

## ВОЛНЫ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА В ЭЛЕКТРОННОМ ПУЧКЕ СИСТЕМЫ ЭЛЕКТРОННОГО ОХЛАЖДЕНИЯ БУСТЕРА NICA

*М. И. Брызгунов, В. В. Пархомчук, В. Б. Рева*<sup>1</sup>

Институт ядерной физики им. Г. И. Будкера, Новосибирск, Россия

Электростатические датчики положения пучка (пикап-станции) дают один из основных методов получения информации о свойствах электронного пучка в системах электронного охлаждения (СЭО). В случае низкой энергии электронов пространственный заряд пучка может оказывать существенное влияние на интерпретацию получаемых экспериментальных данных. Работа посвящена экспериментальному исследованию изменений амплитуды суммового сигнала, наводимого на пикап-станциях, которые могут быть связаны с образованием волн пространственного заряда, возникающих вдоль электронного пучка. Волны пространственного заряда возбуждаются с помощью подачи переменного напряжения на прикатодный (управляющий) электрод.

Electrostatic beam position monitors (pickup stations) represent one of the main methods for obtaining information on the properties of an electron beam in electron cooling systems (ECS). In the case of low electron energies, the space charge of the beam can have a significant effect on the interpretation of the obtained experimental data. This paper is devoted to an experimental study of changes in the amplitude of the sum signal induced at pickup stations, which can be associated with the formation of space charge waves arising along the electron beam. Space charge waves are excited by applying an alternating voltage to the cathode (control) electrode.

PACS: 29.20.-c; 29.25.Bx; 29.27.-a

### ВВЕДЕНИЕ

Метод электронного охлаждения основан на кулоновском взаимодействии электронов и ионов, движущихся совместно на некотором прямолинейном участке траектории циклического ускорителя с одинаковыми средними скоростями  $u_0$ . В этом случае в сопутствующей системе отсчета «горячий» газ ионов находится в «холодном» электронном газе, что ведет к охлаждению «горячей» компоненты этой смеси. Низкая температура электронного газа достигается за счет его постоянного обновления на участке охлаждения из источника с последующим поглощением в коллекторе. Горячие ионы многократно проходят область взаимодействия, постепенно уменьшая

---

<sup>1</sup>E-mail: V.B.Reva@inp.nsk.su

свою температуру до минимальных значений. Для поперечного удержания электронов на участке охлаждения и участках транспортировки от источника к коллектору используется сильное продольное магнитное поле [1, 2].

Система электронного охлаждения бустера NICA [3, 4] предназначена для накопления пучка ионов при инжекции и для его охлаждения после ускорения до некоторой промежуточной энергии. Данная система разработана и испытана в ИЯФ СО РАН [5] и в настоящее время введена в действие на бустере. Максимальная энергия электронного пучка в ней составляет 60 кэВ, что соответствует энергии ионов 110 МэВ/нуклон. На энергии инжекции (3,2 МэВ/нуклон) оптимальное значение энергии электронов составляет 1,74 кэВ.

### ОПИСАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

Для эффективного действия электронного охлаждения необходимо точное совмещение обоих пучков — электронного и ионного, на участке охлаждения. Для измерения их поперечных координат используются пикап-станции, способные одновременно измерять положение обоих пучков. Для сгруппированного ионного пучка его плотность модулирована ВЧ-системой. В электронном пучке модуляция тока осуществляется подачей переменного сигнала на управляющий электрод источника. Величина модуляции тока много меньше полного тока электронного пучка. Для возможности одновременного измерения пространственного положения пучков частоты модуляции разносят на достаточную величину для эффективного отделения одного сигнала от другого. В системе электронного охлаждения (СЭО) бустера [5, 6] используются 4 пикап-станции, каждая из которых состоит из четырех электростатических пластин. Станции расположены вдоль траектории электронов следующим образом: одна около источника электронов (пушки), две на краях секции охлаждения и одна в области коллектора. Это позволяет получить дополнительную информацию о динамике электронного пучка вдоль всей установки, а не только в секции охлаждения. Основные параметры системы электронного охлаждения приведены в таблице.

Время пролета электроном участка модуляции около катода (прикатодный секционированный электрод) [7] может быть оценено как 1 нс, поэтому при низкой

#### Основные параметры СЭО бустера NICA

Параметр	Значение
Тип ионов	От $p^+$ до $^{197}\text{Au}^{31+}$
Энергия электронов $E_e$ , кэВ	1,5–50,0
Ток электронов $I_e$ , А	0,2–1,0
Радиус электронного пучка в секции охлаждения $a_e$ , см	1
Радиус вакуумной камеры $b$ , см	7,5
Продольное магнитное поле $B$ , кГс	1–2
Давление остаточного газа $p$ , мбар	$1 \cdot 10^{-11}$
Стабильность энергии $\Delta E/E$	$1 \cdot 10^{-5}$
Стабильность тока $\Delta I_e/I_e$	$1 \cdot 10^{-4}$

частоте модуляции (3 МГц) процесс можно рассматривать как квазистатический, и модуляция тока происходит без изменения энергии, которая определяется полным ускоряющим напряжением. Возникшее возмущение плотности при дальнейшем движении вдоль траектории пучка превращается в две волны, разбегающиеся в противоположные стороны в системе отсчета пучка. В случае высокой энергии электронного пучка или малого значения тока пространственный заряд пучка мал, и можно считать, что за время пролета от источника до коллектора электроны не успевают переместиться в продольном направлении под действием электрического поля продольной модуляции плотности. Тогда возмущение плотности с частотой  $\omega$  движется со скоростью электронов  $u_0$  и имеет в лабораторной системе продольную компоненту волнового вектора  $k_s = \omega/u_0$ , а локальным взаимодействием электронов можно пренебречь. Но при низкой энергии в достаточно интенсивном пучке пространственный заряд начинает оказывать существенное влияние на величину наблюдаемой модуляции плотности. За счет распространения волн пространственного заряда возмущение плотности электронов успевает перераспределиться за время пролета от источника до коллектора.

