Письма в ЭЧАЯ. 2023. Т. 20, № 3(248). С. 291–297

МНОГОПЕТЛЕВЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ В $\mathcal{N} = 1$ СКЭД С N_f-АРОМАТАМИ, РЕГУЛЯРИЗОВАННОЙ ВЫСШИМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

И. Е. Широков

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва

Рассматривается $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричная квантовая электродинамика (СКЭД) с N_f-ароматами, регуляризованная высшими производными. С помощью новой программы вычисляются вклады в аномальную размерность суперполей материи вплоть до трехпетлевого приближения. На основании этого вычисления, а также известного NSVZ-соотношения получена β-функция данной теории в четырехпетлевом приближении. Затем проводится исследование схемозависимости этих результатов.

We consider $\mathcal{N} = 1$ supersymmetric quantum electrodynamics (SQED) with N_f flavors regularized by higher derivatives. The new program is used to calculate the contributions to the anomalous dimension of matter superfields up to the three-loop approximation. Using this calculation and the well-known NSVZ relation, we obtain the β function of this theory in the four-loop approximation. Then, we study scheme-dependence of these results.

PACS: 11.30.Pb

ВВЕДЕНИЕ

Многопетлевые вычисления в $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных теориях представляют интерес как с теоретической, так и с феноменологической точек зрения [?]. Чаще всего такие вычисления [?, ?] проводят, используя регуляризацию размерной редукцией. Однако эта регуляризация является математически противоречивой [?]. При устранении этой проблемы данная регуляризация может нарушить суперсимметрию в высших петлях [?].

Более удачной в этом случае является регуляризация высшими ковариантными производными [?], которая легко обобщается на суперсимметричный случай [?, ?]. При ее использовании удалось доказать множество интересных утверждений. Так, хорошо известное NSVZ-соотношение [?], связывающее β-функцию с аномальной размерностью в предыдущих порядках, было обнаружено достаточно давно, однако долгое время не было его аккуратного всепетлевого доказательства. Оказалось, что для ренормгрупповых функций, определенных в терминах голых констант связи, при использовании регуляризации высшими ковариантыми производными NSVZ-соотношение справедливо во всех петлях как в абелевом [?], так и в неабелевом случаях [?]. Кроме того, для ренормгрупповых функций, определенных в терминах перенормированной константы связи, это соотношение верно также во всех петлях в определенном классе схем перенормировки [?].

Однако нужно отметить, что, как показывает практика, вычисления в рамках регуляризации высшими производными являются технически достаточно трудоемкими. По этой причине остро стоит вопрос возможности реализации этих вычислений на компьютере. Символьные вычисления на компьютере в рамках квантовой теории поля ведутся уже много лет [?]. Но в случае вычислений в формализме суперполей в суперпространстве существует не так много программ, способных их производить. Такими программами, например, являются SUSYCAL [?] и пакет для Mathematica SusyMath [?]. Однако эти программы способны только сводить конкретное выражение, заданное в терминах суперполей, к стандартным импульсным интегралам, и, кроме того, эти проекты уже много лет не развиваются и недоступны для скачивания.

В силу упомянутых выше причин была создана новая программа [?], способная не только производить подобные вычисления, но также и генерировать суперграфы. Она способна вычислять вклады в аномальную размерность суперполей материи в рамках $\mathcal{N}=1$ СКЭД с N_f-ароматами. При этом с помощью этой программы уже был получен новый результат, а именно, произведено вычисление аномальной размерности в этой теории в трех петлях [?].

1. РАССМАТРИВАЕМАЯ ТЕОРИЯ

Мы рассматриваем $\mathcal{N}=1$ суперсимметричную электродинамику с N_f-ароматами, регуляризованную высшими производными. Регуляризованное действие теории имеет вид

$$S=\frac{1}{4e_0^2}\mathrm{Re}\int d^4x\,d^2\theta\,W^a R\left(\frac{\partial^2}{\Lambda^2}\right)W_a+\frac{1}{4}\sum_{\alpha=1}^{N_f}\int d^4x\,d^4\theta\left(\phi_\alpha^*\,\mathrm{e}^{2V}\phi_\alpha+\widetilde{\phi}_\alpha^*\,\mathrm{e}^{-2V}\widetilde{\phi}_\alpha\right), \quad (1)$$

где e_0^2 — голая константа связи; V — калибровочное суперполе; ϕ_α — N_f киральных суперполей материи; $R(\partial^2/\Lambda^2)$ — функция-регулятор, на которую накладываются следующие условия:

$$R(0)=1, \qquad R(\infty)=\infty. \quad (2)$$

Эта теория является перенормируемой, благодаря чему все расходимости могут быть устранены переопределением константы связи, а также киральных суперполей ϕ_α и $\widetilde{\phi}_\alpha$. Заметим, что все киральные суперполя имеют одну константу перенормировки Z, такую что $\phi_{\alpha,R}=\sqrt{Z}\phi_\alpha$, $\widetilde{\phi}_{\alpha,R}=\sqrt{Z}\widetilde{\phi}_\alpha$ для всех $\alpha=1,\ldots,N_f$.

