Письма в ЭЧАЯ. 2021. Т. 18, № 7(239). С. 599–610

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА. ТЕОРИЯ

КВАНТОВАНИЕ НА КЛАССИЧЕСКОМ ФОНЕ С ПОМОЩЬЮ ПЕРЕМЕННЫХ БОГОЛЮБОВА

М. В. Останина [1], *П. А. Томази-Вшивцева* [2]

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва

Данная работа является продолжением статей [1, 2]. Предложенная в [1] схема квантования взаимодействующих полей на классическом фоне с помощью переменных Боголюбова позволяет совместить точный учет законов сохранения с теорией возмущений и избежать проблемы нулевых мод. Проведенное в [2] квантование в новых переменных системы гравитационного и скалярного полей позволило получить волновое уравнение для классической части скалярного поля и уравнения Эйнштейна для классической части гравитационного поля как необходимые условия применимости теории возмущений. В данной статье продолжается развитие теории возмущений. В ходе редукции числа состояний получены уравнения движения для квантовых поправок, энергетического спектра, выражения для операторов рождения-уничтожения осцилляторов полей, а также уравнения Гейзенберга и явный вид операторов полей, т. е. законченное описание системы взаимодействующих полей в терминах переменных Боголюбова. В качестве примера рассматривается квантование на фоне метрики Минковского.

This is a continuation of articles [1, 2]. The scheme of quantization of interacting fields on a classical background using Bogoliubov variables proposed in [1] allows us to combine accurate accounting of conservation laws with perturbation theory and avoid the problem of zero modes. Quantization in new variables of the system of gravitational and scalar fields performed in [2] allowed us to obtain the wave equation for the classical part of the scalar field and the Einstein equation for the classical part of the gravitational field as necessary conditions for the applicability of perturbation theory. This paper continues the development of perturbation theory. During the reduction of the number of states, the equations of motion for quantum corrections, the energy spectrum, expressions for the creation-annihilation operators of field oscillators, as well as the Heisenberg equations and an explicit form of field operators are obtained, that is, a complete description of the system of interacting fields in terms of Bogoliubov variables. As an example, we consider quantization against the background of the Minkowski metric.

PACS: 03.70.+k; 03.65.Fd; 04.60.-m

ВВЕДЕНИЕ

В серии статей [1, 2], продолжением которой является данная работа, предлагается метод квантования нелинейных полей в окрестности нетривиальных решений классических уравнений движений. С помощью введения новых групповых переменных — переменных Боголюбова ([3]) — удается избежать проблем, которые всегда сопутствуют явному выделению классических составляющих, а именно: появления

[1] E-mail: kite_qwerty@yahoo.com

[2] E-mail: polina@physics.msu.ru

нулевых мод и точного учета законов сохранения при развитии теории возмущений. Рассматривается система взаимодействующих гравитационного и скалярного полей. В статье [2] в терминах переменных Боголюбова проведено квантование и развита теория возмущений. Получены волновое уравнение для классической части скалярного поля и уравнения Эйнштейна для классической части гравитационного поля, которые являются необходимыми условиями применимости теории возмущений. Рассмотрим следующий порядок в разложении гамильтониана.

1. ПРОСТРАНСТВО СОСТОЯНИЙ СИСТЕМЫ

В этой части работы мы найдем выражение для гамильтониана во втором порядке теории возмущений. С этой целью мы строим пространство состояний системы, в котором будет проведена редукция лишних состояний (подобный пример построения пространства состояний для гравитационного поля был приведен в [4]). Проанализируем, сколько независимых переменных мы имеем в настоящее время. Число независимых переменных было удвоено из-за способа определения операторов координаты и импульса осцилляторов поля (статья [2]). Из-за дополнительных условий ([2], (2)), связывающих $h_{ij}(x')$ и $h_n^{ij}(x')$, число независимых переменных (минус групповые переменные) становится равным $(2*\infty-r)$. Для того чтобы свести их к $(\infty-r)$, нужно еще r условий (напомним, что r — число групповых параметров).

С этой целью мы представляем $u_{st}(x')$ и $\zeta(x')$ в виде

$$\begin{aligned} u_{st}(x') &= w_{st}(x') + N^a_{st}(x')r_a, \qquad & u_n^{st}(x') &= w_n^{st}(x') + N_n^{sta}(x')r_a, \\ \zeta(x') &= \mu(x') + N^a(x')r_a, & \zeta_n(x') &= \mu_n(x') + N_n(x')r_a. \end{aligned} \tag{1}$$

Эти соотношения позволяют выразить $u_{st}(x^{'})$, $u_n^{st}(x')$, $\zeta(x')$, $\zeta_n(x')$ в терминах некоторых переменных r_a и новых функций $w_{st}(x')$, $w_n^{st}(x')$, $\mu(x')$, $\mu_n(x')$. Это возможно, если $w_{st}(x')$, $w_n^{st}(x')$, $\mu(x')$, $\mu_n(x')$ связаны r линейными соотношениями. Если $N^a(x')$ выбрать так, чтобы выполнялись соотношения

$$\omega(N^{sta}, N^{stb}) = 0, \qquad \omega(N^a, N^b) = 0,$$

то эти условия можно сформулировать как условия для $w_{st}(x')$, $w_{st}(x')$:

$$\omega(N^{sta}, w_{st}) + \omega(N^a, \mu) = 0, \qquad \omega(M_{sta}, w_{st}) + \omega(M_a, \mu) = 0.$$

