

# КАНОНИЧЕСКОЕ КВАНТОВАНИЕ МАССИВНОГО СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ В ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ ШВАРЦШИЛЬДА

*И. П. Волобуев<sup>1</sup>, В. О. Егоров<sup>2</sup>, М. Н. Смоляков<sup>3</sup>*

Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д. В. Скобельцына  
Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Москва

Проведена последовательная процедура канонического квантования массивного действительного скалярного поля в пространстве-времени Шварцшильда. Предложено разложение оператора поля по удобным с физической точки зрения состояниям, проверено выполнение всех необходимых коммутационных соотношений, а также в явном виде получен гамильтониан рассматриваемой системы. Обсуждаются некоторые физические следствия получившейся теории.

A consistent procedure of canonical quantization of a massive real scalar field in the Schwarzschild space-time is carried out. An expansion of the field operator into states that are convenient from a physical point of view is proposed, the fulfillment of all necessary commutation relations is verified, and the Hamiltonian of the system under consideration is obtained explicitly. Some physical consequences of the resulting theory are discussed.

PACS: 04.70.Dy; 03.70.+k; 11.10.-z

## ВВЕДЕНИЕ

Хотя количество статей, посвященных изучению квантовых эффектов, обусловленных наличием черных дыр (ЧД), огромно, анализ имеющейся научной литературы по данному вопросу показал, что построение квантовой теории поля даже в простейшем случае пространства-времени Шварцшильда не обсуждается на достаточном уровне строгости. Например, в классической работе [1], основанной на использовании канонического квантования, не проведена проверка выполнения коммутационных соотношений, что является необходимым шагом при проведении процедуры квантования. Более того, в научной литературе встречаются противоречивые выводы даже о спектре состояний в рамках релятивистской квантовой механики в поле ЧД Шварцшильда, соответствующие примеры будут приведены ниже.

---

<sup>1</sup>E-mail: volobuev@theory.sinp.msu.ru

<sup>2</sup>E-mail: egorov@theory.sinp.msu.ru

<sup>3</sup>E-mail: smolyakov@theory.sinp.msu.ru

В данной работе проведена последовательная процедура канонического квантования для простейшего случая действительного массивного скалярного поля в пространстве-времени «вечной» ЧД Шварцшильда. Кроме того, нами было использовано разложение оператора поля по нестандартным, но более удобным с физической точки зрения состояниям системы, что приводит к некоторым интересным физическим следствиям, которые обсуждаются в последнем разделе данной работы.

## 1. УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ, ЕГО РЕШЕНИЯ И ГАМИЛЬТОНИАН СИСТЕМЫ

Рассмотрим в метрике Шварцшильда массивное действительное скалярное поле, удовлетворяющее уравнению движения

$$\sqrt{-g}g^{00}\ddot{\phi} + \partial_i(\sqrt{-g}g^{ij}\partial_j\phi) + m^2\sqrt{-g}\phi = 0, \quad (1)$$

где  $\dot{\phi} = \partial_0\phi$ . Для тензора энергии-импульса выполняется ковариантный закон сохранения  $\nabla_\mu T_\nu^\mu = 0$ , который можно переписать в виде [2]

$$\nabla_\mu T_\nu^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g}T_\nu^\mu)}{\partial x^\mu} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^\nu} T^{\mu\rho} = 0. \quad (2)$$

Так как компоненты метрического тензора решения Шварцшильда не зависят от времени, при  $\nu = 0$  из (2) следует  $(\partial/\partial x^0) \int \sqrt{-g} T_0^0 d^3x = 0$ . Таким образом, сохраняющаяся во времени энергия (гамильтониан) системы имеет вид  $H = \int \sqrt{-g} g^{00} T_{00} d^3x$ . Подставляя в последнюю формулу компоненту  $T_{00}$  стандартного тензора энергии-импульса скалярного поля, интегрируя по частям и используя уравнение движения (1), получим

$$H = \frac{1}{2} \int \sqrt{-g} g^{00} (\dot{\phi}^2 - \ddot{\phi}\phi) d^3x. \quad (3)$$

В сферических координатах решения для собственных функций задачи (1) можно представить в виде  $\phi_{lm}(E, r, \theta, \varphi) = Y_{lm}(\theta, \varphi) f_l(E, r)$ , где  $f_l(E, r)$  удовлетворяет уравнению

