Письма в ЭЧАЯ. 2020. Т. 17, № 3(228). С. 271–275

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА. ТЕОРИЯ

ДИНАМИКА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЗАРЯДОВ В САМОСОГЛАСОВАННОМ ПОЛЕ В СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНОЙ СИСТЕМЕ

А. С. Чихачев

Всероссийский электротехнический институт — филиал ФГУП «Российский федеральный ядерный центр — Всероссийский научно-исследовательский институт технической физики им. Е. И. Забабахина», Москва

В работе изучается поведение сферически-симметричного однокомпонентного плотного облака заряженных частиц, находящихся под воздействием собственного поля. Использовано кинетическое описание, основанное на «интеграле Мещерского». Изучены движения частиц при растущей и убывающей характеристической функции $\xi(t)$.

The work studies the behavior of a spherical symmetric single-component dense cloud of charged particles under the influence of the self-field. A kinetic description based on the “Meschersky integral” has been used. Particle movements have been studied with the growing and decreasing characteristic function $\xi(t)$.

PACS: 41.85

ВВЕДЕНИЕ

Описание динамики нестационарного однокомпонентного ансамбля заряженных частиц является достаточно сложной задачей, см., например, работу [1], изучающую поведение кольцевого электронного пучка в магнитном поле. В этой работе функция распределения бесстолкновительной системы берется как функция интегралов движения — момента относительно продольной оси и билинейного инварианта, полученного при решении линеаризованного уравнения колебаний относительно оси пучка — по существу интеграла Капчинского–Владимирского. Определенный выбор функции распределения позволяет получить постоянную плотность частиц внутри пучка и решить самосогласованные уравнения для компонент потенциала.

В данной работе рассмотрено поведение сферически-симметричного сгустка. При этом для описания радиального движения не будет использован интеграл Капчинского–Владимирского, как это сделано в работе [2], а будет предложен другой подход, связанный с «интегралом Мещерского» (см. [3, 4]). Рассмотрены два типа движения частиц в зависимости от характера движения.

1. ДВИЖЕНИЕ ОТ ЦЕНТРА СИСТЕМЫ ПРИ РАСТУЩЕЙ ЗАВИСИМОСТИ $\xi(t)$

Перейдем от гамильтониана H к инварианту I («интегралу Мещерского»), сохраняющемуся при определенной зависимости потенциальной функции от $\mathbf{r}$ и t. Гамильтониан изучаемой сферически-симметричной системы имеет вид

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{L}{2mr^2} + \frac{1}{\xi^2(t)} U\left(\frac{r}{\xi(t)}\right).$$

Здесь $p_r = m\dot{r}$, r — расстояние от центра системы; L — квадрат полного момента количества движения. Используя выражение гамильтониана, можно получить выражение для инварианта:

$$I = \frac{m}{2}(\dot{r}\xi - r\dot{\xi})^2 + U\left(\frac{r}{\xi(t)}\right) + \frac{\lambda m}{2}\frac{r^2}{\xi^2} + \frac{L}{2m}\frac{\xi^2}{r^2}, \tag{1}$$

где $\ddot{\xi} = \lambda/\xi^3$, λ — константа. В этих равенствах точка означает производную по t. Удобно далее перейти к новым переменным. Положим $\rho = r/\xi(t)$, $\tau = \int dt'/\xi(t')^2$. Тогда выражение (1) принимает вид

$$I = \frac{m}{2}\left(\frac{d}{d\tau}\rho\right)^2 + U(\rho) + \lambda\frac{m}{2}\rho^2 + \frac{L}{2m\rho^2}.$$

Можно построить интеграл J_I^+, сопряженный с I. Положим:

$$J_I^+ = -\tau + \int\limits_0^\rho \frac{d\rho'\sigma\left(\frac{2}{m}(I - U(\rho')) - \lambda\rho'^2 - \frac{L}{m\rho'^2}\right)}{\sqrt{\frac{2}{m}(I - U(\rho')) - \lambda\rho'^2 - \frac{L}{m\rho'^2}}} + \text{const},$$

где $\sigma(x)$ — функция Хевисайда. Выполнение равенства $dJ_i^+/d\tau = 0$ является очевидным, если все частицы движутся в положительном направлении r. Далее будем считать, что имеются только частицы, описываемые интегралом J_I^+. Плотность частиц выражается интегралом в фазовом пространстве:

$$n = \int d\mathbf{q}\, f(I, J_I^+, L). \tag{2}$$

Элемент фазового пространства представим в виде

$$d\mathbf{q} = dq_r\, dq_\theta\, dq_\phi, \quad dq_\phi = \frac{dM_\phi}{r\sin\theta},$$

$$dq_r = \frac{dI}{\xi\sqrt{\frac{2}{m}(I - U) - \lambda\frac{r^2}{\xi^2} - \frac{L\xi^2}{m^2r^2}}}, \quad dq_\theta = \frac{dL}{2r\sqrt{L - \frac{M_\phi^2}{\sin^2\theta}}}.$$