Операторы $\hat{Q}$, $\hat{P}, \hat{O}, \hat{\Pi}$ в терминах новых переменных имеют вид

$$\begin{aligned} \hat{Q}_{st}(x') &= \bar{Q}_{st}(x') + q_{st}(x'), \qquad & \hat{P}^{st}(x') &= \bar{P}^{st}(x') + p^{st}(x'), \\ \hat{O}(x') &= \bar{O}(x') + q(x'), & \hat{\Pi}(x') &= \bar{\Pi}(x') + p(x'), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{st}(x') &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(w_{st}(x') + i\frac{\delta}{\delta w_n^{st}(x')}\right), \qquad & \bar{P}^{st}(x') &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(w_n^{st}(x') - i\frac{\delta}{\delta w_{st}(x')}\right), \\ \bar{O}(x') &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mu(x') + i\frac{\delta}{\delta \mu_n(x')}\right), & \bar{\Pi}(x') &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mu_n(x') - i\frac{\delta}{\delta \mu(x')}\right) \end{aligned}$$

и

$$q_{st}(x') = \frac{i}{\sqrt{2}} \frac{\delta r_a}{\delta u_n^{st}(x')} \frac{\partial}{\partial r_a}, \qquad p^{st}(x') = \frac{-i}{\sqrt{2}} \frac{\delta r_a}{\delta u_{st}(x')} \frac{\partial}{\partial r_a},$$
$$q(x') = \frac{i}{\sqrt{2}} \frac{\delta r_a}{\delta \zeta_n(x')} \frac{\partial}{\partial r_a}, \qquad p(x') = \frac{-i}{\sqrt{2}} \frac{\delta r_a}{\delta \zeta(x')} \frac{\partial}{\partial r_a}.$$

Редукцию состояний проводим в предположении, что состояние поля определяется функционалами $w_{st}(x')$, $w_n(x')$, $\mu(x')$ и $\mu_n(x')$, на которых $\bar{Q}(x')$, $\bar{P}(x')$, $\bar{O}$ и $\bar{\Pi}$ становятся следующими:

$$\begin{aligned} \bar{Q}(x') &\longrightarrow \sqrt{2} w_{st}(x'), & \bar{P}(x') &\longrightarrow -i \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\delta}{\delta w_{st}(x')}, \\ \bar{O}(x') &\longrightarrow -\sqrt{2} \mu(x'), & \bar{\Pi}(x') &\longrightarrow -i \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\delta}{\delta \mu(x')}. \end{aligned} \tag{2}$$

Переменные r_a физического смысла не имеют, они появились вследствие выбора способа реализации редукции числа состояний.

Если группой симметрии является группа пространственно-временных трансляций, то

$$x'^{\alpha} = x^{\alpha} - \tau^{\alpha}, \qquad (\delta x')^{\alpha} = -\delta \tau^{\alpha}.$$

Положим, что гиперповерхность Σ плоская $t = 0$, и рассмотрим случай, когда $F_n^{st}(x'), \Phi_n(x')$ удовлетворяют граничным условиям на Σ:

$$F_n^{st}(x') = 0, \qquad \Phi_n(x') = 0.$$

Тогда

$$M_{\alpha st}(x') = -\frac{1}{\sqrt{2}} e_a^{\alpha} F_{st\lambda_a}(x'), \qquad M_{n\alpha}^{st}(x') = \frac{1}{\sqrt{2}} n_{\alpha} F_{nn}^{st}(x'),$$
$$L_{\alpha}(x') = -\frac{1}{\sqrt{2}} e_a^{\alpha} \Phi_{\lambda_a}(x'), \qquad L_{n\alpha}(x') = \frac{1}{\sqrt{2}} n_{\alpha} \Phi_{nn}(x').$$

Необходимые условия

$$\omega\left(N_{st}^a, M_b^{st}\right) = \delta_b^a, \qquad \omega\left(N^{ast}, N_{st}^b\right) = 0,$$
$$\omega\left(N^a, L_b\right) = \delta_b^a, \qquad \omega\left(N^a, N^b\right) = 0$$

будут выполнены, если $\tilde{N}^{\alpha}(x')$ определяются формулами

$$N_{st}^{\alpha}(x') = A n^{\alpha} F_{stnn}(x'), \qquad N_n^{\alpha st}(x') = B^{ab} e_a^{\alpha} F_{\lambda_b}^{st}(x'),$$
$$N^{\alpha}(x') = \tilde{A} n^{\alpha} \Phi_{nn}(x'), \qquad N_n^{\alpha}(x') = \tilde{B}^{ab} e_a^{\alpha} \Phi_{\lambda_b}(x'),$$

где

$$A = -\frac{\sqrt{2}}{\int\limits_{\Sigma} F_{stnn}^2(x')}, \qquad B^{ab} = \frac{\sqrt{2}}{\int\limits_{\Sigma} F_{\lambda_a}^{st}(x') F_{st\lambda_b}(x')},$$
$$\tilde{A} = -\frac{\sqrt{2}}{\int\limits_{\Sigma} \Phi_{nn}^2(x')}, \qquad \tilde{B}^{ab} = \frac{\sqrt{2}}{\int\limits_{\Sigma} \Phi_{\lambda_a}(x') \Phi_{\lambda_b}(x')}.$$

Полученные выражения позволят нам построить пространство состояний системы.