При энергии электронов 5 кэВ и токе 50 мА наблюдалось близкое к ожидаемому поведение сигнала, амплитуда которого слабо менялась вдоль траектории пучка. Считая, что для высокой энергии пространственный заряд несуществен, сигнал с пикап-станций в этом эксперименте использовался для нормировки сигналов при низкой энергии. При малом значении энергии электронного пучка 1,74 кэВ было обнаружено сильное уменьшение величины сигналов на дальних (от электронной пушки) пикап-станциях (рис. 1). При токе 440 мА наблюдается минимальное значение сигнала на 3-й станции (см. рис. 1) и сильное возрастание, практически до начального значения, на 4-й станции. Наиболее вероятной причиной этого может являться интерференция волн пространственного заряда, распространяющихся вдоль электронного пучка. Из-за сильного продольного магнитного поля движение электронов можно считать одномерным. Кроме того, электронный пучок имеет очень низкую продольную температуру, которая не оказывает влияния на динамику продольных волн. Впервые это исследовалось в работе [8] в связи с экспериментами по изучению предельных возможностей электронного охлаждения на установке МОСОЛ [9], где изучалось распространение волн в электронном пучке, компенсированном ионами.

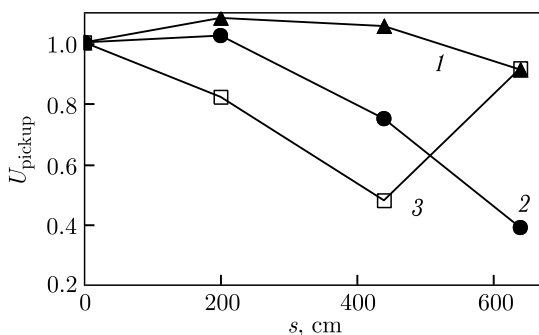


Рис. 1. Нормированные значения величины суммового сигнала вдоль оси электронного пучка СЭО при разных токах электронного пучка: 42 (1), 167 (2), 440 мА (3). Сигнал нормирован на амплитуду сигнала в первой пикап-станции. Энергия электронов 1,74 кэВ. Для относительной калибровки между различными пикап-станциями использовались амплитуды сигналов при энергии электронов 5 кэВ, когда волнами пространственного заряда можно пренебречь. Увеличение сигнала в 4-й пикап-станции по сравнению с 3-й может быть связано с интерференцией двух волн пространственного заряда

Аналогичные эффекты, связанные с волнами пространственного заряда, наблюдались и в холодном протонном пучке НАП-М [10, 11]. Сильное охлаждение протонного пучка приводило к расщеплению спектра классического теплового шума (шум Шоттки) в двухпиковый спектр, отражающий появление двух волн пространственного заряда, бегущих вдоль и против движения протонного пучка. Из-за большой массы протонов эти волны имели малые скорости вдоль пучка, и только после электронного охлаждения их удалось впервые увидеть. В отличие от циркулирующего ионного пучка в однопролетном электронном пучке источник модуляции электронного тока неподвижен относительно пикап-станций, частота колебаний одинакова для прямой и обратной волн, и эффект проявляется в пространственной интерференции волн. Равенство частот следует из граничных условий в месте возбуждения колебаний в произвольный момент времени, по аналогии с задачами отражения и преломления волн. Записывая исходное возмущение плотности  $\delta n_{z=0}$  в виде суперпозиции двух волн, распространяющихся вдоль и против потока

$$n'_{z=0} = \delta n_+ \exp(-i\omega_+ t) + \delta n_- \exp(-i\omega_- t) = \delta n_0 \exp(-i\omega t),$$

получаем, что его можно выполнить в произвольный момент времени только в случае

$$\omega_+ = \omega_- = \omega.$$

## АНАЛИЗ АЗИМУТАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Наиболее простым случаем для анализа распространения волн является случай азимутально-симметричного возмущения с радиально однородным возмущением плотности. В этом случае можно воспользоваться длинноволновым приближением продольного поля, как, например, это сделано в [12]. При этом считается, что плотность заряда слабо меняется вдоль пучка, поэтому можно локально пользоваться приближением постоянной линейной плотности для нахождения радиального электрического поля. В случае небольшой энергии электронов (1,74 кэВ), когда скорость частиц  $u_0 \ll c$ , влиянием изменения магнитного поля пучка при модуляции тока пучка можно пренебречь. Тогда, приравнявая нулю циркуляцию электрического поля вдоль замкнутого контура, проходящего вдоль оси пучка, двух радиальных отрезков от оси пучка до стенок вакуумной камеры и вдоль поверхности вакуумной камеры,

$$E_z(s) \delta s + \pi e a_e^2 \left( 1 + 2 \ln \left( \frac{b}{a_e} \right) \right) (n'(s + \delta s) - n'(s)) = 0,$$

можно оценить продольное электрическое поле в нерелятивистском приближении как

$$E_s(s) = -\pi e a_e^2 \left( 1 + 2 \ln \left( \frac{b}{a_e} \right) \right) \frac{\partial n'(s)}{\partial s}. \quad (1)$$

Подставляя это выражение в уравнение движения «замагниченных» электронов (2) (движущихся строго вдоль силовых линий магнитного поля)

$$m \left( \frac{\partial v_s}{\partial t} + u_0 \frac{\partial v_s}{\partial s} \right) = e E_s \quad (2)$$

