

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ИСЧЕРПАНИЯ ДОБЫВАЕМЫХ ИСКОПАЕМЫХ РЕСУРСОВ НА ПРИМЕРЕ ПРИРОДНОГО УРАНА

*В. В. Иванов^{а,б,1}, А. В. Крянев^{а,б}, Д. Е. Слива^а, Ю. А. Ульянин^в,
В. В. Харитонов^а*

^а Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва

^б Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

^в АО «Техснабэкспорт», Москва

Данная статья посвящена развитию математических моделей процесса исчерпания добываемых ископаемых ресурсов. Предложена новая математическая модель, позволившая объединить преимущества и избавиться от недостатков предыдущих моделей. В этой модели используется переход темпа роста добычи ископаемого ресурса к стационарному значению. Исходными известными параметрами являются: разведанный остаточный объем ископаемого ресурса, начальный объем добычи ресурса, начальный темп роста добычи ресурса, показатель спада темпа роста добычи. Приведен пример применения предложенной модели прогнозирования добычи и исчерпания для природного урана.

This article is devoted to the further development of mathematical models of the process of exhaustion of extracted mineral resources. A new mathematical model is proposed, which allows combining the advantages and getting rid of the disadvantages of previous models. The model uses the transition of the growth rate of fossil resource extraction to a stationary value. The initial known parameters of the model are: the explored residual volume of the fossil resource, the initial volume of the extraction of the resource, the initial growth rate of the extraction of the resource, the rate of decline in the growth rate of production. An example of the application of the proposed model for forecasting production and exhaustion for natural uranium is given.

PACS: 89.60.Ec

ВВЕДЕНИЕ

В данной статье предлагается и используется математическая модель динамического процесса исчерпания добываемых ископаемых ресурсов. Предложенная модель является модификацией ранее рассматриваемых моделей исчерпания добываемых ископаемых ресурсов [1–5].

¹ E-mail: ivanov@jinr.ru

Впервые математическая модель динамики истощения ограниченного ресурса предложена К. Хаббертом [1]. В этой работе показано, что объем добычи ископаемого ресурса сначала наращивается, затем достигает максимума, а далее уменьшается вплоть до окончательного истощения ресурса. Конкретные примеры применения прогнозной модели К. Хабберта показали общее качественное отражение динамики истощения запасов ресурса, но недостаточные по точности количественные результаты моделирования. Поэтому в МИФИ была разработана и до настоящего времени используется модификация модели К. Хабберта, более адекватно отражающая реальные ситуации добычи ископаемых ресурсов [2–5]. В модифицированной модели, в отличие от модели К. Хабберта, за начало отсчета времени выбирается момент $t = 0$, с которого необходимо сделать прогноз добычи ресурса.

Предлагаемая математическая модель динамического процесса истощения добываемых ископаемых ресурсов является модификацией предложенных ранее моделей. Она учитывает преимущества как модели К. Хабберта, так и ранее разработанной в МИФИ модифицированной модели и обладает по сравнению с ними определенными преимуществами.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ИСТОЩЕНИЯ ДОБЫВАЕМЫХ ИСКОПАЕМЫХ РЕСУРСОВ

Предлагаемая математическая модель динамического процесса истощения добываемых ископаемых ресурсов имеет вид

$$\frac{dG}{dt} = k(t)G(t), \quad G(0) = G_0, \quad (1)$$

где $G(t)$ — объем добываемого ресурса в течение единицы расчетного времени.

Темп добычи ресурса определяется равенством

$$k(t) = -k_\infty + \exp\{-\alpha t\}(k_0 + k_\infty), \quad (2)$$

где $G_0, \alpha, k_0, k_\infty > 0$.

Из равенства (2) следует, что $k(t) \rightarrow -k_\infty < 0$ при $t \rightarrow +\infty$.

Решением задачи Коши (1) является равенство

$$G(t) = G_0 \exp\left(\int_0^t k(\tau) d\tau\right), \quad (3)$$

$$\int_0^\infty G(t) dt = M, \quad (4)$$

где G_0, M, k_0, α — известные исходные параметры модели: G_0 — начальный объем добычи (в год); M — общий оставшийся на дату $t = 0$ разведанный объем ископаемого ресурса; k_0 — начальный темп роста добычи; α — скорость уменьшения темпа роста добычи.

Параметр $-k_\infty$ — конечный темп роста добычи — неизвестен и подлежит определению в процессе решения задачи Коши (1) при условии выполнения балансового соотношения (4).

