

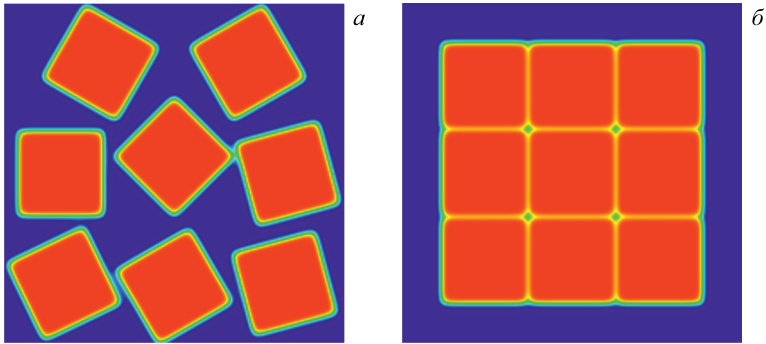


Рис. 10 (цветной в электронной версии). Двумерная проекция для плотности топологического заряда  $Q(x)$ . Зеленый (светло-серый) цвет соответствует калибровочному полю с бесконечно малой плотностью топологического заряда. Синий (темно-серый) и красный (серый) цвета соответствуют абелеву самодуальному и антисамодуальному глюонным полям соответственно

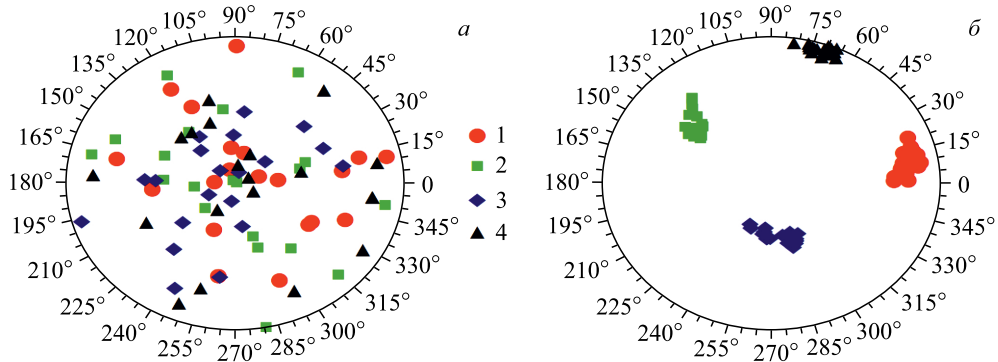


Рис. 11 (цветной в электронной версии). Распределение доменов со слабым (*a*) и сильным (*b*) взаимодействием. Маркерами показаны центры доменов

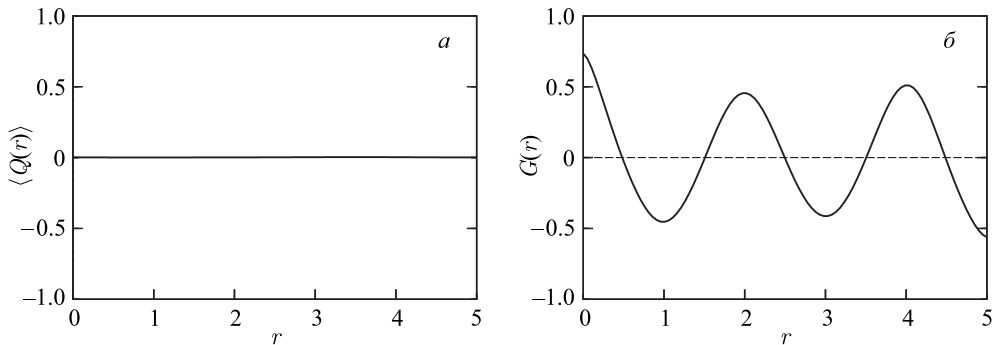


Рис. 12. Средняя плотность топологического заряда (*a*) и двухточечная корреляционная функция плотности топологического заряда (*b*) для плотно упакованной системы антисамодуальных доменов с плотностью доменов  $\rho = 0,5$ . Ребро домена  $a = 1$  и обратная ширина доменной стенки  $\mu = 10$