Удобно описывать расходимости с помощью ренормгрупповых функций (РГФ). В соответствии с работой [?] необходимо различать РГФ, определенные в терминах голых констант связи,

$$\beta(\alpha_0)=\left.\frac{d\alpha_0}{d\ln\Lambda}\right|_{\alpha=\mathrm{const}}, \qquad \gamma(\alpha_0)=-\left.\frac{d\ln Z}{d\ln\Lambda}\right|_{\alpha=\mathrm{const}}, \quad (3)$$

и РГФ, определенные в терминах перенормированных констант связи

$$\widetilde{\beta}(\alpha)=\left.\frac{d\alpha}{d\ln\mu}\right|_{\alpha_0=\mathrm{const}}, \qquad \widetilde{\gamma}(\alpha)=\left.\frac{d\ln Z}{d\ln\mu}\right|_{\alpha_0=\mathrm{const}}, \quad (4)$$

где μ — точка перенормировки.

РГФ (**??**) не зависят от перенормировочного предписания, но зависят от регуляризации. В соответствии с [**?**], в случае использования регуляризации высшими производными они будут удовлетворять NSVZ-соотношению [**?**]

$$\frac{\beta(\alpha_0)}{\alpha_0^2} = \frac{N_f}{\pi}\left(1 - \gamma(\alpha_0)\right) \tag{5}$$

во всех петлях при любом перенормировочном предписании.

В то же время РГФ, определенные формулами (**??**), зависят и от регуляризации, и от схемы перенормировки. Для них формула, аналогичная (**??**), справедлива для определенного класса схем, которые называются «NSVZ-схемами». Некоторые из них даются HD+MSL предписанием [**?**], когда теория регуляризуется высшими производными, а расходимости устраняются минимальными вычитаниями логарифмов.

2. ПРОГРАММА ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Явные квантовые вычисления в $\mathcal{N}=1$ супепространстве достаточно сложны, поэтому была создана специальная программа C++ для работы с ними [**?**]. Она способна вычислять двухточечные функции Грина материи в $\mathcal{N}=1$ суперсимметричной электродинамике с N_f-ароматами. Программа выполняет следующие этапы вычисления:

1) генерацию всех суперграфов в необходимом порядке теории возмущений по заданным вершинам и пропагаторам;

2) работу с D-алгеброй, которая состоит в стандартной процедуре убирания суперсимметричных ковариантных производных и взятия интегралов по полному суперпространству;

3) устранение объектов со спинорными индексами посредством взятия следов γ-матриц и пр.;

4) упрощение оставшихся импульсных интегралов приведением подобных, в том числе с учетом замен переменных интегрирования.

В данном случае сами импульсные интегралы необходимо вычислять вручную.

Пример входного и выходного файлов можно видеть в работе [**?**]. Для вычисления в двух петлях в неминимальной калибровке время работы составило несколько секунд [**?**]. Полученная на основе этого вычисления двухпетлевая аномальная размерность полностью совпадает с результатом статьи [**?**].

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ТРЕХПЕТЛЕВОЙ АНОМАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ И ЧЕТЫРЕХПЕТЛЕВОЙ β-ФУНКЦИИ

Вычисляя суперграфы с двумя внешними линиями материи, можно получить функцию G, которая связана с вкладом в эффективное действие следующим образом:

$$\Gamma^{(2)}_\phi = \frac{1}{4}\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, d^4\theta \sum_{\alpha=1}^{N_f}\Big(\phi^*_\alpha(p,\theta)\phi_\alpha(-p,\theta) + \widetilde{\phi}^*_\alpha(p,\theta)\widetilde{\phi}_\alpha(-p,\theta)\Big)\, G(\alpha_0,\Lambda/p). \tag{6}$$

Если функция G известна, то аномальную размерность, определенную в терминах голых констант связи, можно получить из следующего выражения:

$$\gamma(\alpha_0) = \frac{d\ln G}{d\ln\Lambda}\bigg|_{\alpha=\mathrm{const}}; \quad p\to 0. \tag{7}$$

Все диаграммы, дающие вклады в аномальную размерность в трех петлях, были получены с помощью программы, описанной в предыдущем разделе, время ее работы в этом случае составило порядка 15 мин [?]. Результат является достаточно громоздким, его можно найти в работе [?]. Нужно отметить, что вычисления проводились при произвольном параметре калибровки ξ_0, но калибровочная зависимость исчезла в соответствии с общими теоремами. Этот факт является важной проверкой правильности вычисления.