и добавив к нему уравнение непрерывности (3)

$$\frac{\partial n'}{\partial t} + n_0 \frac{\partial v_s}{\partial s} + u_0 \frac{\partial n'}{\partial s} = 0, \quad (3)$$

получаем дисперсионное уравнение продольных колебаний в виде

$$(\omega - k_s u_0)^2 = \pi e n_0 a_e^2 \left( 1 + 2 \ln \left( \frac{b}{a_e} \right) \right) k_s^2 = k_s^2 a_e^2 \frac{\omega_p^2}{2} \left( \ln \left( \frac{b}{a_e} \right) + \frac{1}{2} \right). \quad (4)$$

Здесь  $b$  — радиус вакуумной камеры;  $a_e$  — радиус электронного пучка;  $n_0$  — постоянная равновесная плотность электронов;  $n'$  — изменение плотности в волне или возмущение;  $m_e$  — масса электрона и  $\omega_p^2 = 4\pi n_0 e^2 / m_e$  — плазменная частота электронов пучка.

Более строгий подход к выводу дисперсионных соотношений изложен в приложении на основе точного решения линеаризованных уравнений гидродинамики в сильном продольном магнитном поле и уравнения Пуассона. Из него видно, что в длинноволновом приближении для азимутально-симметричной моды закон дисперсии можно записать в виде

$$-\frac{1}{\ln(b/a_e)} = -\frac{T^2 a_e^2}{2}, \quad \text{где } T^2 = k_s^2 \frac{\omega_p^2}{(\omega - k_s u_0)^2} \quad (5)$$

или

$$(\omega - k_s u_0)^2 = \frac{1}{2} k_s^2 a_e^2 \omega_p^2 \ln \left( \frac{b}{a_e} \right) \equiv k_s^2 c_s^2, \quad (6)$$

что с хорошей точностью совпадает с уравнением (4). Таким образом, без учета локального взаимодействия частиц  $c_s = 0$  получаем «закон дисперсии»  $k_s = \omega / u_0$ . В случае конечного значения тока возмущение, вызванное его модуляцией прикатодным электродом, распадается на суперпозицию двух волн, распространяющихся вместе с пучком. А из формулы (6)  $\omega_{1,2} = k_s (u_0 \pm c_s)$  следует, что фазовая скорость возмущения равна

$$u_\varphi = \frac{\omega_{1/2}}{k_s} = u_0 \pm c_s.$$

Для анализа применимости длинноволнового приближения оценим численно продольную компоненту волнового вектора при типичных параметрах работы СЭО на энергии инжекции: энергия электронов  $E_e = 1,74$  кэВ, ток электронного пучка  $I_e = 300$  мА, радиус пучка и вакуумной камеры  $a_e = 1$  и  $b = 7,5$  см соответственно, частота модуляции 3 МГц. Тогда величина собственной скорости волны пространственного заряда равна  $c_s \approx 8,8 \cdot 10^8$  см/с, а продольные компоненты волновых векторов для колебаний, распространяющихся вдоль и против потока,  $k_+ \approx 5,6 \cdot 10^{-3}$  см<sup>-1</sup>,  $k_- \approx 1,2 \cdot 10^{-2}$  см<sup>-1</sup>, что вполне достаточно для выполнения условий  $k_s b, k_s a_e \ll 1$ . Но с требованием  $T a_e \ll 1$  возникает проблема, так как согласно уравнению (5)  $T a_e \approx 1,0$ . Несмотря на это, выражение (6) остается достаточно хорошей оценкой, так как второй член в разложении

$$T a_e \frac{J'_0(T a_e)}{J_0(T a_e)} \approx -\frac{(T a_e)^2}{2} - \frac{(T a_e)^4}{16}$$

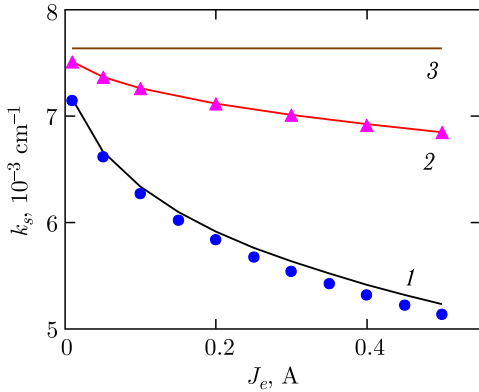


Рис. 2. Зависимость продольной компоненты волнового вектора волны, распространяющейся вдоль потока ( $k_+$ ), от тока пучка. Сплошные кривые 1 и 2 соответствуют величинам для основной  $\mu_0 = 0,95$  и первой радиальной моды с  $\mu_1 = 3,97$ , вычисленным по формуле (8). Отдельными точками показаны результаты расчетов по формуле (16). Прямая 3 соответствует «закону дисперсии» частиц без учета локального взаимодействия  $k_s = \omega/u_0$

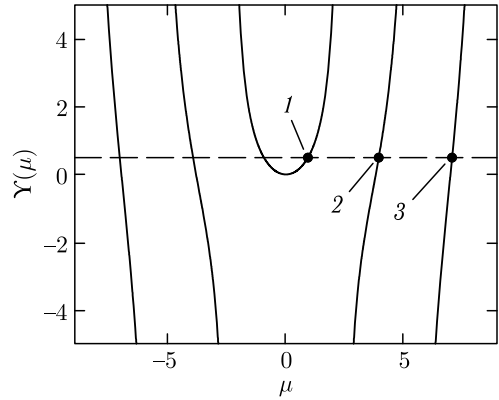


Рис. 3. Графическое решение уравнения (7). Точка 1 соответствует основной радиальной моде  $\mu_0 = 0,95$ , точки 2 и 3 — последующим решениям данного уравнения  $\mu_1$  и  $\mu_2$

существенно меньше первого даже при  $Ta_e \approx 1$ , а логарифмическая зависимость этой величины от геометрических размеров (соотношение (5)) не дает этой величине сильно измениться. Более точным способом вычисления корней дисперсионного уравнения является прямой численный метод решения уравнения (16).