2. ПРИМЕР РЕДУКЦИИ ЧИСЛА СОСТОЯНИЙ

После представления квантовых слагаемых в форме (1) гамильтониан во втором порядке по теории возмущений имеет вид

$$H_2 = in^\alpha \frac{\partial}{\partial \tau^\alpha} + H_{\text{gr}} + H_{\text{scal}} + H_r.$$

Здесь

$$H_{\text{gr}} = \int\limits_\Sigma \left(-\frac{1}{2\sqrt{F}} \left(\frac{\delta}{\delta w_{st}} \frac{\delta}{\delta w^{st}} - \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{\delta w^2} \right) - 2\sqrt{F} \left(R w^{st} - \frac{1}{2} A^{plst} w_p l \right) w_{st} \right) -$$
$$- 2\sqrt{F} \left(R^{st}(w) - \frac{1}{2} R(w) F^{st} \right) w_{st} - Y(w) + i \int\limits_\Sigma w_{stn} \frac{\delta}{\delta w_{st}} + w_{nn}^{st} \frac{\delta}{\delta w_n^{st}},$$

где

$$A^{plst} = R^{pl} F^{st} + \frac{1}{2} \Phi^s \Phi^l F^{tp} - \frac{1}{4} F^{pl} \Phi^s \Phi^t,$$

$Y(w)$ — квадратичная по w форма;

$$H_{\text{scal}} = \int\limits_\Sigma \left(\frac{1}{4\sqrt{F}} \frac{\delta^2}{\delta \mu^2} - \sqrt{F} \left(F^{st} \mu_s \mu_t + m^2 \mu^2 \right) \right) + i \int\limits_\Sigma \mu_n \frac{\delta}{\delta \mu} + \mu_{nn} \frac{\delta}{\delta \mu_n};$$

$$H_r = \int\limits_\Sigma \left(\frac{1}{2\sqrt{F}} \frac{\delta r_a}{\delta u_{st}} \frac{\delta r_b}{\delta u^{st}} - \frac{1}{2} F^{st} \delta_{ab} \frac{\delta r_a}{\delta u} \frac{\delta r_b}{\delta u_{st}} + \frac{\sqrt{F}}{4} \left(\Re \frac{\delta r_a}{\delta u_n^{st}} - \Re^{st} \left(\frac{\delta r_a}{\delta u_n^{st}} \right) \right) \frac{\delta r_a}{\delta u_{nst}} \times \right.$$
$$\left. \times \frac{a}{4\sqrt{F}} \frac{\delta r_a}{\delta \zeta} \frac{\delta r_b}{\delta \zeta} - \frac{a\sqrt{F}}{4} \left(-F^{st} \left(\frac{\delta r_a}{\delta \zeta_n} \right)_s \left(\frac{\delta r_a}{\delta \zeta_n} \right)_t - m^2 \frac{\delta r_a}{\delta \zeta_n} \frac{\delta r_b}{\delta \zeta_n} \right) \right) \frac{\partial^2}{\partial r_a \partial r_b} -$$
$$- i r_a \frac{\partial}{\partial r_b} \left(\int\limits_\Sigma Z_{nn}^{aij} \frac{\delta r_b}{\delta h_{ij}} - Z_{ijn}^a \frac{\delta r_b}{\delta h_n^{ij}} \right) - r_a r_b \left(\int\limits_\Sigma Z_{nn}^{aij} Z_{ij}^b - Z_{ijn}^b Z_n^{aij} \right),$$

$$A = \frac{\delta u_n^{st}}{\delta r_a} R_{st} \left(\frac{\delta r_a}{\delta u_n} \right).$$

Операторы H_2 действуют в пространстве $F[w, w_n] F[\mu, \mu_n] F[r]$, причем H_{gr} — в пространстве $F[w, w_n]$, H_{scal} — в пространстве $F[\mu, \mu_n]$, а оператор H_r действует в $F[r]$. Эти пространства ортогональны. $w_{st}(x)$ и $\mu(x)$ при малых t можно представить в виде рядов:

$$w_{st}(x) = \sum_m \varphi_{stm}(\mathbf{x}) c_m(t), \qquad \frac{\delta}{\delta w_{st}}(x) = \sum_m \varphi_{stm}(\mathbf{x}) \frac{\delta}{\delta c_m(t)},$$
$$\mu(x) = \sum_m \varphi_m(\mathbf{x}) \tilde{c}_m(t), \qquad \frac{\delta}{\delta \mu}(x) = \sum_m \varphi_m(\mathbf{x}) \frac{\delta}{\delta \tilde{c}_m(t)},$$

где $\varphi_{st_m}(x), \varphi_m(x)$ есть ортонормированные функции

$$\int\limits_\Sigma \varphi_{stm}(\mathbf{x})\varphi^{st}_n(\mathbf{x}) = \delta_{mn}, \qquad \int\limits_\Sigma \varphi_m(\mathbf{x})\varphi_n(\mathbf{x}) = \delta_{mn}.$$