Интегралы можно взять с помощью метода полиномов Чебышева [?]. Результат для аномальной размерности, определенной в терминах голых констант связи, имеет вид

$$\gamma(\alpha_0) = -\frac{\alpha_0}{\pi} + \frac{\alpha_0^2}{2\pi^2} + \frac{\alpha_0^2 N_f}{\pi^2}\left(\ln a + 1 + \frac{A_1}{2}\right) - \frac{\alpha_0^3}{2\pi^3} - \\ - \frac{\alpha_0^3 N_f}{\pi^3}\left(\ln a + \frac{3}{4} + C\right) - \frac{\alpha_0^3 (N_f)^2}{\pi^3}\left((\ln a + 1)^2 - \frac{A_2}{4} + D_1 \ln a + D_2\right) + O(\alpha_0^4), \tag{8}$$

где A_1, A_2, C, D_1, и D_2 — численные параметры, зависящие от регулятора $R(x)$, выражения которых приведены в работе [?]. Используя формулу (??), получаем выражение для четырехпетлевой β-функции:

$$\beta(\alpha_0) = \frac{\alpha_0^2 N_f}{\pi} + \frac{\alpha_0^3 N_f}{\pi^2} - \frac{\alpha_0^4 N_f}{2\pi^3} - \frac{\alpha_0^4 (N_f)^2}{\pi^3}\left(\ln a + 1 + \frac{A_1}{2}\right) + \frac{\alpha_0^5 N_f}{2\pi^4} + \frac{\alpha_0^5 (N_f)^2}{\pi^4} \times \\ \times \left(\ln a + \frac{3}{4} + C\right) + \frac{\alpha_0^5 (N_f)^3}{\pi^4}\left((\ln a + 1)^2 - \frac{A_2}{4} + D_1 \ln a + D_2\right) + O(\alpha_0^6). \tag{9}$$

4. РГФ, ОПРЕДЕЛЕННЫЕ В ТЕРМИНАХ ПЕРЕНОРМИРОВАННОЙ КОНСТАНТЫ СВЯЗИ

В начале опишем алгоритм построения РГФ, определенных в терминах перенормированной константы связи.

1. С использованием выражения для $\alpha(\alpha_0)$ и $\ln Z$ в предыдущих порядках функции $\beta(\alpha_0)$ и $\gamma(\alpha_0)$ должны быть переписаны в терминах перенормированной константы связи α. Результат подставляется в левую часть уравнений (??).

2. Интегрируя уравнения (??), получаем $\alpha_0(\alpha, \ln\Lambda/\mu)$ и $\ln Z(\alpha, \ln\Lambda/\mu)$. Они будут содержать несколько постоянных интегрирования, которые фиксируют схему вычитаний в рассматриваемом приближении.

3. Затем необходимо построить функции $\alpha(\alpha_0, \Lambda/\mu)$ и $\ln Z(\alpha_0, \ln\Lambda/\mu)$.

4. Функции $\alpha(\alpha_0, \Lambda/\mu)$ и $\ln Z(\alpha_0, \Lambda/\mu)$ подставляются в уравнения (??).

5. Полученные РГФ должны быть записаны в терминах перенормированной константы связи. После этого все $\ln\Lambda/\mu$ должны сократить друг друга, что является подтверждением правильности вычисления.

В соответствии с работой [**?**], после применения этого алгоритма, получаются следующие выражения для аномальной размерности и β-функции:

$$\widetilde{\gamma}(\alpha) = -\frac{\alpha}{\pi} + \frac{\alpha^2}{2\pi^2} + \frac{\alpha^2 N_f}{\pi^2}\left(\ln a + 1 + \frac{A_1}{2} + g_{1,0} - b_{1,0}\right) - \frac{\alpha^3}{2\pi^3} + \\ + \frac{\alpha^3 N_f}{\pi^3}\left(-\ln a - \frac{3}{4} - C - b_{2,0} + b_{1,0} - g_{2,0} + g_{1,0}\right) + \frac{\alpha^3 (N_f)^2}{\pi^3}\left\{-\left(\ln a + 1 - b_{1,0}\right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{A_2}{4} - D_1 \ln a - D_2 + b_{1,0}A_1 - g_{2,1}\right\} + O(\alpha^4), \quad (10)$$