Точное уравнение из приложения (16) позволяет исследовать распространение волн и в случае, когда распределение возмущения  $n'$  по сечению пучка неоднородно. Для этого нужно найти несколько решений данного трансцендентного уравнения, определить соответствующие им радиальные профили распределения плотности  $f_i(r)$  и составить из них требуемую линейную комбинацию. Обратим внимание, что первый член в уравнении (16) в случае приближения длинных волн зависит только от геометрических размеров задачи и не содержит значения продольной компоненты волнового вектора. Поэтому для нахождения остальных корней уравнения (16) достаточно найти пересечение кривой функции

$$\Upsilon(Ta_e) = -Ta_e \frac{J'_0(Ta_e)}{J_0(Ta_e)} = Ta_e \frac{J_1(Ta_e)}{J_0(Ta_e)}$$

с константой

$$\Upsilon(Ta_e) = \frac{1}{\ln(b/a_e)} = \frac{\mu_0^2}{2}, \tag{7}$$

как это показано на рис.3. Это дает возможность вычислить кроме основной радиальной моды  $Ta_e = \mu_0$  (точка 1), соответствующей предыдущему анализу, еще и

остальные  $Ta_e = \mu_i$  с другими «радиальными» числами  $\mu_i$ . Закон дисперсии для них может быть записан в виде, аналогичном (6),

$$(\omega - k_s u_0)^2 = \frac{1}{\mu_i^2} k_s^2 a_e^2 \omega_p^2. \quad (8)$$

Основная радиальная мода соответствует практически однородному радиальному распределению плотности возмущения (см. рис. 4, случай  $\mu_0 = 0,95$ ). На рис. 2 показано, как изменяется продольный волновой вектор в зависимости от тока пучка, оцененный по формулам (8) и (16). Отсюда также следует, что модель, описываемая формулой (4), также будет давать достаточно точный количественный и качественный результат при  $\ln(b/a_e) \gg 1/2$ .

Рассмотрим другой простейший случай, когда распределение плотности описывается кольцом. Он достаточно важен: так как управляющий электрод пушки чуть больше диаметра катода и находится рядом с ним, то указанное возмущение плотности тоже может быть реализовано [13]. Подставляя (14) в уравнение Пуассона (11), можно убедиться, что для каждой моды поперечное распределение плотности совпадает с распределением потенциала с точностью до умножения на некоторую констан-

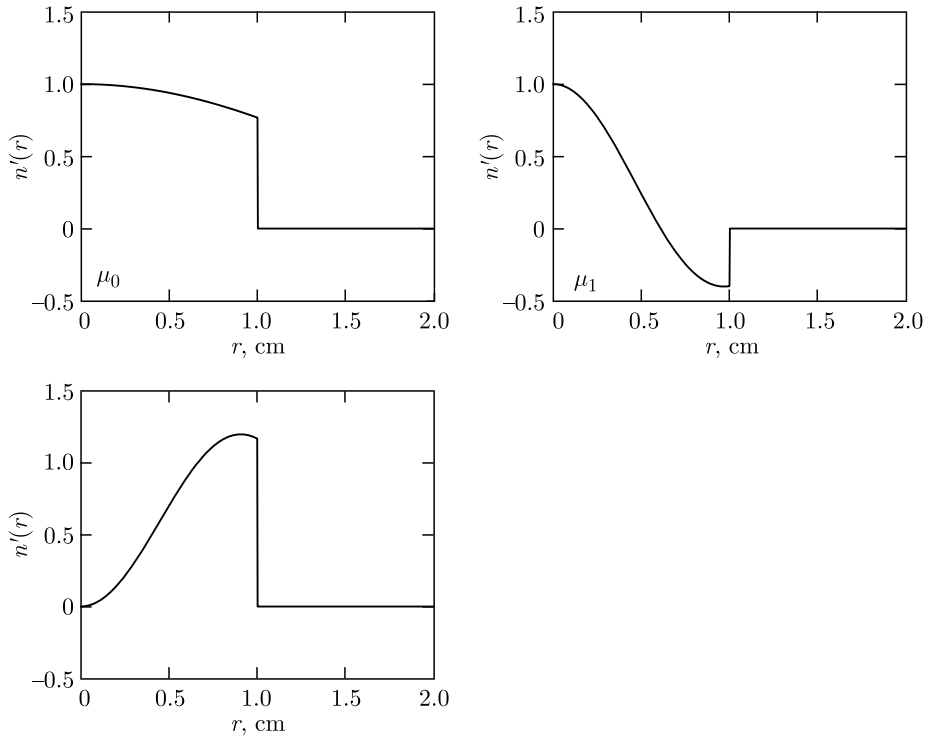


Рис. 4. Профили плотности возмущения, соответствующие возбуждению азимутально-симметричной моды с  $\mu_0 = 0,95$ ,  $\mu_1 = 3,97$  и их комбинации. Ток электронного пучка 0,3 А, энергия 1,74 кэВ. Радиальные распределения для левого и центрального графиков нормированы на значение плотности при  $r = 0$

ту. Тогда, взяв два распределения плотности, соответствующие решениям  $\mu_0$  и  $\mu_1$  с противоположными знаками, можно получить распределение с нулевой плотностью в центре, так как  $J_0(r=0) = 1$ . На рис. 4 показаны профили плотности, соответствующие «радиальным» цифрам 0 и 1, а также их комбинации.