Ослабление взаимодействия между доменами приводит к их кластеризации и равномерному заполнению области интегрирования доменами, что продемонстрировано на рис. 11, *а*, где маркерами показаны центры доменов. Но при усилении взаимодействия (рис. 11, *б*) домены мало отклоняются от начальной конфигурации, происходит поворот системы доменов как целого. Для двух случаев выполняется равенство самодуальной и антисамодуальной составляющих поля.

Из описанного выше можно сделать вывод, что ансамбль антисамодуальных доменов может быть построен как всевозможные трансляции и повороты плотно упакованной системы доменов, например, изображенной на рис. 10, *б*. Моделирование такой системы показывает, что в целом по ансамблю четность не нарушена, что означает равенство нулю средней плотности топологического заряда, как представлено на рис. 12. Но в двухточечной корреляционной функции плотности топологического заряда видна периодичность, причем минимумы и максимумы соответствуют центрам (анти)самодуальных доменов. Похожее поведение корреляционной функции наблюдается в работе [43] для теории Гросса–Невё с киральным конденсатом.

## 5. ЗАКОН ПЛОЩАДИ ДЛЯ ПЕТЛИ ВИЛЬСОНА

Для вычисления петли Вильсона минимальным элементом является не одиночная доменная стенка, а суперпозиция восьми стенок, формирующая четырехмерный домен. По аналогии с выражением (18), почти гиперкубическая четырехмерная область антисамодуального поля с центром в точке  $z$  и окруженная самодуальным полем может быть построена в виде

$$\omega(x, z) = \pi \prod_{\nu=1}^4 \zeta(-x_{\nu} + z_{\nu} + a) \zeta(x_{\nu} - z_{\nu} + a),$$

$$\zeta(x) = \frac{2}{\pi} \arctan \exp(\mu(\eta^{\nu} x_{\nu} - q)).$$

Ансамбль  $N$  гиперкубических доменов состоит из всевозможных суперпозиций вида

$$\omega(x, z) = \pi \sum_{i=1}^N \prod_{\nu=1}^4 \zeta\left(-x_{\nu} + z_{\nu}^i + \frac{a_i}{2}\right) \zeta\left(x_{\nu} - z_{\nu}^i + \frac{a_i}{2}\right). \quad (19)$$

На рис. 13, *а* представлена двумерная проекция  $\cos \omega(x, z)$ , т. е., по сути, плотности топологического заряда, для суперпозиции доменов. Синий (темно-серый) и красный (серый) цвета соответствуют самодуальному и антисамодуальному полям соответственно.

Дальнейшее вычисление будет проведено для идеализированного ансамбля доменов, показанного на рис. 13, *б*, — все домены имеют форму одинаковых гиперкубов.

Выражение для петли Вильсона запишем в виде

$$W(L, T) = \prod_{i=1}^N \int_V \frac{d^4 z^i}{V} \int_0^{\infty} da_i \xi(a_i) \int d\sigma_i \operatorname{Tr} \exp \left[ i \int_{\Sigma} d\sigma_{\mu\nu}(x) \hat{B}_{\mu\nu}(x) \right],$$

