

РЕЗОНАТОР С ГОФРИРОВАННОЙ ГРАНИЦЕЙ: ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

*А. С. Багмутов*¹, *Е. С. Трифанова*², *И. Ю. Попов*³

Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия

Мы рассматриваем двумерную квантовую систему, состоящую из резонатора с условием Неймана, к которому вдоль границы через малые отверстия присоединены N малых подобных резонаторов. Основной целью является исследование предельного случая при $N \rightarrow \infty$. Показано, что в пределе задача сводится к краевой задаче с энергозависимым граничным условием типа условия Робена. Используются асимптотические методы, а также приближения собственных состояний системы, полученные с использованием модели точечных отверстий. Результаты сравниваются с полученными численно значениями.

We consider a two-dimensional quantum system consisting of a resonator with the Neumann condition, to which N small similar resonators are attached along the boundary through small holes. The main goal is to study the limiting case for $N \rightarrow \infty$. It is shown that in the limit the problem is reduced to a boundary value problem with an energy-dependent boundary condition of the Robin type. Asymptotic methods are used, as well as approximations of the eigenstates of the system obtained using the pinhole model. The results are compared with the numerically obtained values.

PACS: 02.30.Tb; 11.10.Jj

В данной работе рассматривается лапласиан с граничными условиями Неймана в квадрате, с возмущением в виде присоединенных вдоль одной из границ резонаторов Гельмгольца. Такие задачи широко освещены в литературе [1–3]. Для исследования смещения спектра из-за присоединения резонаторов используются такие методы, как модель точечных отверстий [4–6] и анализ асимптотик [7–12]. Интересным является вопрос о предельном переходе при стремлении количества присоединенных резонаторов к бесконечности [13–15] при различных соотношениях между малыми параметрами задачи. В настоящее время метаматериалы на основе резонаторов Гельмгольца [16] успешно используются, например, для решения задачи подавления шумов [17]. Предельное поведение систем представляет физический интерес, так как использование резонаторов с нужными параметрами позволит моделировать сложные непрерывные граничные условия.

¹E-mail: bagmutov94@mail.ru

²E-mail: etrifanova@gmail.com

³E-mail: popov1955@gmail.com

В недавней работе [14] с использованием асимптотического и вариационного анализа был разобран случай присоединения малых резонаторов через малые коридоры конечной ширины. В [15] используется модель точечных отверстий для резонаторов, соединяющихся без коридоров. Мы продолжаем изучение подобных систем и предлагаем два метода аппроксимации предельной задачи с численной проверкой сходимости.

Рассмотрим двумерную систему, состоящую из большого резонатора с граничным условием Неймана, к которому вдоль верхней границы через малые отверстия присоединены N одинаковых резонаторов меньшего размера (рис. 1). Выписываются явные собственные состояния системы с использованием модели точечных отверстий.

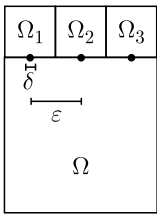


Рис. 1. Геометрия системы

Рассматривая бесконечную последовательность таких систем с увеличивающимся N , мы получаем предельные значения для собственных состояний и выписываем предельные граничные условия. Далее, для системы с точной геометрией, т. е. с отверстиями конечного радиуса, рассматриваются асимптотики собственных функций при стремлении к нулю размера отверстия, расстояния между отверстиями и собственной энергии к собственному значению резонатора. Приводится предельное граничное условие из асимптотик. С помощью метода конечных элементов строятся численные приближения для собственных функций и исследуется сходимость граничных условий к предельному с увеличением N .

Опишем систему, изображенную на рис. 1. Большой квадратный резонатор обозначен Ω ; Ω_i — малые квадратные резонаторы со стороной ε ; δ — ширина отверстий; N — количество меньших резонаторов с отверстиями.