Оценим, как влияют полученные законы дисперсии на эволюцию амплитуды возмущения плотности электронов вдоль траектории пучка. Считая, что возле управляющего электрода возмущение плотности в волне равно

$$n'_i(r, t) = \delta n_{i0} f_i(r) \cos(\omega t),$$

получим на расстоянии  $s$  от места возбуждения

$$\begin{aligned} n'_i(r, t) &= \frac{1}{2} \delta n_{i0} f_i(r) [\cos(\omega t - k_+ s) + \cos(\omega t - k_- s)] = \\ &= \delta n_{i0} f_i(r) \cos\left(\omega t - \frac{k_+ + k_-}{2} s\right) \cos\left(\frac{k_- - k_+}{2} s\right). \end{aligned} \quad (9)$$

Тогда, используя закон дисперсии (8), получаем выражение

$$n'_i(r, t) = \delta n_{i0} f_i(r) \cos\left(\omega t - \mu_i \frac{\omega u_0}{\mu_i^2 u_0^2 - a_e^2 \omega_p^2} s\right) \cos\left(\mu_i \frac{a_e \omega \omega_p u_0}{\mu_i^2 u_0^2 - a_e^2 \omega_p^2} s\right), \quad (10)$$

где последний множитель в выражении описывает изменение амплитуды моды колебания вдоль траектории пучка. Равенство амплитуд возбуждения плотности для положительной и отрицательной волн

$$\delta n_{i+} = \delta n_{i-}$$

соответствует нулю амплитуды возмущения скорости  $v_s$  в точке  $s = 0$ , что следует из уравнения непрерывности (3).

В случае комбинации нескольких мод для оценки величины сигнала в пикап-станции  $\Sigma$  необходимо сначала проинтегрировать величину возмущения плотности по сечению пучка для каждой моды

$$\Sigma_i = \int n'_i dS,$$

затем просуммировать их и найти среднеквадратичное значение суммы, усредненное по времени. Полученные аналитические выражения оказываются достаточно громоздкими для их записи, но численный ответ может быть получен достаточно легко.

На рис. 5 показано, как изменяется амплитуда возмущения тока, регистрируемого пикап-станциями для основной (рис. а), первой азимутально-симметричной (рис. б) и кольцевой моды (рис. в). Графики рассчитаны для различных значений полного тока электронного пучка 50, 150 и 300 мА. Здесь при вычислениях невозмущенной плотности  $n_0$  дополнительно учтено, что энергия электронов в пучке будет отличаться от напряжения на катоде на величину «просадки» потенциала

$$\Delta\phi = \frac{2J_e}{\beta c} \ln\left(\frac{b}{a_e}\right),$$

вызванного пространственным зарядом пучка.



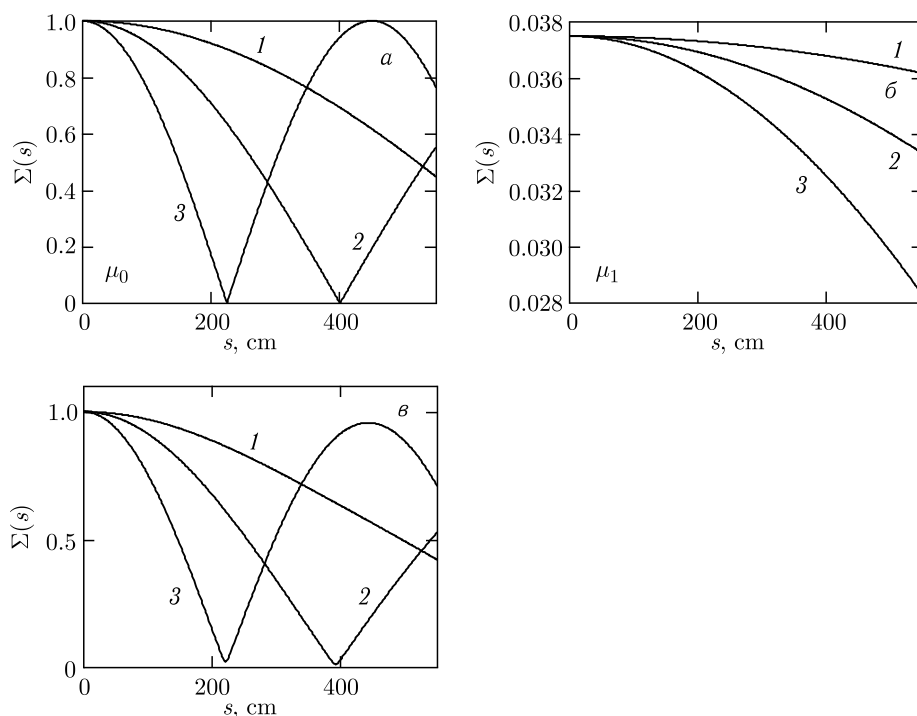


Рис. 5. Продольное распределение амплитуды суммового сигнала в пикап-станции  $\Sigma$  при возбуждении азимутально-симметричных мод  $\mu_0$ ,  $\mu_1$  и их комбинации. Значение  $\Sigma \approx 0,04$  при  $s = 0$  для  $\mu_1$  отражает вклад первой радиальной моды в возмущение модуляции тока, когда величины возмущений плотности при  $r = 0$  для  $\mu_0$  и  $\mu_1$  равны 1. Цифрам 1, 2, 3 соответствуют значения тока пучка 50, 150 и 300 мА. Начальная энергия электронов 1,74 кэВ. Амплитуда возмущения сигнала в пикап-станции  $\Sigma$  для графиков рис.а и рис.в нормирована на 1 при  $r = 0$

Видно, что качественно поведение плотности вдоль траектории пучка на рис. 1 и 5 достаточно похоже, поэтому описанный выше механизм объясняет наблюдаемый эффект. Количественные оценки затруднены тем, что рассмотренный механизм не единственный, который может искажать амплитуду сигналов на датчиках положения пучка. Например, в него могут вносить свою роль захваченные ионы, образующиеся при ионизации остаточного газа. Несмотря на то, что давление остаточного газа в установке находится на уровне  $10^{-11}$  мбар, за длительное время может быть накоплено достаточное количество ионов, поскольку электронный пучок за счет отрицательного пространственного заряда образует естественную электростатическую ловушку [14]. Эти ионы могут раскачиваться переменным электрическим полем пространственного заряда электронов и вносить свой вклад в формирование сигнала на датчиках положения пучка. Кроме того, до конца не известен радиальный профиль возмущения, формируемый управляющим электродом, что может влиять на количественные результаты (см. рис. 5).