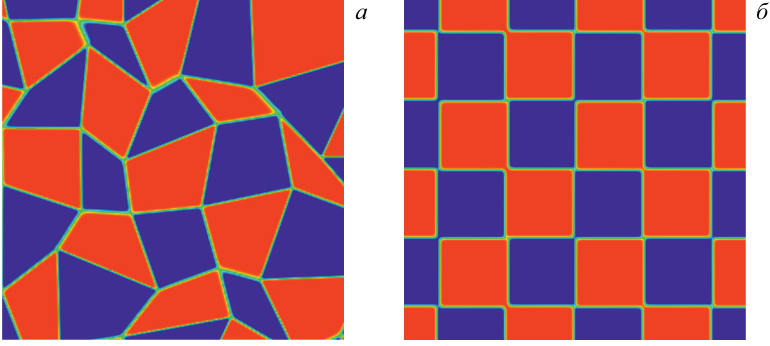


Рис. 13 (цветной в электронной версии). Двумерная проекция плотности топологического заряда  $Q(x)$ : *a*) суперпозиция кинков (11); *б*) идеализированное представление этой суперпозиции. Зеленый (светло-серый) цвет соответствует калибровочному полю с бесконечно малой плотностью топологического заряда. Синий (темно-серый) и красный (серый) цвета соответствуют абелеву самодуальному и антисамодуальному глюонным полям соответственно

где сглаживающая функция  $\xi(a)$ , например

$$\xi(a) = \exp \left\{ -\kappa(a - \bar{a})^2 \right\},$$

введена с целью моделирования отклонения формы доменов от строго гиперкубической. Здесь параметр  $\bar{a}$  задает характерный размер домена. Мера интегрирования  $d\sigma_i$  суммирует всевозможные конфигурации почти однородного поля внутри доменов,

$$\int d\sigma_i = \frac{1}{24} \int_0^\pi d\omega_i \sum_{k=0}^1 \delta(\omega_i - \pi k) \int_0^{2\pi} d\xi_i \sum_{l=0}^5 \delta\left(\xi_i - (2l+1)\frac{\pi}{6}\right).$$

Тензор напряженности для данной конфигурации имеет вид

$$\hat{B}_{\mu\nu}(x) = \sum_{k=1}^N \hat{n}^{(k)} B_{\mu\nu}^{(k)} \chi(x - z_k). \quad (20)$$

Характеристическая функция  $\chi(x - z_k)$  соответствует гиперкубическим доменам. Контур  $\Sigma$  выбирается прямоугольным в плоскости  $(x_3, x_4)$  размером по временной оси  $x_4$ , равным  $T$ , по пространственному измерению —  $L$ .

Рассмотрим случай цветовой группы  $SU(2)$ , для которой  $\hat{n}^{(k)} = \tau_3$ . Вычисление следа цветových матриц дает

$$\frac{1}{2} \text{Tr} \exp \left( i \int_{\Sigma} d\sigma_{\mu\nu}(x) \hat{B}_{\mu\nu}(x) \right) = \cos \left( \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \int_{\Sigma} d\sigma_{\mu\nu}(x) B_{\mu\nu}^{(k)} \chi(x - z_k) \right).$$

Удобно обозначить

$$J_{\mu\nu}(z_k) = \int_{\Sigma} d\sigma_{\mu\nu}(x) \chi(x - z_k).$$

Так как контур петли Вильсона лежит в плоскости  $(x_3, x_4)$ , ненулевые компоненты  $J_{\mu\nu}$  имеют вид

$$J_{34}(z) = -J_{43}(z) = \int_{-L/2}^{L/2} dx_3 \int_{-T/2}^{T/2} dx_4 \chi(x-z).$$

Характеристическая функция  $\chi(x-z)$  в приближении бесконечно тонких доменных стенок в выражении (19):

$$\begin{aligned} \chi(x-z) = & \theta\left(-z_1 + \frac{a}{2}\right) \theta\left(z_1 + \frac{a}{2}\right) \theta\left(-z_2 + \frac{a}{2}\right) \theta\left(z_2 + \frac{a}{2}\right) \times \\ & \times \theta\left(x_3 - z_3 + \frac{a}{2}\right) \theta\left(-x_3 + z_3 + \frac{a}{2}\right) \theta\left(x_4 - z_4 + \frac{a}{2}\right) \theta\left(-x_4 + z_4 + \frac{a}{2}\right). \end{aligned}$$

Тогда

$$B_{\mu\nu} J_{\mu\nu}(z) = 2b_{\text{vac}} J_{34}(z) \cos \omega$$

и

$$\int d\sigma \cos \{b_{\text{vac}} J_{34}(z) \cos \omega\} = \frac{1}{2} \cos \{b_{\text{vac}} J_{34}(z)\}.$$