Они являются решениями уравнений

$$\varphi_{stm}(\mathbf{x}) = \frac{2a}{\sqrt{F}}\left(\varphi_{stm}(\mathbf{x}) - \frac{1}{2}F_{st}\varphi_m(\mathbf{x})\right),$$

$$\begin{aligned} \omega^2_m\varphi^{st}_m(\mathbf{x}) = 2a\sqrt{F}\left(R\varphi^{st}_m(\mathbf{x}) - \frac{1}{2}A^{plst}\varphi_{mpl}(\mathbf{x})\right) - \\ - 2\sqrt{F}\left(R^{st}(\varphi_m(\mathbf{x})) - \frac{1}{2}R(\varphi_m(\mathbf{x}))F^{st}\right) - Y(\varphi^{st}_m(\mathbf{x})), \end{aligned} \tag{3}$$

$$\varpi^2_m\varphi_m = -a\sqrt{F}\left(-F^{st}\varphi_{;st} + m^2\varphi_m\right).$$

Операторы рождения-уничтожения квантов полей могут быть представлены как функции

$$\begin{aligned} a_s &= \sqrt{\Omega_s}c_s + \frac{1}{2\sqrt{\Omega_s}}\frac{\partial}{\partial c_s}, \qquad & a^\dagger_s &= \sqrt{\Omega_s}c_s - \frac{1}{2\sqrt{\Omega_s}}\frac{\partial}{\partial c_s}, \\ \tilde{a}_s &= \sqrt{\tilde{\Omega}_s}\tilde{c}_s + \frac{1}{2\sqrt{\tilde{\Omega}_s}}\frac{\partial}{\partial \tilde{c}_s}, \qquad & \tilde{a}^\dagger_s &= \sqrt{\tilde{\Omega}_s}\tilde{c}_s - \frac{1}{2\sqrt{\tilde{\Omega}_s}}\frac{\partial}{\partial \tilde{c}_s}. \end{aligned} \tag{4}$$

Функции $w_{st}(x')$, $\mu(x)$ могут быть заданы как ряды по $\phi_{st_m}(x)$, $\phi_m(x)$, по крайней мере при малых t, если зависимость $a, a^\dagger, \tilde{a}_s$ и $\tilde{a}^\dagger_s$ от времени определяется уравнением Гейзенберга:

$$a_s(t) = \mathrm{e}^{-i\Omega_s t}a_s, \qquad a^\dagger_s(t) = \mathrm{e}^{i\Omega_s t}a^\dagger_s, \qquad \tilde{a}_s(t) = \mathrm{e}^{-i\tilde{\Omega}_s t}\tilde{a}_s, \qquad \tilde{a}^\dagger_s(t) = \mathrm{e}^{i\tilde{\Omega}_s t}\tilde{a}^\dagger_s.$$

Имеет место зависимость w_{st} и μ от t:

$$\begin{aligned} w_{st}(t) &= \sum_m \frac{1}{2\sqrt{\Omega_m}}\varphi_{stm}(\mathbf{x})\left(a_m\,\mathrm{e}^{-i\Omega_m t} + a^\dagger_m\,\mathrm{e}^{i\Omega_m t}\right), \\ w_{t_{st}}(t) &= -i\sum_m \frac{\sqrt{\Omega_m}}{2}\varphi_{stm}(\mathbf{x})\left(a_m\,\mathrm{e}^{-i\Omega_m t} - a^\dagger_m\,\mathrm{e}^{i\Omega_m t}\right), \\ \mu(t) &= \sum_m \frac{1}{2\sqrt{\tilde{\Omega}_m}}\varphi_m(\mathbf{x})\left(\tilde{a}_m\,\mathrm{e}^{-i\tilde{\Omega}_m t} + \tilde{a}^\dagger_m\,\mathrm{e}^{i\tilde{\Omega}_m t}\right), \\ \mu_t(t) &= -i\sum_m \frac{\sqrt{\tilde{\Omega}_m}}{2}\varphi_m(\mathbf{x})\left(\tilde{a}_m\,\mathrm{e}^{-i\tilde{\Omega}_m t} - \tilde{a}^\dagger_m\,\mathrm{e}^{i\tilde{\Omega}_m t}\right). \end{aligned}$$

Используя полученные уравнения, можно показать, что

$$H_{\mathrm{gr}} + H_{\mathrm{scal}} = 0.$$

Рассмотрим слагаемые в H_2:

$$H_2 = in^\alpha \frac{\partial}{\partial \tau^\alpha} + H_r.$$

Оператор H_r содержит только избыточные переменные r_a, $\partial/\partial r_a$. Обозначим

$$r_{a_\parallel} = e_a^\alpha r_\alpha, \qquad r_\perp = n^\alpha r_\alpha, \qquad \frac{\partial}{\partial r_{a_\parallel}} = e_a^\alpha \frac{\partial}{\partial r_\alpha}, \qquad \frac{\partial}{\partial r_\perp} = n^\alpha \frac{\partial}{\partial r_\alpha}$$

и напомним, что

$$\frac{\delta r_a}{\delta u_{st}(x')} = -\frac{1}{\sqrt{2}} n_\alpha F_n^{st}(x'), \qquad \frac{\delta r_a}{\delta u_{nn}^{st}(x')} = -\frac{1}{\sqrt{2}} e_\alpha^a F_{\lambda_a}^{st}(x'),$$
$$\frac{\delta r_a}{\delta \zeta(x')} = -\frac{1}{\sqrt{2}} n_\alpha \Phi_n(x'), \qquad \frac{\delta r_a}{\delta \zeta_{nn}(x')} = -\frac{1}{\sqrt{2}} e_\alpha^a \Phi_{\lambda_a}(x').$$