Усреднение по M_ϕ приводит к выражению

$$n = \frac{\pi}{2r^2}\int \frac{dIdLf(I,L,J_I^+)}{\xi\sqrt{\dfrac{2}{m}(I-U) - \lambda\dfrac{r^2}{\xi^2} - \dfrac{L\xi^2}{m^2r^2}}}.$$

При этом плотность тока j_r имеет вид ($\dot{r}$ может быть выражено через I из (2))

$$j_r = \frac{\pi}{2r^2\xi}\frac{\dot{\xi}r}{\xi}\int \frac{f dI\,dL}{\sqrt{\dfrac{2}{m}(I-U) - \lambda\dfrac{r^2}{\xi^2} - \dfrac{L}{m^2}\dfrac{\xi^2}{r^2}}} + \frac{\pi}{2r^2\xi^2}\int f dI\,dL.$$

В переменных ρ,τ уравнение Пуассона запишется как

$$\frac{1}{\xi^4(t)}\frac{1}{\rho^2}\frac{d}{d\rho}\rho^2\frac{dU}{d\rho} = -\frac{4\pi e^2}{\xi^3(t)\rho^2}\int \frac{dI\,dL\,f(I,L,J_I^+)}{\sqrt{\dfrac{2}{m}(I-U(\rho)) - \lambda\rho^2 - \dfrac{L}{m^2\rho^2}}}. \tag{3}$$

Для того чтобы обе части равенства (3) одинаковым образом зависели от ξ, функция распределения должна содержать множитель, экспоненциально зависящий от J_I^+. Положим $f = \kappa_*\delta(I-I_0)\,\delta(L-L_0)\exp\{(1/2\tau_0)J_I^+\}$. Если выполнено условие $\xi\exp(-\tau/2\tau_0) \equiv \xi_0$, то в уравнение Пуассона в качестве независимой переменной входит только ρ. Таким образом, $\xi(t) = \sqrt{t/\tau_0 + \xi_0^2}$, $\lambda = -1/(4\tau_0^2)$. Обозначим далее

$$v_0^2 = \frac{2I_0}{m}, \quad s = \frac{\rho}{2\tau_0 v_0}, \quad y = \frac{2U}{mv_0^2}, \quad l = \frac{L_0}{4m^2\tau_0^2 v_0^4},$$

$$u(s) = \int\limits_0^s \frac{ds'\sigma(1-y(s')+s'^2-l/s'^2)}{\sqrt{1-y(s')+s'^2-l/s'^2}}.$$

Тогда из уравнения Пуассона следует

$$\frac{d}{ds}s^2\frac{d}{ds}y(s) = -\theta u' \mathrm{e}^{u(s)}, \quad u'(s) = \frac{\sigma(1-y(s)+s^2-l/s^2)}{\sqrt{1-y(s)+s^2-l/s^2}}. \tag{4}$$

Константа θ определяется параметрами задачи — κ_*, m, v_0, τ_0 и зарядом e: $\theta = \dfrac{8\pi e^2\kappa_*}{mv_0^3}\xi_0$. Если использовать равенство $y' = -\theta/s^2\exp(u(s)) + C_0/s^2$, система (4) может быть записана в виде одного уравнения:

$$\frac{d}{ds}s^2\frac{dy(s)}{ds} = -\frac{C_0 - s^2y'(s)}{\sqrt{1-y(s)+s^2-l/s^2}}\sigma(1-y(s)+s'^2-l/s^2). \tag{5}$$

Плотность частиц может быть записана как

$$n = n_1\frac{C_0/s^2 - y'}{\xi^4\sqrt{1-y(s)+s^2-l/s^2}}\sigma(1-y(s)+s^2-l/s^2) = a(s)\frac{n_1}{\xi^4},$$

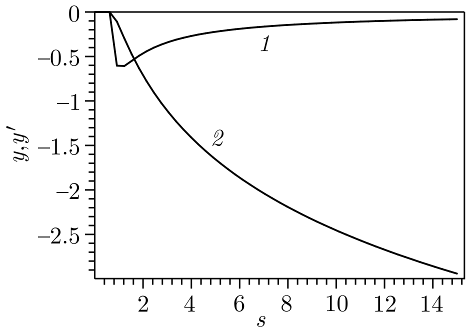

Рис. 1

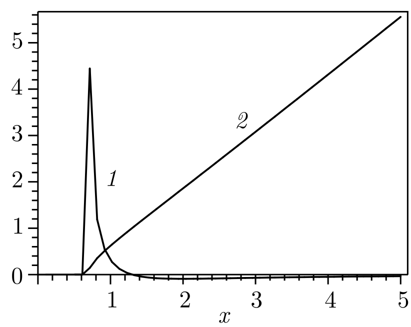

Рис. 2

а плотность тока:

$$j_r = n_1 \upsilon_0 \left(\frac{s}{\sqrt{1 - y(s) + s^2 - 1/s^2}} + 1 \right) \sigma(1 - y(s) + s^2 - l/s^2) \frac{C_0/s^2 - y'}{\xi^5} = b(s) \frac{n_1 \upsilon_0}{\xi^5},$$