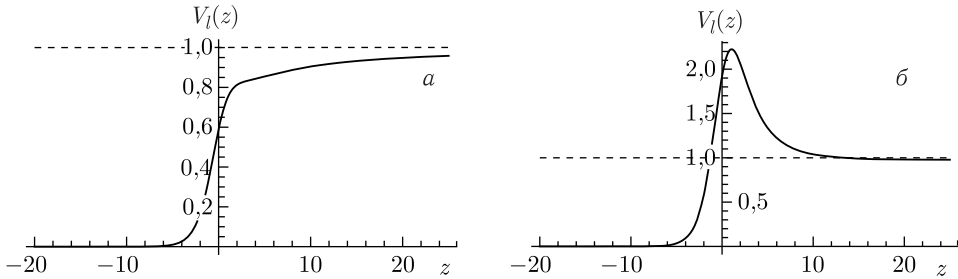
$$E^2 \frac{r}{r-r_0} f_l - m^2 f_l + \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r(r-r_0) \frac{df_l}{dr} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} f_l = 0. \quad (4)$$

Здесь  $r_0$  — радиус Шварцшильда. Следует отметить, что в научной литературе имеются противоречивые точки зрения на структуру решений уравнения (4). Например, в работе [3] утверждается, что спектр состояний с энергиями меньше массы поля является дискретным (хотя при этом решения нормируются на дельта-функцию). С другой стороны, в работе [4] утверждается, что спектр решений является непрерывным, а сами решения выражаются через функции Гойна. Для того чтобы понять, что представляют собой решения уравнения (4), введем безразмерные переменные  $R = r/r_0$ ,  $M = mr_0$ ,  $\epsilon = Er_0$ , перейдем к черепашьей координате  $z = R + \ln(R-1)$  и используем

подстановку  $f_l(\epsilon, z) = u_l(\epsilon, z)/R(z)$ . Тогда уравнение (4) можно представить в форме уравнения Шредингера [5]

$$-\frac{d^2 u_l(\epsilon, z)}{dz^2} + \frac{R(z) - 1}{R(z)} \left( M^2 + \frac{l(l+1)}{R^2(z)} + \frac{1}{R^3(z)} \right) u_l(\epsilon, z) = \epsilon^2 u_l(\epsilon, z). \quad (5)$$

При этом для исходной нормировки, следующей из формы уравнения (4), получаем выражение  $\int_{r_0}^{\infty} (r^3/(r-r_0)) f_l^2(E, r) dr \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} u_l^2(\epsilon, z) dz$ . Из формулы (5) следует, что потенциал  $V_l(z) \rightarrow M^2$  при  $z \rightarrow \infty$  и  $V_l(z) \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow -\infty$  (что, кстати, подразумевает эффективную безмассовость частицы в этой области), см. примеры на рисунке. Видно, что асимптотическое поведение  $V_l(z)$  отвечает потенциалу типа «ступенька», что приводит к непрерывному спектру при  $\epsilon^2 > 0$  [6]<sup>1</sup>. Так как мы имеем задачу в форме Штурма–Лиувилля при  $z \in (-\infty, \infty)$  со стандартным поведением уравнения в пределах  $z \rightarrow \pm\infty$ , система собственных функций данной задачи является полной. Из свойств потенциала  $V_l(z)$  следует, что при  $0 < \epsilon^2 < M^2$  для каждого значения  $l$  имеется всего лишь одно действительное решение, конечное при  $z \pm\infty$ . Оно представляет собой стоячую волну при  $z \rightarrow -\infty$  и экспоненциально спадает при  $z \rightarrow \infty$ . При  $\epsilon^2 > M^2$  имеется два линейно независимых действительных решения, они могут быть построены из решений, отвечающих движению частицы в сторону увеличения или уменьшения координаты  $z$ .



$V_l(z)$  для  $M = 1$ :  $l = 1$  (а) и  $l = 3$  (б)

Обычно при квантовании скалярного поля разложение оператора поля производится непосредственно по сферическим гармоникам (см., например, работу [1] или недавние работы [7]). Однако для квантования представляются более удобными и физически обоснованными состояниями, аналогичные обычным состояниям рассеяния, которые в исходных координатах при  $r \rightarrow \infty$  и  $E^2 > m^2$  имеют вид  $\phi_p(\mathbf{k}, \mathbf{x}) \sim \exp \left[ i \left( \mathbf{kx} - \frac{(2k^2 + m^2)r_0}{2k} \ln(kr) \right) \right] + A_p(\mathbf{k}, \mathbf{x}/r, r)(e^{ikr}/r)$ , где  $A_p(\mathbf{k}, \mathbf{x}/r, r)$  — аналог амплитуды рассеяния,  $k = |\mathbf{k}|$ ,  $r = |\mathbf{x}|$  и  $p = 1, 2$ , см. [8]. Наличие индекса  $p$  обусловлено тем, что при фиксированном  $l$  существует два линейно независимых

<sup>1</sup>Простое объяснение непрерывности спектра при  $0 < \epsilon^2 < M^2$  с точки зрения структуры решений уравнения (5) (в том числе объясняющее ошибку в работе [3]) приведено в [5].