Если ввести обозначения

$$a^{ab} = \frac{2}{\int\limits_\Sigma \left(F_{\lambda_a}^{st}(x')F_{st\lambda_a}(x') + \Phi_{\lambda_a}(x')\Phi_{\lambda_a}(x')\right)},$$
$$b = \frac{2}{\int\limits_\Sigma \left(F_{nn}^{st}(x')F_{st}(x') + \Phi_{nn}(x')\Phi(x')\right)},$$
$$c^{ab} = \frac{1}{2}\int\limits_\Sigma \Bigg(\frac{\sqrt{F}}{4}\left(RF_{\lambda_a}^{st} - R^{st}\left(F_{\lambda_a}\right)\right)F_{st\lambda_b} -$$
$$- \frac{a\sqrt{F}}{4}\left(-F^{st}\left(\Phi_{\lambda_a}\right)_s\left(\Phi_{\lambda_b}\right)_t - m^2\Phi_{\lambda_a}\Phi_{\lambda_b}\right)\Bigg),$$
$$d = \frac{1}{2}\int\limits_\Sigma \left(\left(-\frac{F_{st_{nn}}}{4\sqrt{F}}\left(F_{nn}^{st} - \frac{1}{2}F^{st}F_{nn}\right)\right) + \frac{a}{4\sqrt{F}}\Phi_{nn}^2\right),$$

то мы получим

$$H_r = a^{ab} r_{a_\parallel} r_{b_\parallel} + b r_\perp^2 + c^{ab}\frac{\partial^2}{\partial r_a \partial r_b} + d\frac{\partial^2}{\partial r_\perp^2}.$$

H_r равен нулю на следующем векторе состояния:

$$\Psi = \psi\, \mathrm{e}^{\alpha r_{a_\parallel}^2 + \beta r_{b_\parallel}^2 + \gamma r_\perp^2},$$

где параметры удовлетворяют уравнениям

$$a^{ab} + 4\alpha\beta c^{ab} = 0, \qquad b + 4\gamma^2 d = 0.$$

3. ВЫВОДЫ

После удаления избыточных переменных гамильтониан в нулевом порядке имеет вид
$$H = -i\frac{\partial}{\partial t}.$$
Аналогично можно получить, что для произвольной группы
$$H = -iA_0^p(a)\frac{\partial}{\partial a^p}.$$
Уравнение Гейзенберга
$$\frac{\partial Z}{\partial x^0} = i[HZ]$$
для поля $\psi(x)$ имеет вид
$$\frac{\partial Z}{\partial x^0} = -A_0^p\frac{\partial Z}{\partial a^p}$$
с граничными условиями
$$\psi(x)|_\Sigma = \hat{q}(x), \qquad \psi_n(x)|_\Sigma = \hat{p}(x).$$
Решение этого уравнения имеет вид
$$Z = Z(x^0 - A_0^p a^p).$$

Для гравитационного и скалярного полей операторы $\psi(x)$ выглядят следующим образом:
$$\psi_{st}(x) = F_{st}(x') + \hat{\Phi}_{st}(x') + \hat{\phi}_{st_a}\frac{\partial}{\partial r_a} + A_{st}(x',\tau),$$
$$\psi(x) = \Phi(x') + \hat{\Xi}(x') + \hat{\phi}_a\frac{\partial}{\partial r_a} + A(x',\tau),$$
где $\hat{\Phi}_{st}(x')$ — решения уравнений эволюции: для гравитационного поля
$$\hat{\Phi}_{st_n} = \frac{2a}{\sqrt{\hat{\Phi}}}\left(\hat{\Phi}_{nst} - \frac{1}{2}\hat{\Phi}_n\hat{\Phi}_{st}\right),$$
$$\hat{\Phi}^{st}_{nn} = 2a\sqrt{F}\left(R^{st}(\hat{\Phi}) - \frac{1}{2}A^{plst}\hat{\Phi}_{pl}\right) - 2\sqrt{F}\left(R^{st}(\hat{\Phi}) - \frac{1}{2}R(\hat{\Phi})F^{st}\right) - Y(\hat{\Phi^{st}})$$
с граничными условиями на Σ
$$\hat{\Phi}_{st} = \hat{Q}_{st}(x'), \qquad \hat{\Phi}^{st}_t = \hat{P}^{st}(x'),$$
а для скалярного поля
$$\hat{\Xi}_{nn}(x') = a\sqrt{F}\left(-F^{st}\hat{\Xi}_{;st} + m^2\hat{\Xi}\right)$$
с граничными условиями на Σ
$$\hat{\Xi} = \hat{O}(x'), \qquad \hat{\Xi}_t = \hat{\Pi}(x').$$