Рассмотрим оператор Лапласа в $L^2(\Omega) \oplus \sum_i L^2(\Omega_i)$ (здесь и далее символы $\oplus, \oplus \sum_i$ обозначают прямую (ортогональную) сумму пространств) и ограничим его на множество функций, обнуляющихся в точках отверстий. Полученный симметрический оператор A будем расширять до самосопряженного. Используя теорию самосопряженных расширений симметрических операторов (в частности, формулу Неймана [18]), мы получаем выражение для области определения сопряженного оператора и общий вид функций из области определения этого сопряженного оператора:

$$D(A^*) = D(-\Delta) \oplus N_{k_0^2}(A) \oplus \sum_i N_{k_0^2}^i(A),$$

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \dots \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{u}_0 \\ \tilde{u}_1 \\ \dots \\ \tilde{u}_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_i \alpha_i G(x, x_i, k_0) \\ \beta_1 G_1(x, x_1, k_0) \\ \dots \\ \beta_N G_N(x, x_N, k_0) \end{pmatrix}.$$

Здесь $N_{k_0^2}(A)$ — дефектные подпространства оператора; x_i — точки отверстий; $G(x, x_i, k_0)$, $G_i(x, x_i, k_0)$ — функции Грина лапласиана Неймана. Используя известные асимптотики функций Грина, $G(x, x_i, k_0) = -(1/\pi) \ln(|x - x_i|) + O(1)$, мы получаем

условия на a_i, b_i , обнуляющие граничную форму $(A^* \psi, \varphi) - (\psi, A^* \varphi)$:

$$\begin{cases} \alpha_i = -\beta_i, \\ \beta_i g^{\text{in}} = \sum_{j \neq i} \alpha_j G(x, x_j, k_0) + \alpha_i g_i^{\text{ex}}. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $g_i^{\text{ex}} = [G(x, x_i, k) - G(x, x_i, k_0)]_{x \rightarrow x_i}$, $g^{\text{in}} = [G_i(x, x_i, k) - G_i(x, x_i, k_0)]_{x \rightarrow x_i}$ внутри большого и малого резонаторов соответственно. Условия выбраны как наиболее соответствующие физическому смыслу. Параметр k_0 — произвольный мнимый параметр расширения, который наиболее хорошо обеспечивает соответствие точному решению с конечным отверстием при $k_0 = (2i/\delta) e^{-\gamma}$ (см. [4]), где $\gamma = 0,577 \dots$ — постоянная Эйлера.

Покажем, что следующая краевая задача является предельной для последовательности модельных, при $N \rightarrow \infty$:

$$\begin{cases} -\Delta \psi = k^2 \psi, \\ \frac{\partial \psi}{\partial n} \Big|_{\partial \Omega} = r(x, k) \psi|_{\partial \Omega}. \end{cases} \quad (2)$$

Задача имеет интегральное представление: $\psi(x) = \int_{\partial \Omega} r(x', k) \psi(x') G(x, x', k) dx'$. Пусть скорости уменьшения δ и ε будут зависимы: $[g^{\text{in}}]^{-1} = \varepsilon r(k, x_i)$. Из (1), умножая на $G(x, x_i, k)$ и складывая, получаем интегральную сумму, которая сходится к интегралу в интегральном уравнении для собственной функции задачи (2):

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i G(x, x_i, k) = - \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon r(k, x_i) \left(\sum_{j \neq i} \alpha_j G(x, x_j, k_0) + \alpha_i g_i^{\text{ex}} \right) G(x, x_i, k).$$

Таким образом, последовательность собственных функций модельных задач сходится к собственной функции предельной задачи (2).

Другой способ исследовать предельные граничные условия системы — рассмотреть асимптотики собственных функций для точных модельных задач (т.е. без замены малых отверстий точечными) при малых ε, δ и $k^2 - \lambda_n$, где λ_n — собственное значение большого резонатора. Будем предполагать, что малые параметры связаны ε и δ следующим образом: $\varepsilon = \delta^\theta$, $\theta \in (0, 1)$ (при таком условии влияние размера отверстий и расстояния между ними одинакового порядка). Старший член асимптотического разложения имеет вид $k^2 - \lambda_n = \tau \ln^{-1} \varepsilon + o(\ln^{-1} \varepsilon)$. Тогда можно выделить главные члены собственной функции каждой модельной задачи и согласовать их при $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\begin{cases} \psi(x) = -\frac{\alpha_i}{\pi} \ln \varepsilon + o(1), & x \rightarrow x_i, \quad x \in \Omega_i, \\ \psi(x) = -\alpha_i \left[-\frac{\tau}{\pi} + \frac{4}{\varepsilon^2} \cos^2 \left(\frac{\pi x_i}{\varepsilon} \right) \right] - \\ \quad - \sum_{j \neq i} \alpha_j \left[\frac{4}{\varepsilon^2} \cos \left(\frac{\pi x_i}{\varepsilon} \right) \cos \left(\frac{\pi x_j}{\varepsilon} \right) - \frac{\theta \tau}{\pi} \right] + o(1), & x \rightarrow x_i, \quad x \in \Omega. \end{cases}$$