решения уравнения (5) (и, соответственно, уравнения (4)) при  $\epsilon^2 > M^2$ . Решения  $\phi_p(\mathbf{k}, \mathbf{x})$  могут быть выражены через действительные решения  $f_{l,p}(k, r)$  радиального уравнения (4) (где  $E^2 = k^2 + m^2$  и  $p = 1, 2$ ) следующим образом [9]:

$$\phi_p(\mathbf{k}, \mathbf{x}) = \frac{C_p(k)}{4\pi k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \exp \left[ i \left( \frac{\pi l}{2} + \delta_{l,p}(k) \right) \right] P_l \left( \frac{\mathbf{k}\mathbf{x}}{kr} \right) f_{l,p}(k, r), \quad (6)$$

где  $P_l(\dots)$  — полиномы Лежандра;  $\delta_{l,p}(k)$  — фазовые сдвиги, явный вид которых нам не понадобится, а множители  $C_p(k)$  выбираются таким образом, что условие ортогональности для этих состояний имеет вид [8]

$$\int \sqrt{-g} g^{00} \phi_p^*(\mathbf{k}, \mathbf{x}) \phi_{p'}(\mathbf{k}', \mathbf{x}) d^3x = \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta_{pp'}. \quad (7)$$

Отметим, что в случае стандартных короткодействующих центрально-симметричных потенциалов состояния рассеяния образуют полную ортонормированную систему собственных функций [9]. В нашем случае, с учетом наличия решений при  $E^2 < m^2$ , условие полноты принимает вид [8]

$$\sum_{l,m} \int_0^m \phi_{lm}^*(E, \mathbf{x}) \phi_{lm}(E, \mathbf{y}) dE + \sum_{p=1}^2 \int \phi_p^*(\mathbf{k}, \mathbf{x}) \phi_p(\mathbf{k}, \mathbf{y}) d^3k = \frac{\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\sqrt{-g} g^{00}}. \quad (8)$$

## 2. КАНОНИЧЕСКОЕ КВАНТОВАНИЕ

Теперь перейдем непосредственно к процедуре квантования. Каноническая координата в теории скалярного поля есть  $\phi(t, \mathbf{x})$ , а канонически сопряженный импульс в метрике Шварцшильда имеет вид  $\pi(t, \mathbf{x}) = \sqrt{-g(\mathbf{x})} g^{00}(\mathbf{x}) \dot{\phi}(t, \mathbf{x})$ . Должны выполняться следующие коммутационные соотношения:

$$[\phi(t, \mathbf{x}), \pi(t, \mathbf{y})] = \sqrt{-g(\mathbf{y})} g^{00}(\mathbf{y}) [\phi(t, \mathbf{x}), \dot{\phi}(t, \mathbf{y})] = i \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (9)$$

$$[\phi(t, \mathbf{x}), \phi(t, \mathbf{y})] = [\dot{\phi}(t, \mathbf{x}), \dot{\phi}(t, \mathbf{y})] = 0. \quad (10)$$

Представим  $\phi(t, \mathbf{x})$  в виде

$$\begin{aligned} \phi(t, \mathbf{x}) = & \sum_{l,m} \int_0^m \frac{dE}{\sqrt{2E}} \left( e^{-iEt} \phi_{lm}(E, \mathbf{x}) a_{lm}(E) + e^{iEt} \phi_{lm}^*(E, \mathbf{x}) a_{lm}^\dagger(E) \right) + \\ & + \sum_{p=1}^2 \int \frac{d^3k}{\sqrt{2E(\mathbf{k})}} \left( e^{-iE(\mathbf{k})t} \phi_p(\mathbf{k}, \mathbf{x}) a_p(\mathbf{k}) + e^{iE(\mathbf{k})t} \phi_p^*(\mathbf{k}, \mathbf{x}) a_p^\dagger(\mathbf{k}) \right), \quad (11) \end{aligned}$$

где  $[a_{lm}(E), a_{l'm'}^\dagger(E')] = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta(E - E')$ ,  $[a_p(\mathbf{k}), a_{p'}^\dagger(\mathbf{k}')] = \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta_{pp'}$ ,  $E(\mathbf{k}) = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ . Как было сказано выше, при  $E^2 > m^2$  в разложении (11) используются состояния, которые удобны тем, что при  $r \rightarrow \infty$  они похожи на состояния частицы с импульсом  $\mathbf{k}$ , что близко к стандартному описанию частиц в пространстве Минковского.

Основной технической проблемой при проверке коммутационных соотношений является появление интегралов по трехмерному импульсу с подынтегральным выражением вида  $\phi_p(\mathbf{k}, \mathbf{x})\phi_p^*(\mathbf{k}, \mathbf{y}) - \phi_p(\mathbf{k}, \mathbf{y})\phi_p^*(\mathbf{k}, \mathbf{x})$ . С помощью приема, основанного на применении теоремы сложения для полиномов Лежандра и использованного в [9] для доказательства ортогональности состояний рассеяния, можно показать (в данном случае этот прием нужно использовать в импульсном пространстве), что такие интегралы равны нулю. В итоге с помощью условия полноты (8) можно показать, что коммутационные соотношения (9), (10) действительно выполняются [8].