4. ПРИМЕР: ЛИНЕЙНАЯ ГРАВИТАЦИЯ

В качестве простейшего (но нетривиального) примера использования предложенного формализма рассмотрим квантование на фоне классической метрики Минковского. В этом случае

$$F_{st} = \delta_{st}, \qquad a = 1.$$

Условие малости $u_{st}(x')$ оставляет возможность выбора калибровки. Поскольку $s, t = 1, 2, 3$, выберем три дополнительных условия, аналогичные условиям, которые возникают при рассмотрении линейной гравитации в рамках классической теории поля:

$$u_{12} = u_{13} = 0, \qquad u_{22} = -u_{33}. \tag{5}$$

Таким образом, тензор u_{st} имеет вид

$$u_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} u_{11} & 0 & 0 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & u_{23} & -u_{22} \end{pmatrix}.$$

В присутствии массивного скалярного поля F_{nnst} (которое, напомним, задается на поверхности Σ как решение уравнения (7) из [2], независимо от F_{st}) имеет вид

$$F_{nnst} = \frac{1}{2}\left(\Phi_s\Phi_t + \frac{1}{2}\Phi_{nn}\Phi\delta_{st}\right) + \frac{1}{4}\Phi_n^2\delta_{st}.$$

Предположим, что квантовая поправка для гравитационного поля зависит только от одной пространственной координаты (например, x). Воспользовавшись результатами (7), (8) из [2], получаем, что классическая часть скалярного поля является решением уравнения

$$\Box\Phi + m^2\Phi = 0,$$

а квантовая часть определяется уравнением

$$\Box\mu + m^2\mu^2 = 0.$$

Для квантовой поправки гравитационного поля первое из условий (3) сводится к $w_{11} = 0$, и уравнения движения принимают вид

$$\frac{\partial^2 w_{st}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w_{st}}{\partial x^2},$$

где

$$\frac{\partial^2 w_{st}}{\partial x^2} = \left(\Phi_{nn}\Phi - m^2\Phi^2\right) w_{st}.$$

Таким образом, квантовая поправка гравитационного поля представляет собой плоские дважды поляризованные волны. Операторы рождения-уничтожения квантов этого поля описываются уравнениями (4), а гамильтониан системы взаимодействующих полей при этом является генератором трансляций по времени.

Однако если скалярное поле отсутствует, то предложенная схема нуждается в некоторой корректировке, поскольку в соответствии с (7), (8) из [2] F_n^{st} и F_{nnst} на поверхности Σ равны нулю, и выполнение требования (2) из [2] невозможно.

Для этого случая определим преобразование Боголюбова следующим образом:

$$\gamma_{st}\left(x\right)=K\delta_{st}+u_{st}(x'), \qquad \gamma_n^{st}(x)=u_n^{st}\left(x'\right),$$

тогда дополнительное условие ([2], (2)) принимает вид

$$\int u_n^{st}\left(x'\right)N_{st}^{\alpha}\left(x'\right)=0,$$

а a^{α} как функции исходных переменных определяются уравнениями

$$\frac{\delta a^{\beta}}{\delta\gamma_n^{st}(x)}=N_{st}^{\alpha}\left(x'\right)R_{\alpha}^{\beta}, \qquad \frac{\delta a^{\beta}}{\delta\gamma_{st}(x)}=0.$$

R_{α}^{β} — это матрица, обратная $\tilde{R}_{\gamma}^{\alpha}$, которая равна

$$\tilde{R}_{\gamma}^{\alpha}=-\int u_n^{st}\left(x'\right)N_{st\gamma}^{\alpha}\left(x'\right).$$

Производные по $\gamma_{st}\left(x\right)$ и $\gamma_n^{st}(x)$ ([2], (3)) задаются выражениями

$$\frac{\delta}{\delta\gamma_{st}(x)}=\frac{\delta}{\delta u_{st}(x')}, \qquad \frac{\delta}{\delta\gamma_n^{st}(x)}=\frac{\delta}{\delta u_n^{st}(x')}+\frac{\delta a^{\beta}}{\delta\gamma_n^{st}(x)}\left(S_{\beta}+\frac{\partial}{\partial a^{\beta}}\right).$$

Операторы координаты и импульса осцилляторов поля ([2], (5)) равны

$$\hat{q}_{st}(x)=F_{st}(x')+\hat{Q}_{st}(x')+A_{st}(x'), \qquad \hat{p}^{st}(x)=\hat{P}^{st}(x'),$$

где

$$K=\sqrt{2}, \qquad F_{st}(x')=\delta_{st},$$

$$\hat{Q}_{st}(x')=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(u_{st}\left(x'\right)+i\frac{\delta}{\delta u_n^{st}(x')}+r_{\alpha}N_{st}^{\alpha}\left(x'\right)\right),$$

$$\hat{P}^{st}(x')=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(u_n^{st}\left(x'\right)-i\frac{\delta}{\delta u_{st}(x')}\right),$$

$$A_{st}(x')=i\frac{\delta a^{\beta}}{\delta\gamma_n^{st}(x)}K_{\beta}.$$

Первый порядок в разложении гамильтониана равен нулю, а слагаемые второго порядка малости имеют вид

$$H(\hat{Q},\hat{P})=\left(\hat{P}^{st}\hat{P}_{st}-\frac{1}{2}\hat{P}^2\right)-\left(R^{st}(\hat{Q})-\frac{1}{2}R(\hat{Q})\delta^{st}\right)\hat{Q}_{st}-Y(\hat{Q}),$$

где $Y(\hat{Q})$ — квадратичная форма по $\hat{Q}$.