где $n_1 = m/(32\pi e^2 \tau_0^2 \xi_0)$. Плотность частиц и плотность тока также могут быть записаны в виде

$$n = \frac{\pi\kappa_*}{2\upsilon_0} \frac{u' \mathrm{e}^u}{r^2 \xi^2}, \quad j_r = \frac{\pi\kappa_*}{4\upsilon_0 \tau_0} \frac{r u' \mathrm{e}^u}{r^2 \xi^4} + \frac{\pi\kappa_*}{2} \frac{\mathrm{e}^u}{r^2 \xi^3}.$$

Эти выражения удовлетворяют уравнению непрерывности. Определим далее граничные условия для уравнения (5). Так как $1 - y + s^2 - k/s^2 > 0$, будем считать, что нулевые условия для потенциала и поля заданы в точке $s = s_0$, определяемой из равенства $1 + s_0^2 - l/s_0^2 = 0$. Например, при $l = 0{,}44$ $s_0 = \sqrt{0{,}1}$.

На рис. 1 приведены решения для потенциала $y(s)$ и поля $y'(s)$ при $y(0) = y'(0) = 0$, $C_0 = 1$. Из-за того что $L \neq 0$, плотность вблизи начала координат равна нулю. При больших значениях координаты s плотность убывает, однако полное число частиц в области, ограниченной некоторым значением s, неограниченно растет с ростом этого значения. На рис. 2 приведены плотность заряда (*1*) и полный заряд в сфере радиуса s (*2*). Вследствие медленного убывания плотности полный заряд внутри сферы является растущей функцией. Отметим, что при любых значениях ρ плотность обращается в нуль при больших временах — из-за роста ξ растет размер области с нулевой плотностью.

2. ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯДОВ ПРИ УБЫВАЮЩЕЙ $\xi(t)$

В этом случае достаточно заменить знак τ_0 в выражении для $\xi(t)$: $\xi(t) = \sqrt{\xi_0^2 - t/\tau_0}$. Уравнение (5) изменяется следующим образом:

$$\frac{d}{ds} s^2 \frac{dy(s)}{ds} = -\frac{C_0 + s^2 y'(s)}{\sqrt{1 - y(s) + s^2 - l/s^2}} \sigma(1 - y(s) + s'^2 - l/s^2). \tag{6}$$

Результаты решения (6) изображены на рис. 3 и 4.

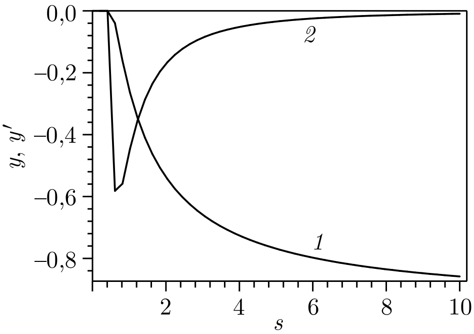

Рис. 3

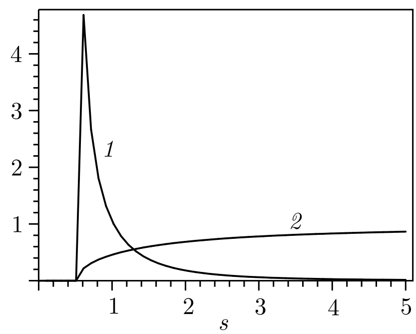

Рис. 4

На рис. 3 показано поведение потенциала (*1*) и поля (*2*) как функций s при нулевых начальных условиях, а на рис. 4 — зависимости плотности (*1*) и полного заряда внутри сферы с заданным радиусом (*2*). Существенно отметить, что в этом случае полный заряд внутри сферы радиуса s остается постоянным при росте s. При этом вследствие убывания ξ при больших значениях ρ плотность оказывается постоянной. Движение от центра системы изучалось также в работе [4].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе изучены самосогласованные решения для потенциала сферического сгустка зарядов, взаимодействующих с собственным полем.

Приведены результаты численных решений для плотности и потенциала как функций автомодельной переменной s.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ярковой О. И.* Нестационарная самосогласованная модель азимутально-однородного кольца заряженных частиц во внешнем электромагнитном поле // ЖТФ. 1966. Т. 36, № 9. С. 988.
2. *Чихачев А. С.* Нестационарная самосогласованная модель эллипсоидального сгустка заряженных частиц // ЖТФ. 1984. Т. 54, № 9. С. 1694.
3. *Mestschersky J.* Über die Integration der Bewegungsgleichungen im Probleme zweier Körper von verändlicher Masse // Astron. Nachr. 1902. V. 159. P. 229.
4. *Чихачев А. С.* Нестационарная самосогласованная модель ансамбля в собственном поле // ЖТФ. 2014. Т. 84, № 4. С. 19.

Получено 5 декабря 2019 г.