$$\frac{\widetilde{\beta}(\alpha)}{\alpha^2} = -\frac{d}{d\ln\mu}\left(\frac{1}{\alpha}\right)\Big|_{\alpha_0=\text{const}} = \frac{N_f}{\pi} + \frac{\alpha N_f}{\pi^2} - \frac{\alpha^2 N_f}{2\pi^3} - \frac{\alpha^2 (N_f)^2}{\pi^3} \times \\ \times \left(\ln a + 1 + \frac{A_1}{2} + b_{2,0} - b_{1,0}\right) + \frac{\alpha^3 N_f}{2\pi^4} + \frac{\alpha^3 (N_f)^2}{\pi^4}\left(\ln a + \frac{3}{4} + C + b_{3,0} - b_{1,0}\right) + \\ + \frac{\alpha^3 (N_f)^3}{\pi^4}\left\{\left(\ln a + 1 - b_{1,0}\right)^2 - b_{1,0}A_1 + b_{3,1} - \frac{A_2}{4} + D_1 \ln a + D_2\right\} + O(\alpha^4). \quad (11)$$

Известно, что вклады, пропорциональные $(N_f)^0$ в аномальной размерности, и вклады, пропорциональные $(N_f)^1$ в β-функции, являются схемно-независимыми [**?**]. При этом во всех петлях можно выбрать минимальную схему, в которой при определенном выборе констант $b_{1,0}, b_{2,0}, b_{3,0}, g_{1,0}, g_{2,0}, g_{3,0}$ все схемно-зависимые вклады становятся равными нулю [**?**].

Ответ в минимальной схеме имеет вид

$$\widetilde{\gamma}(\alpha) = -\frac{\alpha}{\pi} + \frac{\alpha^2}{2\pi^2} - \frac{\alpha^3}{2\pi^3} + O(\alpha^4), \quad (12)$$

$$\widetilde{\beta}(\alpha) = \frac{\alpha^2 N_f}{\pi} + \frac{\alpha^3 N_f}{\pi^2} - \frac{\alpha^4 N_f}{2\pi^3} + \frac{\alpha^5 N_f}{2\pi^4} + O(\alpha^6). \quad (13)$$

Этот результат совпадает со схемно-независимыми вкладами результата, полученного в $\overline{\text{DR}}$-схеме в работе [**?**]:

$$\widetilde{\gamma}_{\overline{\text{DR}}}(\alpha) = -\frac{\alpha}{\pi} + \frac{\alpha^2}{2\pi^2} + \frac{\alpha^2 N_f}{2\pi^2} - \frac{\alpha^3}{2\pi^3} + \frac{\alpha^3 N_f}{\pi^3}\left(1 - \frac{3}{2}\zeta(3)\right) + \frac{\alpha^3 (N_f)^2}{4\pi^3} + O(\alpha^4), \quad (14)$$

$$\frac{\widetilde{\beta}_{\overline{\text{DR}}}(\alpha)}{\alpha^2} = \frac{N_f}{\pi} + \frac{\alpha N_f}{\pi^2} - \frac{\alpha^2 N_f}{2\pi^3} - \frac{3\alpha^2 (N_f)^2}{4\pi^3} + \\ + \frac{\alpha^3 N_f}{2\pi^4} + \frac{\alpha^3 (N_f)^2}{\pi^4}\left(-\frac{5}{6} + \frac{3}{2}\zeta(3)\right) + \frac{\alpha^3 (N_f)^3}{12\pi^4} + O(\alpha^4). \quad (15)$$

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С помощью созданной недавно программы в рамках суперсимметричной квантовой электродинамики была вычислена трехпетлевая аномальная размерность суперполей материи. При этом в одной и двух петлях результат совпал с известным ранее.

Все вычисления проводились в произвольной ξ-калибровке. Отсутствие зависимости результата от калибровочного параметра является хорошей проверкой правильности вычисления. После взятия интегралов с применением техники полиномов Чебышева был получен результат для аномальной размерности, определенной в терминах голой константы связи. На основе этого результата с помощью NSVZ-соотношения также получена четырехпетлевая β-функция, определенная в терминах голой константы связи. РГФ были также переписаны в терминах перенормированной константы связи. Кроме того, оказалось, что во всех петлях возможно выбрать такую схему перенормировки, в которой в этих функциях остаются только схемно-независимые слагаемые. В вычисленных функциях эти схемно-независимые слагаемые совпали с известными выражениями, полученными в $\overline{\text{DR}}$-схеме.