Предполагая, что операторы $\hat{Q}$ и $\hat{P}$ зависят только от x, и учитывая условия калибровки (5), получаем

$$H\left(\hat{Q},\hat{P}\right) = \left(\hat{P}^{st}\hat{P}_{st} - \frac{1}{2}\hat{P}^2\right) - \frac{1}{4}\hat{Q}_{st}\hat{Q}^{st}_{,11}.$$

Выделение нефизических переменных (1) определяется формулами

$$\hat{Q}_{st}(x') = \tilde{Q}_{st}(x') + q_{st}, \qquad \hat{P}^{st}(x') = \tilde{P}^{st}(x'), \qquad q_{st} = \frac{i}{\sqrt{2}}\frac{\delta r_\alpha}{\delta u^{st}_n(x')}\frac{\partial}{\partial r_\alpha}.$$

Таким образом, после редукции (2) гамильтониан принимает вид

$$H(\hat{Q},\hat{P}) = \int -\frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{\delta w_{st}}\frac{\delta}{\delta w^{st}} - \frac{1}{2}\frac{\delta^2}{\delta w^2}\right) - \frac{1}{2}w^{st}w_{st,11} -$$
$$- \frac{i}{2}\int w_{st,11}\frac{\delta r_\alpha}{\delta u^{st}_n}\frac{\partial}{\partial r_\alpha} + \frac{1}{8}\int\left(\frac{\delta r_\alpha}{\delta u^{st}_n}\right)_{,11}\frac{\delta r_\beta}{\delta u^{st}_n}\frac{\partial}{\partial r_\alpha \partial r_\beta}.$$

Если $N^{\gamma}_{st}(x')$ (которые пока никак не определены) выбрать так, чтобы их четность была противоположна четности $w_{st,11}$, то слагаемые, линейные по $\partial/\partial r_\alpha$, будут равны нулю. Последнее слагаемое в H обращается в нуль на векторе состояния вида $\Psi = (r_\alpha + r_\beta)\, f\,(x)\,.$

Слагаемые, квадратичные по w_{st}, имеют вид

$$H(\hat{Q},\hat{P}) = \int -\frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{\delta w_{st}}\frac{\delta}{\delta w^{st}} - \frac{1}{2}\frac{\delta^2}{\delta w^2}\right) - \frac{1}{2}w^{st}w_{st,11}.$$

Если w_{st} удовлетворяет условиям

$$w_{11} = 0, \qquad w_{st,xx} = \ddot{w}_{st} = -w_{st},$$

то квадратичная форма по w_{st} определяет набор независимых осцилляторов (2).

Итак, мы определили, что для стационарного случая нужна модификация метода. При квантовании пустого пространства на фоне классической метрики Минковского мы получаем плоские дважды поляризованные волны. При этом гамильтониан, конечно, не является генератором трансляций по времени.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, в серии статей [1, 2], продолжением которой является настоящая работа, решалась задача квантования бозонных полей на классическом фоне с помощью переменных Боголюбова. Совокупность полученных результатов:

1) уравнение движения классической части;
2) уравнение движения квантовой добавки;
3) энергетический спектр;
4) выражения для интегралов движения;

5) уравнения Гейзенберга;

6) явный вид оператора поля в терминах новых переменных — позволяет утверждать, что наша теория дает полное описание системы бозонных полей, квантованных на классическом фоне. При этом теория гарантирует точное выполнение законов сохранения в любом порядке теории возмущений и позволяет избежать проблемы нулевых мод.

Приложение
РАЗЛОЖЕНИЕ ГАМИЛЬТОНИАНА ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

Рассмотрим второй порядок разложения гамильтониана:

$$H_2 = \frac{1}{\sqrt{F}}\Bigg(-\frac{1}{2}\left(F_{n_{kl}}F_n^{kl} - \frac{1}{2}F_n^2\right)F^{st}A_{st} + \left(A_n^{st}F_{n_{st}} + F_n^{st}D_{st} + \hat{P}^{st}S_{st}\right) -$$

$$- F_n\left(A_n + A_{st}F_n^{st} + \hat{Q}_{st}\hat{P}^{st}\right) - \frac{1}{2}F_n(\hat{P} + F_n^{st}\hat{Q}_{st})^2 \times$$

$$\times \frac{1}{2}F^{st}\hat{Q}_{st}\left(\left(\hat{P}^{st}F_{n_{st}} + S_{st}F_n^{st}\right) - F_n(\hat{P} + F_n^{st}\hat{Q}_{st})\right)\Bigg) -$$

$$- \sqrt{F}\Bigg(\frac{1}{2}RF^{st}A_{st} + R(F,\hat{Q},A) + B^{st}R_{st} - \hat{Q}^{st}R_{st}(F,\hat{Q}) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(F^{st}R(F,\hat{Q}) - \hat{Q}^{st}R_{st}\right)F^{st}\hat{Q}_{st}\Bigg).$$

Рассмотрим слагаемые:

$$a\sqrt{F}F^{st}F^{st}\hat{Q}_{st}R_{st}(F,\hat{Q}) = \mathrm{Div} + \sqrt{F}F^{st}\left(a\hat{Q}\right)_{;t}\Gamma^l_{sl}(\hat{Q}) - \sqrt{F}F^{st}\left(a\hat{Q}\right)_{;l}\Gamma^l_{st}(\hat{Q}).$$