В целях увеличения информативности устройств диагностики электронного пучка управляющий электрод источника был разделен на 4 сектора, что дает возможность

при подаче переменного напряжения на каждый сектор не только отслеживать положение центра пучка, но и судить о его форме в процессе распространения вдоль СЭО. В результате появилась возможность фактически модулировать 5 различных «квази-пучков» переменного тока — один в центре, если переменное напряжение приложено ко всем секторам, и четыре по краям, если модуляция подается индивидуально на каждый сектор. Это может быть использовано, например, для оценки поля собственного пространственного заряда в электронном пучке. Поэтому интерес представляет и распространение азимутально-неоднородного возмущения плотности. К сожалению, оценки параметров из уравнения (15)

$$\omega = 1,9 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}, \quad \omega_p = 8,7 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}, \quad \Omega = 3,5 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}, \quad \omega_0 = 1,2 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$$

показывают, что угловая скорость равновесного вращения электронного столба как целого  $\omega_0$  при параметрах нашего эксперимента — достаточно большая величина, поэтому приближение максимальной замагниченности движения электронов здесь не работает, что требует более аккуратного рассмотрения и выходит за рамки данной статьи. Для азимутально-симметричного случая величина дрейфовой частоты не очень важна, так как  $l = 0$  (см. (15)).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Электростатические датчики положения пучка (пикап-станции) являются одним из основных методов получения информации о свойствах электронного пучка в системах электронного охлаждения (СЭО). Статья, показывает, что распространение волн пространственного заряда в достаточно интенсивном пучке необходимо учитывать при анализе экспериментальных данных. Критерием величины влияния волн пространственного заряда пучка на амплитуды сигналов в пикап-станциях можно считать сравнимость собственной скорости волны пространственного заряда  $c_s$  со скоростью пучка  $u_0$ .

**Благодарности.** Авторы приносят свою искреннюю благодарность И. Н. Мешкову за многие полезные замечания, высказанные при обсуждении данной статьи.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Точное решение линеаризованных уравнений гидродинамики в продольном магнитном поле и уравнения Пуассона описано в [15, 16]. Уравнение непрерывности, уравнение движения и уравнение Пуассона записываются в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial n'}{\partial t} + \operatorname{div}(n_0 \mathbf{v}') + \mathbf{v}_0 \nabla n' &= 0, \\ m_e \left( \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \nabla) \mathbf{v}' \right) &= e \mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{v}' \times \mathbf{B}_0], \quad \Delta \varphi = -4\pi e n', \end{aligned} \tag{11}$$

где скорость  $\mathbf{v}_0$  учитывает наличие азимутальной скорости дрейфа электронов. Использование разложения в ряд Фурье для собственных колебаний

$$\delta\phi(r, \theta, s, t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k_s=-\infty}^{\infty} \delta\phi_l(r, k_s) \exp[i(l\theta + k_s s - \omega t)] \quad (12)$$

позволяет переписать уравнение Пуассона для каждой моды колебаний в виде

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} \delta\phi_l - \left( \frac{l^2}{r^2} + \chi \right) \delta\phi_l = 0, \quad (13)$$

$$\chi = \begin{cases} -T^2, & 0 < r < a_e, \\ k^2, & a_e < r < b, \end{cases}$$

где

$$T^2 = k_s^2 \frac{\frac{\omega_p^2}{(\omega - k_s u_0 - l\omega_0)^2} - 1}{1 - \frac{\omega_p^2}{\nu^2}}, \quad \nu^2 = (\omega - k_s u_0 - l\omega_0)^2 - (\Omega + 2\omega_0)^2,$$

$\Omega = eB/(m_e c)$  — циклотронная частота, а  $\omega_0$  — угловая скорость равновесного вращения электронного столба как целого:

$$\omega_0 = -\frac{\Omega}{2} \left[ 1 - \left( 1 - 2 \frac{\omega_p^2}{\Omega^2} \right)^{1/2} \right].$$

В области  $0 < r < a_e$  уравнение (13) имеет решение в виде функций Бесселя

$$\delta\phi_l = A J_l(T r), \quad (14)$$

где  $J_l$  — функция Бесселя первого рода порядка  $l$ , остающаяся конечной при  $r = 0$ , а  $A$  — некоторая константа. Аналогичное решение во внешней области электронного пучка можно записать в виде

$$\delta\phi_l = B \cdot I_l(k_s r) + C \cdot K_l(k_s r),$$

где функции  $K_l$  и  $I_l$  — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода, а  $B$  и  $C$  — некоторые константы. Из граничных условий на поверхности проводящей вакуумной камеры и на поверхности пучка можно получить дисперсионное уравнение в виде [9]

$$k_s a_e \frac{K_l(k_s b) I'_l(k_s a_e) - K'_l(k_s a_e) I_l(k_s b)}{K_l(k_s b) I_l(k_s a_e) - K_l(k_s a_e) I_l(k_s b)} - \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\nu^2} \right) T a_e \frac{J'_l(T a_e)}{J_l(T a_e)} = l \frac{\omega_p^2 (\Omega + 2\omega_0)}{\nu^2 (\omega - k_s u_0 - l\omega_0)}. \quad (15)$$