Согласование старших членов асимптотик в окрестностях отверстий приводит к системе N линейных уравнений для коэффициентов $\alpha_j, j = 1, 2, \dots, N$. Решая ее, находим

$$\psi(x) = \frac{b}{2} (2 - \theta) [k^2 - \lambda_n] \sum_{i=1}^N G(x, x_i, k) (\psi(x_i) + o(1)) \frac{b}{N},$$

где $b = \varepsilon N$ — длина стороны большого резонатора. Легко видеть, что выражение в правой части представляет собой интегральную сумму и при $N \rightarrow \infty$ сходится к интегралу, а все уравнение в пределе превращается в следующее интегральное уравнение для собственных функций:

$$\psi(x) = \frac{b}{2} (2 - \theta) [k^2 - \lambda_n] \int_{\partial\Omega} G(x, x', k) \psi(x') dx'.$$

Это уравнение соответствует следующему граничному условию для предельной задачи:

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = \frac{b}{2} (2 - \theta) [k^2 - \lambda_n] \psi \Big|_{\partial\Omega} = U(k^2) \psi \Big|_{\partial\Omega}. \quad (3)$$

Для модельных задач при фиксированных N были получены численные решения. На рис. 2 изображены графики зависимости $(\psi'/\psi)(k^2)$ в среднем по всей границе с резонаторами для модельных задач с фиксированными $N = 10, 20, \dots, 90, 100, 200$ (во всех случаях среднее квадратическое отклонение $\sigma \ll 1$), т. е. каждая точка — одно из численно найденных связанных состояний с фиксированными N и k^2 . Использован параметр $\theta = 0,8$. На рис. 2, а пунктиром показана функция, полученная теоретически $-C [g_i^{\text{in}}]^{-1}$, умноженная на константу C , значение которой определяется методом взятия производной на границе: для представленных графиков производная берется на малом расстоянии от стенки в точке напротив каждого отверстия. Таким образом, показано, что для модельных собственных функций $(\psi'(x_i + \vec{n}\xi))/\beta_i$

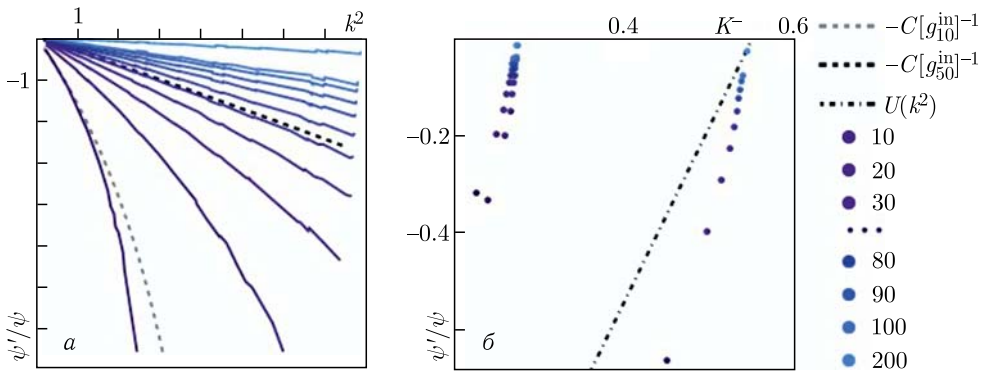


Рис. 2. а) Отношение производной функции к ее значению в зависимости от энергии состояния. Разные графики соответствуют системам с разным N . б) Тот же график в другом масштабе, но точки не соединены (горизонтальными) линиями. Штрихпунктирной линией обозначены функции, полученные аналитически

при малых ξ не зависит от i и k^2 . Для улучшения сходимости $G(x, x', k)$ при численных расчетах можно использовать формулу из [19]. На рис. 2, б штрихпунктирной линией показана функция $(b/2)(2 - \theta)[k^2 - \lambda_n]$; точки, к которым сходятся последовательности, — собственные значения большого резонатора. Найденные значения при возрастании N сходятся к полученной теоретически функции $U(k^2)$, см. (3). Также видно, что парные значения, сходящиеся к $\lambda < 0,4$, с увеличением N разворачиваются параллельно $U(k^2)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Используя два аналитических подхода, мы рассмотрели геометрическое возмущение резонаторами Гельмгольца области, в которой действует оператор Лапласа с граничным условием Неймана. В результате получены два согласующихся описания предельных граничных условий. Далее, с использованием численных методов, мы проверили сходимость граничных значений полученных численно собственных функций к предельным значениям в связи с увеличением количества резонаторов. Численные результаты соответствуют аналитическим выводам.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда в рамках гранта 22-11-00046.