Обозначим

$$r^s = (a\hat{Q})_{;t}F^{st}.$$

Прямые вычисления показывают, что

$$a\sqrt{F}F^{st}\hat{Q}R_{st}(F,\hat{Q}) = \sqrt{F}\hat{Q}\left(F^{sp}r^t_{;p} - F^{st}r^p_{;p}\right) =$$
$$= \sqrt{F}\left(F^{sp}c^t_{;p} - F^{st}c^p_{;p}\right)\hat{Q}_{st}\hat{Q}_{st}F^{st} + a\sqrt{F}F^{st}\left(F^{sp}F^{tr} - F^{st}F^{pr}\right)\hat{Q}_{st,_{pr}},$$

и слагаемые принимают вид

$$a\sqrt{F}\hat{Q}^{st}R_{st}(F,\hat{Q}) = \sqrt{F}\left(a\hat{Q}^{st}\right)_{;t}\Gamma^l_{sl}(\hat{Q}) - \sqrt{F}\left(a\hat{Q}^{st}\right)_{;l}\Gamma^l_{st}(\hat{Q}) =$$
$$= \sqrt{F}\left(F^{sp}a_{;tp}\hat{Q}^{st} - F^{st}a_{;tp}\hat{Q}^{pt}\right)\hat{Q}_{st} + a\sqrt{F}F^{st}\left(F^{sp}\hat{Q}^{st}_{;tp} - F^{st}\hat{Q}^{pt}_{;tp}\right)\hat{Q}_{st}.$$

Так что

$$H_2 = \int\limits_{\Sigma} \left(F_{n_{st}} A_n^{st} + D_{st} F_n^{st} + \hat{Q}_{n_{st}} \hat{P}^{st} + aH_2 \right).$$

Здесь

$$aH_2 = aH_2(A) + aH_2(\hat{P}, \hat{Q}),$$

где

$$aH_2(A) = \frac{2a}{\sqrt{F}} \left(F_{n_{st}} - \frac{1}{2} F_n F_{st} \right) A_n^{st} -$$

$$- \frac{a}{2\sqrt{F}} \left(F_{n_{kl}} F_n^{kl} - \frac{1}{2} F_n^2 \right) F^{st} A_{st} + \frac{2a}{\sqrt{F}} \left(F_n^{st} F_n^{kl} F_{n_{st}} - \frac{1}{2} F_n F_n^{st} \right) A_{st} +$$

$$+ a\sqrt{F} \left(R^{st} - \frac{1}{2} F^{st} R \right) A_{st} + \sqrt{F} \left(F^{sl} c^t_{;l} - F^{st} c^l_{;l} \right) A_{st},$$

$$H_2(\hat{P}, \hat{Q}) = \frac{1}{\sqrt{F}} \Bigg(2F_n^{st} F_{st} \hat{P}^{st} \hat{Q}_{st} + F_n^{st} F_n^{st} \hat{Q}_{st} \hat{Q}_{st} + \hat{P}^{st} \hat{P}_{st} +$$

$$+ 2F_n^{st} F_{st} \hat{P}^{st} \hat{Q}_{st} - \frac{1}{2} \hat{P}^2 - F_n^{st} F_{st} \hat{P}^{st} \hat{Q}_{st} - \frac{1}{2} F_n^{st} F_n^{st} \hat{Q}_{st} \hat{Q}_{st} - \frac{1}{2} F_n^{st} F_{st} \hat{P}^{st} \hat{Q}_{st} -$$

$$- \frac{1}{2} F_n^{st} F_{st} \hat{P}^{st} \hat{Q}_{st} - \frac{1}{2} F_n^{st} F_n^{st} \hat{Q}_{st} \hat{Q}_{st} + \frac{1}{2} F_n \hat{P}^{st} \hat{Q}_{st} + \frac{1}{2} F_n F^{st} F_n^{st} \hat{Q}_{st} \hat{Q}_{st} \Bigg) -$$

$$- \sqrt{F} \left(\left(R^{st} \hat{Q}^{st} \hat{Q}_{st} - \frac{1}{2} R^{st} F^{st} \hat{Q}_{st} \hat{Q}_{st} \right) - \hat{Q}^{st} R_{st}(\hat{Q}) - \frac{1}{2} R(\hat{Q}) F^{st} \hat{Q}_{st} \right).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Останина М. В., Томази-Вшивцева П. А.* Квантование нелинейных полей с помощью переменных Боголюбова // Письма в ЭЧАЯ. 2021. Т. 18, № 6(238). С. 534–540.
2. *Останина М. В., Томази-Вшивцева П. А.* Переменные Боголюбова для системы взаимодействующих полей // Письма в ЭЧАЯ. 2021. Т. 18(239), № 7. С. 585–598.
3. *Боголюбов Н. Н.* Об одной новой форме адиабатической теории возмущений в задаче о взаимодействии частицы с квантовым полем // Укр. мат. журн. 1950. Т. 2, № 2. С. 3–24.
4. *Хрусталев О. А., Чичикина М. В., Тимофеевская О. Д.* Пространство состояний квантованного гравитационного поля // Вестн. Моск. ун-та. Физика. Астрономия. 2002. Т. 51, № 2. С. 224–233.

Получено 28 января 2021 г.