Петля Вильсона в термодинамическом пределе принимает вид

$$W(L, T) = \lim_{V, N \rightarrow \infty} \left[ \int_V \frac{d^4 z}{V} \int_0^\infty da \xi(a) \cos \{b_{\text{vac}} J_{34}(z)\} \right]^N.$$

Размер контура петли Вильсона должен превышать максимальный размер домена. В связи с этим интегрирование по  $z$  происходит по домену, охваченному контуром петли Вильсона, и по объему вне домена. Интегрирование вне объема дает единицу с учетом нормировки, и мы получаем

$$W(L, T) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ 1 - \frac{T}{N} U(L) \right]^N = e^{-TU(L)},$$

$$\begin{aligned} U(L) = & \frac{1}{a^4 T} \int_0^\infty da \xi(a) \int_{-a/2}^{a/2} dz_1 \int_{-a/2}^{a/2} dz_2 \times \\ & \times \int_{-(L+a)/2}^{(L+a)/2} dz_3 \int_{-(T+a)/2}^{(T+a)/2} dz_4 \sin^2 \left( \frac{b_{\text{vac}}}{2} J_{34}(\{z\}) \right). \end{aligned}$$

Проекция домена, лежащая в плоскости контура петли Вильсона, может как частично пересекать контур, так и быть полностью охваченной им. Таким образом, выполнив необходимые интегрирования, получим для потенциала  $U(L)$  следующее выражение:

$$U(L) = \sigma(\bar{a})L + \text{const}$$

со струнной константой

$$\sigma(\bar{a}) = \int_0^\infty \frac{da}{a^2} \sin^2 \left( \frac{1}{2} a^2 b_{\text{vac}} \right) e^{-\kappa(a-\bar{a})^2},$$



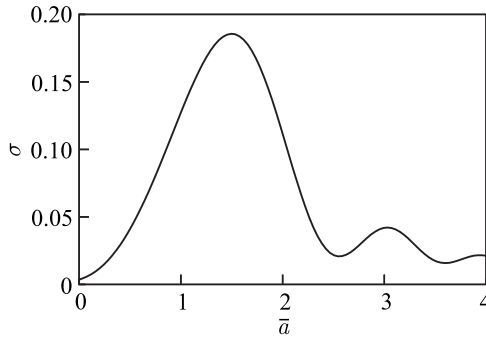


Рис. 14. Зависимость струнной константы  $\sigma$  от характерного размера домена  $\bar{a}$  для  $b_{vac} = 1$ ,  $\kappa = 10$

что демонстрирует выполнение закона площади для петли Вильсона и, следовательно, конфайнмент статических цветных зарядов в фундаментальном представлении. На рис. 14 изображена зависимость струнной константы  $\sigma$  от характерного размера домена  $\bar{a}$  для  $b_{vac} = 1$ ,  $\kappa = 10$ .

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследован ансамбль почти всюду однородных абелевых (анти)самодуальных полей, представленный сетью доменных стенок. Эта статистическая система изучена с помощью аналитических приближенных и численных расчетов.

В аналитическом подходе в приближении невзаимодействующих доменных стенок получена двухточечная корреляционная функция плотности топологического заряда. Для одномерной сети доменных стенок двухточечная корреляционная функция плотности топологического заряда представлена убывающей экспонентой, в то время как в четырехмерной сети корреляционная функция убывает быстрее экспоненты от любой степени. Найдена топологическая восприимчивость сети доменных стенок, которая неограниченно растет при стремлении плотности доменных стенок к нулю, что связано со стремлением в этом пределе корреляционной длины к бесконечности. Показано, что выполняется закон площади для петли Вильсона для гиперкубических доменов, что демонстрирует конфайнмент статических кварков в вакууме КХД. Линейный потенциал  $U(L)$  получен для прямоугольного контура петли Вильсона. Струнная константа имеет максимум при некотором характерном размере домена. Похожая зависимость струнной константы была получена в работе [27], где рассматривалась достаточно грубая модель гиперсферических доменов, а контур петли Вильсона был взят в форме окружности.