Согласно равенству (2) максимальное значение добычи G_M достигается при $t = T_M$, для которого выполнено равенство $k(T_M) = 0 = -k_\infty + \exp\{-\alpha T_M\}(k_0 + k_\infty)$, откуда получаем

$$k_\infty = \frac{k_0}{\exp\{\alpha T_M\} - 1}. \quad (5)$$

Ниже представлен алгоритм решения обратной задачи для задачи Коши (1) с неизвестным и подлежащим определению $-k_\infty$ при условии выполнения балансового соотношения (4).

Алгоритм состоит из следующих этапов итерационного процесса.

1. Назначаем начальное приближение $T_M^{(0)}$, согласно (5) находим начальное значение:

$$k_\infty^{(0)} = \frac{k_0}{\exp\{\alpha T_M^{(0)}\} - 1} \quad \text{и} \quad k^{(0)}(t) = -k_\infty^{(0)} + \exp\{-\alpha t\} (k_0 + k_\infty^{(0)}).$$

2. Решаем задачу Коши:

$$\frac{dG^{(0)}}{dt} = k^{(0)}(t)G^{(0)}(t), \quad G^{(0)}(0) = G_0. \quad (6)$$

3. Вычисляем $M^{(0)}$ согласно равенству $M^{(0)} = \int_0^\infty G^{(0)}(t) dt$, используя схему трапеции для численного подсчета интеграла:

$$M^{(0)} = \frac{G_0}{2} \sum_{j=2}^N \left[\exp\left\{-k_\infty^{(0)} j + \frac{k_0 + k_\infty^{(0)}}{\alpha} (1 - \exp\{-j\alpha\})\right\} + \exp\left\{-k_\infty^{(0)}(j-1) + \frac{k_0 + k_\infty^{(0)}}{\alpha} (1 - \exp\{-(j-1)\alpha\})\right\} \right]. \quad (7)$$

Замечание. Можно выбрать $N \approx 100$.

4. Если $M^{(0)} > M$, то уменьшаем $T_M^{(1)}$ по сравнению с $T_M^{(0)}$, полагая

$$T_M^{(1)} = T_M^{(0)} \frac{M}{M_0}. \quad (8)$$

5. Если $M^{(0)} < M$, то увеличиваем $T_M^{(0)}$, также полагая

$$T_M^{(1)} = T_M^{(0)} \frac{M}{M_0}. \quad (9)$$

6. Затем подсчитываем новое значение $k_\infty^{(1)} = \frac{k_0}{\exp\{\alpha T_M^{(1)}\} - 1}$ и $k^{(1)}(t) = -k_\infty^{(1)} + \exp\{-\alpha t\} (k_0 + k_\infty^{(1)})$ и повторяем процесс (п. 2–5) с заменой $k_\infty^{(0)}$ и $k^{(0)}(t)$ на $k_\infty^{(1)}$ и $k^{(1)}(t)$ соответственно.

7. На следующем шаге итерационного процесса аналогично определяются $k_{\infty}^{(2)}$ и $k^{(2)}(t)$.

Итерационный процесс продолжается L шагов, пока не будет выполнено неравенство по точности решения рассматриваемой задачи, например будет выполнено неравенство

$$\left| 1 - \frac{M^{(L)}}{M} \right| \leq 10^{-3}. \quad (10)$$

Для $t = j = 1, 2, \dots, L$ вычисляем $G(t)$ согласно равенствам

$$G(t) = G(j) = G_0 \exp \left\{ -k_{\infty}^{(L)} j + \frac{k_0 + k_{\infty}^{(L)}}{\alpha} (1 - \exp \{-j\alpha\}) \right\}. \quad (11)$$

Значение T_M , при котором достигается максимальный объем добычи $G_M = G(T_M)$, определяется из неравенств

$$G(T_M) \geq G(T_M - 1), G(T_M + 1). \quad (12)$$

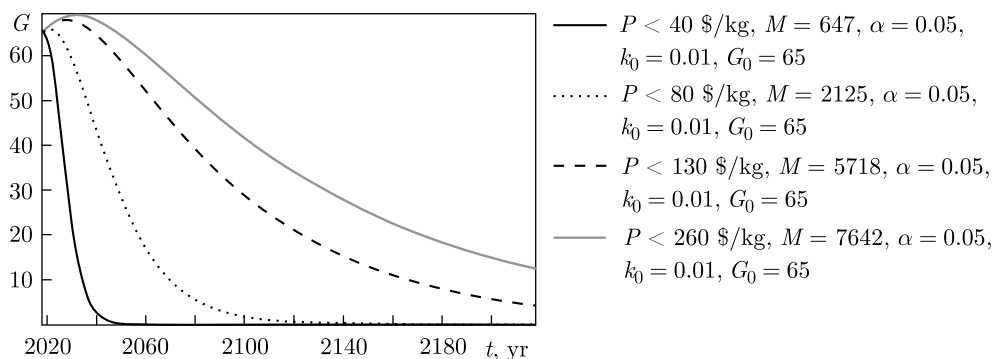


Рис. 1. Динамика уровня добычи природного урана для разных значений разведанных запасов по себестоимости его добычи до 2200 г.