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Courant R., Hilbert D. *Methods of Mathematical Physics*. V. 1. New York: Wiley-Intersci., 1953.
2. Arrieta J.M., Hale J.K., Han Q.J. Eigenvalue Problems for Nonsmoothly Perturbed Domains // *Diff. Equations*. 1991. V. 91. P. 24–52.
3. Sanchez-Palencia E. *Nonhomogeneous Media and Vibration Theory*. Berlin; New York: Springer-Verlag, 1980.
4. Popov I. Yu. Extension Theory and Localization of Resonances for Domains of Trap Type // *Mat. Sb.* 1990. V. 181, No. 10. P. 1366–1390.
5. Popov I. Yu. The Resonator with Narrow Slit and the Model Based on the Operator Extensions Theory // *J. Math. Phys.* 1992. V. 33, No. 11. P. 3794–3801.
6. Pavlov B. S. The Theory of Extensions and Explicitly-Soluble Models // *Russ. Math. Surveys*. 1987. V. 42, No. 6. P. 127–168.
7. Gadyl'shin R. R. Existence and Asymptotics of Poles with Small Imaginary Part for the Helmholtz Resonator // *Russ. Math. Surveys*. 1997. V. 52, No. 1. P. 1–72.
8. Ильин А. М. *Согласование асимптотических разложений решений краевых задач*. М.: Наука, 1989.
9. Popov I. Yu. Waveguides Coupled via Apertures: Asymptotic Form of the Eigenvalue // *Tech. Phys. Lett.* 1999. V. 25, No. 3. P. 57–59.
10. Trifanova E. S. Resonance Phenomena in Curved Quantum Waveguides Coupled via Windows // *Tech. Phys. Lett.* 2009. V. 35, No. 2. P. 180–182.
11. Borisov D., Exner P. Distant Perturbation Asymptotics in Window-Coupled Waveguides. I. The Nonthreshold Case // *J. Math. Phys.* 2006. V. 47, No. 11. P. 113502-1–113502-24.

12. Vorobiev A. M., Bagmutov A. S., Popov A. I. On Formal Asymptotic Expansion of Resonance for Quantum Waveguide with Perforated Semitransparent Barrier // *Nanosystems: Phys. Chem., Math.* 2019. V. 10, No. 4. P. 415–419.
13. Khrabustovskiy A. Homogenization of Eigenvalue Problem for Laplace–Beltrami Operator on Riemannian Manifold with Complicated “Bubble-Like” Microstructure // *Math. Meth. Appl. Sci.* 2009. V. 32. P. 2123–2137.
14. Cardone G., Khrabustovskiy A. Neumann Spectral Problem in a Domain with Very Corrugated Boundary // *J. Differ. Equations.* 2015. V. 259, No. 6. P. 2333–2367.
15. Popov I. Yu., Blinova I. V., Popov A. I. A Model of a Boundary Composed of the Helmholtz Resonators // *Complex Var. Elliptic Eq.* 2021. V. 66, No. 8. P. 1256–1263.
16. Ni X., Chen K., Weiner M., Apigo D. J., Prodan C., Alu A., Prodan E., Khanikaev A. B. Observation of Hofstadter Butterfly and Topological Edge States in Reconfigurable Quasi-Periodic Acoustic Crystals // *Commun. Phys.* 2019. V. 2. P. 55.
17. Huang S., Fang X., Wang X., Assouar Badreddine, Cheng Qian, Li Yong. Acoustic Perfect Absorbers via Helmholtz Resonators with Embedded Apertures // *J. Acoust. Soc. Am.* 2019. V. 145. P. 254.
18. Birman M. S., Solomyak M. Z. *Spectral Theory of Self-Adjoint Operators in Hilbert Space.* Dordrecht: D. Reidel Publ. Company, 1986.
19. McCann R. C., Hazlett R. D., Babu D. K. Highly Accurate Approximations of Green’s and Neumann Functions on Rectangular Domains // *Proc. R. Soc. London. A.* 2001. V. 457. P. 767–772.

Получено 14 июля 2022 г.