С помощью численного моделирования была получена двухточечная корреляционная функция плотности топологического заряда в одномерной сети доменных стенок, которая согласуется с аналитическим расчетом корреляционной функции в приближении невзаимодействующих доменных стенок. В двух и более измерениях происходит вырождение системы в один большой домен, что энергетически выгодно. Основанием для введения ансамбля антисамодуальных доменов послужила работа [18], в которой показано, что квазиулиевые моды могут обеспечивать минимум эффективного потенциала по напряженности поля и размеру области однородности, что означает возможность

формирования устойчивых доменов конечного размера. Моделирование ансамбля анти-самодуальных доменов показало, что происходит кластеризация доменов. Введение потенциала отталкивания между соседними доменами позволило избежать кластеризации, но исследование системы с отталкиванием по схеме Метрополиса–Гастингса стало затруднительным. По этой причине был построен ансамбль антисамодуальных доменов как всевозможные трансляции и повороты системы доменов, имеющей наибольший статистический вес. Для такой системы была получена двухточечная корреляционная функция плотности топологического заряда, в которой прослеживается периодическая структура расположения доменов.

Из изложенного следуют дальнейшие задачи для развития доменной модели. Эффективный лагранжиан типа Гинзбурга–Ландау, который предложен в работе [24, 27], не учитывает эффекты конечного размера области однородности вакуумного поля. Эти эффекты приводят к качественному изменению характера эффективного лагранжиана, и, как замечено в статье [18], могут обеспечить стабилизацию сети доменных стенок по отношению к кластеризации и/или аннигиляции кинков и антикинков.

Численное моделирование системы с модифицированным такими эффектами действием — актуальная задача.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Greensite J.* An Introduction to the Confinement Problem // *Lect. Notes Phys.* 2011. V. 821. P. 1–211.
2. *Belavin A. A., Polyakov A. M., Schwartz A. S., Tyupkin Y. S.* Pseudoparticle Solutions of the Yang–Mills Equations // *Phys. Lett. B.* 1975. V. 59. P. 85–87.
3. *Schäfer T., Shuryak E. V.* Instantons in QCD // *Rev. Mod. Phys.* 1998. V. 70. P. 323–426; arXiv:hep-ph/9610451.
4. *Diakonov D., Petrov V. Yu., Pobylitsa P. V.* The Wilson Loop and Heavy Quark Potential in the Instanton Vacuum // *Phys. Lett. B.* 1989. V. 226. P. 372–376.
5. *Liu Y., Shuryak E., Zahed I.* Confining Dyon–Antidyon Coulomb Liquid Model. I // *Phys. Rev. D.* 2015. V. 92, No. 8. P. 085006; arXiv:1503.03058.
6. *Liu Y., Shuryak E., Zahed I.* Light Quarks in the Screened Dyon–Antidyon Coulomb Liquid Model. II // *Ibid.* P. 085007; arXiv:1503.09148.
7. *Engelhardt M., Langfeld K., Reinhardt H., Tennert O.* Interaction of Confining Vortices in  $SU(2)$  Lattice Gauge Theory // *Phys. Lett. B.* 1998. V. 431. P. 141–146; arXiv:hep-lat/9801030.
8. *Pagels H., Tomboulis E.* Vacuum of the Quantum Yang–Mills Theory and Magnetostatics // *Nucl. Phys. B.* 1978. V. 143. P. 485–502.
9. *Minkowski P.* On the Ground State Expectation Value of the Field Strength Bilinear in Gauge Theories and Constant Classical Fields // *Nucl. Phys. B.* 1981. V. 177. P. 203–217.
10. *Leutwyler H.* Constant Gauge Fields and Their Quantum Fluctuations // *Ibid.* 1981. V. 179. P. 129–170.
11. *Faddeev L. D.* Mass in Quantum Yang–Mills Theory: Comment on a Clay Millenium Problem. arXiv:0911.1013 [math-ph]. 2009.
12. *Leutwyler H.* Vacuum Fluctuations Surrounding Soft Gluon Fields // *Phys. Lett. B.* 1980. V. 96. P. 154–158.