Применим предлагаемую нами модель для исследования динамики добычи и исчерпания природных запасов урана с различной себестоимостью.

К настоящему времени известны следующие разведанные объемы урана в зависимости от себестоимости его добычи: 647 кт по себестоимости меньше 40 \$/кг; 2125 кт по себестоимости меньше 80 \$/кг; 5718 кт по себестоимости меньше 130 \$/кг; 7642 кт по себестоимости меньше 260 \$/кг [11].

На рис. 1 представлена для сравнения динамика объема добычи урана в зависимости от себестоимости в условиях одинакового темпа добычи.

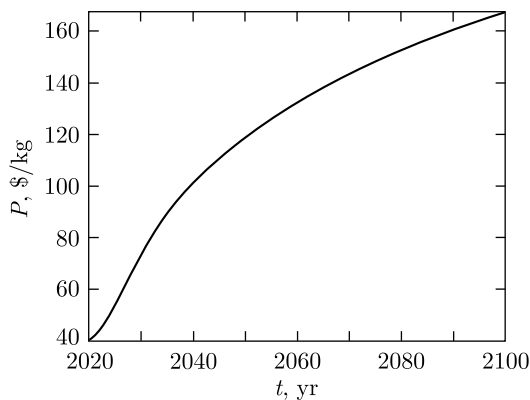


Рис. 2. Прогноз динамики роста цены на природный уран до 2100 г.

Поскольку временное изменение интенсивности добычи природного урана с разными значениями себестоимости будет существенно зависеть от изменения во времени рыночной стоимости добытого природного урана, на рис. 2 приведен прогноз динамики роста его цены вплоть до 2100 г. Прогноз основан с учетом развития атомной энергетики, а также мировой потребности в электроэнергии [11].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложена схема математического моделирования процесса добычи и истощения ископаемых ресурсов. Она основана на решении обратной задачи для задачи Коши динамики объема добычи ископаемого с неизвестным и подлежащим определению $-k_\infty$ — асимптотически конечного уровня темпа добычи при условии выполнения балансового соотношения относительно разведанного общего объема ископаемого ресурса (см. (4)). Приведен пример численных расчетов динамики мировой добычи и истощения такого энергетически важного ресурса, как природный уран. Учитывается дифференциация разведанных запасов природного урана по себестоимости его добычи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. King H. M. Nuclear Energy and the Fossil Fuels. Am. Petrol. Inst. Publication No. 95. Shell Development Comp. 1956. P. 1–40; <http://www.hubbertpeak.com/hubbert/1956/1956.pdf>.
2. Харитонов В. В. Динамика добычи ограниченного ресурса // Экспертъ: Научно-аналит. журн. 2012. № 2. С. 3–12.
3. Харитонов В. В., Кабашев К. В. Аналитическая модель динамики добычи металлов // Цвет. металлы. 2012. № 10. С. 20–24.
4. Ульянин Ю. А., Харитонов В. В., Юришина Д. Ю. Перспективы ядерной энергетики в условиях истощения традиционных энергетических ресурсов // Вестн. НИЯУ МИФИ. 2017. № 4. С. 5–16.
5. Харитонов В. В., Кабашев К. В., Маликов Р. Р. Долгосрочные тренды истощения традиционных энергетических ресурсов и перспективы ядерной энергетики. М.: НИЯУ МИФИ, 2016. 96 с.
6. Sverdrup H. U., Koca D., Ragnarsdóttir K. V. Peak Metals, Minerals, Energy, Wealth, Food and Population; Urgent Policy Considerations for a Sustainable Society // J. Environ. Sci. Engin. B. 2012. V. 1, No. 5. P. 499–533.
7. Uranium 2016: Resources, Production and Demand: A Joint Report by the Nuclear Energy Agency and the International Atomic Energy Agency. OECD, 2016. 550 p.
8. Живов В. Л., Бойцов А. В., Шумилин М. В. Уран: геология, добыча, экономика. М.: РИС «ВИМС», 2012. 304 с.
9. Тарханов А. В. Современные тенденции развития мировой и российской урановой промышленности. 2007–2012 гг. М.: ВИМС, 2012.
10. Mudd G. M. Radon Releases from Australian Uranium Mining and Milling Projects: Assessing the UNSCEAR Approach // J. Environ. Radioactivity. 2008. V. 99. P. 288–315.
11. NEA/IAEA (2016). Uranium 2016: Resources, Production and Demand. Paris: OECD Publ., 2016; <https://doi.org/10.1787/uranium-2016-en>.