Штрихи у функций Бесселя в уравнении означают их производную по полному аргументу. В предельно сильном магнитном поле можно сделать следующие упрощения:

$$\nu^2 \approx -\Omega^2, \quad T^2 \approx k_s^2 \frac{\omega_p^2}{(\omega - k_s u_0)^2}, \quad \omega_0 \approx -\frac{\omega_p^2}{2\Omega} \approx 0, \quad \frac{\omega_p^2}{\nu^2} \approx 0, \quad l \frac{\omega_p^2 (\Omega + 2\omega_0)}{\nu^2 (\omega - k_s u_0 - l\omega_0)} \approx 0,$$

и уравнение (15) приобретает вид

$$k_s a_e \frac{K_l(k_s b) I'_l(k_s a_e) - K'_l(k_s a_e) I_l(k_s b)}{K_l(k_s b) I_l(k_s a_e) - K_l(k_s a_e) I_l(k_s b)} - T a_e \frac{J'_l(T a_e)}{J_l(T a_e)} = 0. \quad (16)$$

Если рассмотреть азимутально-симметричный случай  $l = 0$  и воспользоваться приближением длинных волн ( $k_s b, k_s a_e, T a_e \ll 1$ ), можно разложить функции Бесселя в окрестности нуля и упростить оба слагаемых уравнения (16)

$$k_s a_e \frac{K_l(k_s b) I'_l(k_s a_e) - K'_l(k_s a_e) I_l(k_s b)}{K_l(k_s b) I_l(k_s a_e) - K_l(k_s a_e) I_l(k_s b)} \approx -\frac{1}{\ln(b/a_e)},$$

$$T a_e \frac{J'_l(T a_e)}{J_l(T a_e)} \approx -\frac{T^2 a_e^2}{2}, \quad T^2 = k_s^2 \frac{\omega_p^2}{(\omega - k_s u_0)^2}.$$

Другой интересной задачей является исследование распространения азимутально-неоднородного возмущения плотности. Для этого надо рассмотреть случай с  $l \neq 0$  для уравнения (15). В качестве первого приближения рассмотрим случай «замагниченных» электронов (см. уравнения (2)).

Снова воспользуемся приближением длинных волн ( $k_s b, k_s a_e, T a_e \ll 1$ ) и разложением функций Бесселя в окрестности нуля

$$K_l(z) = \frac{(l-1)!}{2} \left(\frac{z}{2}\right)^{-l}, \quad I_l(z) = \frac{1}{l!} \left(\frac{z}{2}\right)^l, \quad J_l(z) = \frac{1}{l!} \left(\frac{z}{2}\right)^l,$$

а также свойством производных

$$K'_l(z) = -K_{l+1}(z) + \frac{l}{z} K_l(z), \quad J'_l(z) = -J_{l+1}(z) + \frac{l}{z} J_l(z), \quad I'_l(z) = I_{l+1}(z) + \frac{l}{z} I_l(z).$$

Тогда дисперсионное уравнение продольных волн приобретает вид

$$l \frac{a^{2l} + b^{2l}}{a^{2l} - b^{2l}} - l + \frac{T^2 a_e^2}{2(l+1)} = 0,$$

из которого можно получить выражение для  $T a_e$

$$T a_e = 4l(l+1)$$

и продольного волнового вектора с учетом соотношения  $b \gg a_e$ :

$$(\omega - k_s u_0)^2 = \frac{1}{4l(l+1)} k_s^2 a_e^2 \omega_p^2. \quad (17)$$

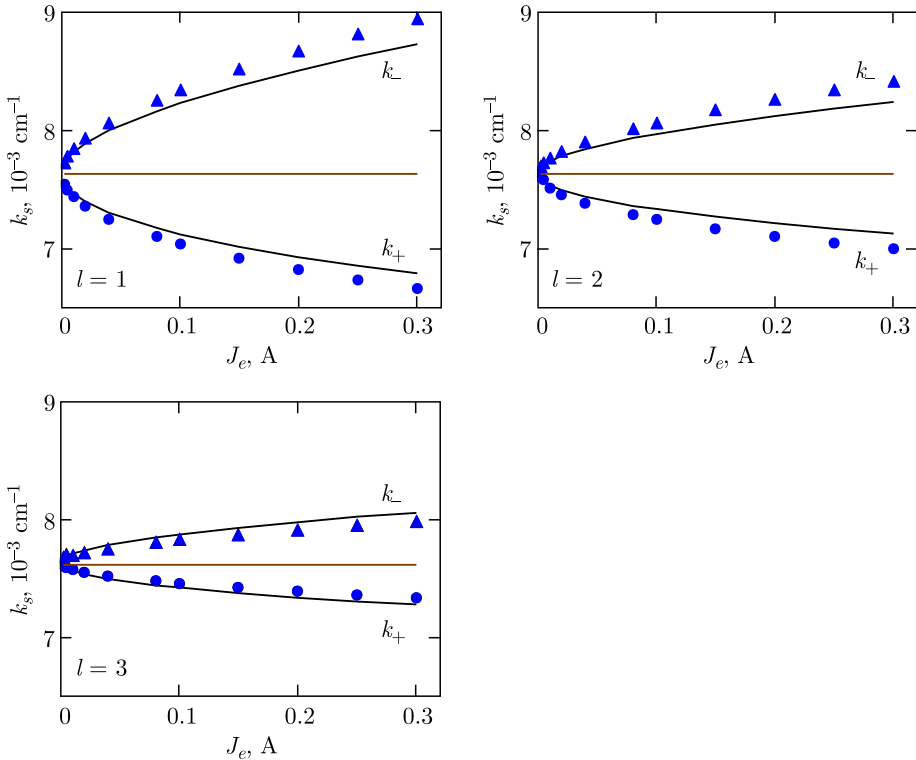


Рис. 6. Компоненты волновых векторов волны, распространяющейся вдоль по потоку ( $k_+$ ) и против ( $k_-$ ), в зависимости от тока пучка. Сплошная кривая соответствует вычислениям по формуле (17), отдельными точками показаны результаты расчетов по формуле (15). Горизонтальная линия посередине графиков соответствует закону дисперсии без учета локального взаимодействия частиц  $k = \omega/u_0$