13. *Eichhorn A., Gies H., Pawłowski J. M.* Gluon Condensation and Scaling Exponents for the Propagators in Yang–Mills Theory // *Phys. Rev. D.* 2011. V. 83. P. 045014; Erratum // *Ibid.* P. 069903; arXiv:1010.2153 [hep-ph].
14. *Savvidy G. K.* Infrared Instability of the Vacuum State of Gauge Theories and Asymptotic Freedom // *Phys. Lett. B.* 1977. V. 71. P. 133–134.
15. *Matinyan S. G., Savvidy G. K.* Vacuum Polarization Induced by the Intense Gauge Field // *Nucl. Phys. B.* 1978. V. 134. P. 539–545.
16. *Trottier H. D., Woloshyn R. M.* The Savvidy “Ferromagnetic Vacuum” in Three-Dimensional Lattice Gauge Theory // *Phys. Rev. Lett.* 1993. V. 70. P. 2053–2057; arXiv:hep-lat/9210028.
17. *Milshstein A. I., Pinelis Yu. F.* Properties of the Photon Polarization Operator in a Long Wave Vacuum Field in QCD // *Phys. Lett. B.* 1984. V. 137. P. 235.
18. *Nedelko S. N., Voronin V. E.* Finite Size Effects in the Free Energy Density for Abelian (Anti-)Self-Dual Gluon Field in  $SU(3)$  Gluodynamics. arXiv:1906.00432. 2019.
19. *Leutwyler H., Stern J.* Harmonic Confinement: A Fully Relativistic Approximation to the Meson Spectrum // *Phys. Lett. B.* 1978. V. 73. P. 75–79.
20. *Efimov G. V., Nedelko S. N.* Nambu–Jona-Lasinio Model with the Homogeneous Background Gluon Field // *Phys. Rev. D.* 1995. V. 51. P. 176–189.
21. *Kalloniatis A. C., Nedelko S. N.* Realization of Chiral Symmetry in the Domain Model of QCD // *Phys. Rev. D.* 2004. V. 69. P. 074029; Erratum // *Ibid.* V. 70. P. 119903; arXiv:hep-ph/0311357.
22. *Nedelko S. N., Voronin V. E.* Regge Spectra of Excited Mesons, Harmonic Confinement and QCD Vacuum Structure // *Phys. Rev. D.* 2016. V. 93, No. 9. P. 094010; arXiv:1603.01447.
23. *Nedelko S. N., Voronin V. E.* Influence of Confining Gluon Configurations on the  $P \rightarrow \gamma^* \gamma$  Transition Form Factors // *Phys. Rev. D.* 2017. V. 95, No. 7. P. 074038; arXiv:1612.02621.
24. *Galilo B. V., Nedelko S. N.* Weyl Group, CP and the Kink-Like Field Configurations in the Effective  $SU(3)$  Gauge Theory // *Phys. Part. Nucl. Lett.* 2011. V. 8. P. 67–72; arXiv:1006.0248 [hep-ph].
25. *Nedelko S. N., Voronin V. E.* Domain Wall Network as QCD Vacuum and the Chromomagnetic Trap Formation under Extreme Conditions // *Eur. Phys. J. A.* 2015. V. 51, No. 4. P. 45; arXiv:1403.0415 [hep-ph].
26. *Vachaspati T.* Kinks and Domain Walls: An Introduction to Classical and Quantum Solitons. Cambridge Univ. Press, 2010.
27. *Kalloniatis A. C., Nedelko S. N.* Confinement and Chiral Symmetry Breaking via Domain-Like Structures in the QCD Vacuum // *Phys. Rev. D.* 2001. V. 64. P. 114025; arXiv:hep-ph/0108010.
28. *Yukalov V. I.* Phase Transitions and Heterophase Fluctuations // *Phys. Rep.* 1991. V. 208, No. 6. P. 39–489.
29. *Yukalov V. I.* Mesoscopic Phase Fluctuations: General Phenomenon in Condensed Matter // *Intern. J. Mod. Phys. B.* 2003. V. 17, No. 12. P. 233–2358.
30. *Исаев А., Рубаков В.* Теория групп и симметрий. Конечные группы. Группы и алгебры Ли. М.: Красанд; URSS, 2018. 504 с.
31. *George D. P., Ram A., Thompson J. E., Volkas R. R.* Symmetry Breaking, Subgroup Embeddings and the Weyl Group // *Phys. Rev. D.* 2013. V. 87, No. 10. P. 105009; arXiv:1203.1048 [hep-th].
32. *Nedelko S. N., Voronin V. E.* QCD Vacuum as Domain Wall Network // Proc. of “Quantum Field Theory at the Limits: From Strong Fields to Heavy Quarks (HQ 2016)”, Dubna, July 18–30, 2016. 2017. P. 387–391; arXiv:1612.02678.
33. *Cho Y. M.* Colored Monopoles // *Phys. Rev. Lett.* 1980. V. 44. P. 1115; Erratum // *Ibid.* P. 1566.
34. *Cho Y. M., Kim J. H., Pak D. G.* QCD Effective Action with a Most General Homogeneous Field Background // *Mod. Phys. Lett. A.* 2006. V. 21. P. 2789–2797; arXiv:hep-ph/0701086.