Благодарности. Автор выражает благодарность К. В. Степаньянцу за существенную помощь во время проведения данного исследования, а также за внимательное чтение работы и полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mihaila L.* Precision Calculations in Supersymmetric Theories // Adv. High Energy Phys. 2013. V. 2013. P. 607807.
2. *Avdeev L. V., Tarasov O. V.* The Three-Loop Beta Function in the $N = 1$, $N = 2$, $N = 4$ Supersymmetric Yang–Mills Theories // Phys. Lett. B. 1982. V. 112. P. 356.
3. *Jack I., Jones D. R. T., North C. G.* $\mathcal{N} = 1$ Supersymmetry and the Three-Loop Anomalous Dimension for the Chiral Superfield // Nucl. Phys. B. 1996. V. 473. P. 308.
4. *Siegel W.* Inconsistency of Supersymmetric Dimensional Regularization // Phys. Lett. B. 1980. V. 94. P. 37.
5. *Avdeev L. V., Vladimirov A. A.* Dimensional Regularization and Supersymmetry // Nucl. Phys. B. 1983. V. 219. P. 262.
6. *Slavnov A. A.* Invariant Regularization of Nonlinear Chiral Theories // Nucl. Phys. B. 1971. V. 31. P. 301–315.
7. *Кривощеков В. К.* Инвариантная регуляризация для суперсимметричных калибровочных теорий // ТМФ. 1978. Т. 36. С. 291.
8. *West P. C.* Higher Derivative Regulation of Supersymmetric Theories // Nucl. Phys. B. 1986. V. 268. P. 113.
9. *Novikov V. A., Shifman M. A., Vainshtein A. I., Zakharov V. I.* Beta Function in Supersymmetric Gauge Theories: Instantons versus Traditional Approach // Phys. Lett. B. 1986. V. 166. P. 329.
10. *Stepanyantz K. V.* Derivation of the Exact NSVZ β-Function in $\mathcal{N} = 1$ SQED, Regularized by Higher Derivatives, by Direct Summation of Feynman Diagrams // Nucl. Phys. B. 2011. V. 852. P. 71.
11. *Stepanyantz K.* The All-Loop Perturbative Derivation of the NSVZ β-Function and the NSVZ Scheme in the Non-Abelian Case by Summing Singular Contributions // Eur. Phys. J. C. 2020. V. 80. P. 911.
12. *Kataev A. L., Stepanyantz K. V.* NSVZ Scheme with the Higher Derivative Regularization for $\mathcal{N} = 1$ SQED // Nucl. Phys. B. 2013. V. 875. P. 459.
13. *Campbell J. A., Hearn A. C.* Symbolic Analysis of Feynman Diagrams by Computer // J. Comput. Phys. 1970. V. 5. P. 280.

14. *Kreuzberger T., Kummer W., Schweda M.* SUSYCAL: A Program for Symbolic Computations in Supersymmetric Theories // Comput. Phys. Commun. 1990. V. 58. P. 89–104.
15. *Ferrari A. F.* SUSYMath: A Mathematica Package for Quantum Superfield Calculations // Comput. Phys. Commun. 2007. V. 176. P. 334–346.
16. *Shirokov I.* Computer Algebra Calculations in Supersymmetric Electrodynamics. arXiv: 2209.05295 [hep-th]; Программирование (направлено).
17. *Shirokov I. E., Stepanyantz K. V.* The Three-Loop Anomalous Dimension and the Four-Loop β-function for $\mathcal{N}=1$ SQED Regularized by Higher Derivatives // JHEP. 2022. V. 2204. P. 108.
18. *Shifman M. A., Vainshtein A. I., Zakharov V. I.* Exact Gell-Mann–Low Function in Supersymmetric Electrodynamics // Phys. Lett. B. 1986. V. 166. P. 334.
19. *Aleshin S. S., Durandina I. S., Kolupaev D. S., Korneev D. S., Kuzmichev M. D., Meshcheriakov N. P., Novgorodtsev S. V., Petrov I. A., Shatalova V. V., Shirokov I. E., Shirokova V. Y., Stepanyantz K. V.* Three-Loop Verification of a New Algorithm for the Calculation of a β-Function in Supersymmetric Theories Regularized by Higher Derivatives for the Case of $\mathcal{N}=1$ SQED // Nucl. Phys. B. 2020. V. 956. P. 115020.
20. *Rosner J. L.* Higher-Order Contributions to the Divergent Part of $Z(3)$ in a Model Quantum Electrodynamics // Ann. Phys. 1967. V. 44. P. 11.
21. *Kataev A. L., Stepanyantz K. V.* Scheme Independent Consequence of the NSVZ Relation for $\mathcal{N}=1$ SQED with N_f Flavors // Phys. Lett. B. 2014. V. 730. P. 184.

Получено 27 октября 2022 г.