Как и в азимутально-симметричном случае, здесь мы сталкиваемся с проблемой обоснования разложения по малости  $Ta_e \ll 1$  в уравнении (16), которую нужно исследовать численно. На рис. 6 приведены результаты расчетов зависимости продольной компоненты волнового вектора от величины тока для различных азимутальных чисел  $l$ . Видно, что в пределе сверхсильного поля условие  $Ta_e \ll 1$  не является препятствием для использования решения на основе разложения в ряд функции Бесселя.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аренишам А. И., Будкер Г. И., Мешков И. Н., Пономаренко В. Г., Скринский А. Н. Система электронного охлаждения // Тр. Всесоюз. совещ. по ускорителям заряженных частиц, Москва, 6–19 окт. 1968 г. 1970. Т. 2. С. 400–403.
2. Диканский Н. С., Мешков И. Н., Пархомчук В. В., Скринский А. Н. Развитие методов охлаждения ионов // УФН. 2018. Т. 188. С. 481–492.
3. Tuzikov A., Brovko O., Butenko A., Eliseev A., Fateev A., Karpinsky V., Khodzhibagiyan H., Kostromin S., Meshkov I., Mikhaylov V., Sidorin A., Sidorov A., Smirnov A., Syresin E.,

- Trubnikov G., Volkov V., Anchugov O., Kiselev V., Shvedov D., Zhuravlev A.* Booster Synchrotron at NICA Accelerator Complex // Proc. of RuPAC-2016, St. Petersburg, Russia, Nov. 21–25, 2016. FRCAMH05. P. 160–162.
4. Technical Project of NICA Acceleration Complex. Dubna, 2015.
  5. *Bublely A., Bryzgunov M., Chekavinskiy V., Goncharov A., Gorchakov K., Gusev I., Panasyuk V., Parkhomchuk V., Reva V., Senkov D., Smirnov A.* Low Energy Cooler for NICA Booster // Proc. of COOL-2017, Bonn, Germany, Sept. 18–22, 2017. TUM11. P. 22–24.
  6. *Bryzgunov M., Parkhomchuk V., Reva V., Bublely A., Denisov A., Panasyuk V., Goncharov A., Putmakov A., Kremnev N., Polukhin V., Chekavinskiy V., Gusev I., Senkov D., Karпов G., Bekhtenev E., Kondaurov M., Zharikov A., Kobets A., Meshkov I., Melnikov S., Orlov O., Sergeev A., Semionov S., Sidorin A., Smirnov A.* Status of the Electron Cooler for NICA Booster and Results of Its Commissioning // 12th Workshop on Beam Cooling and Related Topics COOL-2019, Novosibirsk, Russia, Sept. 23–27, 2019. P. 22–25.
  7. *Bublely A. V., Bryzgunov M. I., Ivanov A. V., Kruchkov A. M., Parkhomchuk V. V., Reva V. B.* Electron Gun with Variable Beam Profile for COSY Cooler // Proc. of COOL-11, Alushta, Ukraine, Sept. 12–16, 2011. TUPS06. P. 99–102.
  8. *Буров А. В., Куделайнен В. И., Лебедев В. А., Пархомчук В. В., Серый А. А., Шильцев В. Д.* Экспериментальное исследование компенсированного состояния электронного пучка. Препринт ИЯФ 89-116. Новосибирск, 1989. 83 с.
  9. *Диканский Н. С., Куделайнен В. И., Лебедев В. А., Мешков И. Н., Пархомчук В. В., Серый А. А., Скринский А. Н., Сухина Б. Н.* Пределные возможности электронного охлаждения. Препринт ИЯФ 88-61. Новосибирск, 1988. 60 с.
  10. *Пархомчук В. В., Пестриков Д. В.* Тепловые шумы интенсивного пучка в накопителе // ЖТФ. 1980. Т. 50, № 7. С. 1411.
  11. *Дементьев Е. М., Диканский Н. С., Медведко А. С., Пархомчук В. В., Пестриков Д. В.* Измерение тепловых шумов протонного пучка на накопителе НАП-М // Там же. № 8. С. 1717–1729.
  12. *Лебедев А. Н., Шальнов А. В.* Основы физики и техники ускорителей. Т. 2. М.: Энергоиздат, 1982. С. 240.
  13. *Бублей А. В., Иванов А. В., Панасюк В. М., Пархомчук В. В., Рева В. Б.* Электронная пушка с управляемым профилем пучка для оптимизации электронного охлаждения ионов // Вестн. НГУ. Сер. «Физика». 2007. Т. 2, вып. 1. С. 65–68.
  14. *Константинов С. Г., Пархомчук В. В., Рева В. Б.* Исследование колебаний пространственного заряда в установках электронного охлаждения // ЖТФ. 2003. Т. 73, № 1. С. 91–95.
  15. *Девидсон Р.* Теория заряженной плазмы. М.: Мир, 1978.
  16. *Богданкевич Л. С., Рухадзе А. А.* Устойчивость релятивистских электронных пучков в плазме и проблема критических токов // УФН. 1971. Т. 103. С. 609–640.

Получено 28 января 2021 г.