35. *Shabanov S. V.* On a Low Energy Bound in a Class of Chiral Field Theories with Solitons // *J. Math. Phys.* 2002. V. 43. P. 4127–4134; arXiv:hep-th/0202146.
36. *Shabanov S. V.* Geometry of the Physical Phase Space in Quantum Gauge Systems // *Phys. Rep.* 2000. V. 326. P. 1–163; arXiv:hep-th/0002043.
37. *Shabanov S. V., Klauder J. R.* Towards a Nonperturbative Path Integral in Gauge Theories // *Phys. Lett. B.* 1999. V. 456. P. 38–47; arXiv:hep-th/9902017.
38. *Faddeev L. D., Niemi A. J.* Spin-Charge Separation, Conformal Covariance and the  $SU(2)$  Yang–Mills Theory // *Nucl. Phys. B.* 2007. V. 776. P. 38–65; arXiv:hep-th/0608111.
39. *Faddeev L. D., Niemi A. J.* Partial Duality in  $SU(N)$  Yang–Mills Theory // *Phys. Lett. B.* 1999. V. 449. P. 214–218; arXiv:hep-th/9812090.
40. *Kondo K. I., Shinohara T., Murakami T.* Reformulating  $SU(N)$  Yang–Mills Theory Based on Change of Variables // *Prog. Theor. Phys.* 2008. V. 120. P. 1–50; arXiv:0803.0176 [hep-th].
41. *Metropolis N., Rosenbluth A. W., Rosenbluth M. N., Teller A. H., Teller E.* Equation of State Calculations by Fast Computing Machines // *J. Chem. Phys.* 1953. V. 21. P. 1087–1092.
42. *Hastings W. K.* Monte Carlo Sampling Methods Using Markov Chains and Their Applications // *Biometrika.* 1970. V. 57. P. 97–109.
43. *Pannullo L., Lenz J., Wagner M., Wellegehausen B., Wipf A.* Inhomogeneous Phases in the  $(1 + 1)$ -Dimensional Gross–Neveu Model at Finite Number of Fermion Flavors // 11th Intern. Winter Workshop “Excited QCD 2019”, Schladming, Austria, Jan. 30–Feb. 3, 2019; arXiv:1902.11066. 2019.

Получено 29 июля 2019 г.