Подставляя разложение (11) в гамильтониан (3), после некоторых вычислений получим гамильтониан стандартного вида [8]:

$$H = \sum_{l,m} \int_0^m E a_{lm}^\dagger(E) a_{lm}(E) dE + \sum_{p=1}^2 \int \sqrt{\mathbf{k}^2 + M^2} a_p^\dagger(\mathbf{k}) a_p(\mathbf{k}) d^3k. \quad (12)$$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, выше мы показали, что стандартная процедура канонического квантования, примененная к действительному массивному скалярному полю в пространстве-времени Шварцшильда, не приводит к каким-либо противоречиям и позволяет получить гамильтониан стандартного вида. Отметим, что учет области под горизонтом ЧД не нужен для получения непротиворечивой квантовой теории поля, пригодной для описания процессов над горизонтом.

Результаты, представленные выше, приводят к следующим физическим следствиям. 1. Имеется набор состояний, описывающих частицы с энергией меньше их массы, которые оказываются «запертыми» в некоторой области в районе горизонта. 2. При  $r \rightarrow r_0$  частица с любой энергией  $E > 0$  становится эффективно безмассовой. Из этого следует, что, возможно, при приближении к горизонту ЧД связанные состояния будут распадаться. 3. В отличие от случая пространства Минковского, в том числе и при наличии стандартных центрально-симметричных потенциалов, в случае метрики Шварцшильда имеется дублирование состояний, которые для бесконечно удаленного наблюдателя (при  $r \rightarrow \infty$ ) выглядят как модифицированные плоские волны с асимптотическим импульсом  $\mathbf{k}$ . Таким образом, возникает вопрос о влиянии дублирования состояний на эффективную теорию в области больших  $r$ , где, как можно было бы наивно предположить, влиянием ЧД уже можно пренебречь.

Естественно, возникает вопрос о принципиальной возможности включения области под горизонтом ЧД в описанную выше процедуру квантования. Единственным разумным подходом для решения этой проблемы представляется использование координат Крускала–Секереша. Однако отсутствие трансляций по временной координате  $T$  в координатах Крускала–Секереша не позволяет построить сохраняющийся во времени гамильтониан системы, во всяком случае, если трактовать координату  $T$  как физическое время. Кроме того, хорошо известно, что при таком подходе кроме исходной ЧД должна существовать также дополнительная белая дыра, что приводит к определенным проблемам с физической трактовкой получающейся системы, в частности, с локальностью в соответствующей теории. Имеются различные подходы к решению этой проблемы, среди которых хотелось бы выделить подходы, предложенные

в недавних работах 'т Хофта. В частности, в работах [10] было предложено геометрически отождествить определенные области на плоскости Крускала–Секереша. Однако позже было показано [11], что такое отождествление приводит к невозможности сохранения СРТ-инвариантности. Поэтому в работе [11] было предложено просто клонировать квантовые состояния во внешних областях обеих дыр. Интересно, что с точки зрения подхода [11] внутренние области обеих дыр не играют никакой роли в эволюции системы и представляют собой, по сути, математические артефакты, не имеющие прямой физической интерпретации. Однако в данном подходе также имеется существенная проблема — возникновение замкнутых времениподобных кривых [11].

В связи с этим можно предположить, что с точки зрения теории поля область под горизонтом ЧД Шварцшильда является изолированной и никак не взаимодействует с областью над горизонтом. Действительно, в этом случае можно построить непротиворечивую квантовую теорию поля как минимум в простейшем случае действительного скалярного поля, в то время как попытки корректно и строго учесть область под горизонтом приводят к противоречиям.

**Благодарности.** Авторы благодарны С. О. Алексееву, Э. Э. Боосу, Ю. В. Грацу, С. И. Кейзерову, В. П. Незнамову, С. А. Пастону, Ю. В. Попову и Э. Р. Рахметову за полезные обсуждения. Исследование выполнено в рамках научной программы Национального центра физики и математики, проект «Физика частиц и космология».

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Boulware D. G.* Quantum Field Theory in Schwarzschild and Rindler Spaces // *Phys. Rev. D.* 1975. V. 11. P. 1404.
2. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. М.: Наука, 1988.
3. *Deruelle N., Ruffini R.* Quantum and Classical Relativistic Energy States in Stationary Geometries // *Phys. Lett. B.* 1974. V. 52. P. 437.
4. *Zecca A.* Properties of Radial Equation of Scalar Field in Schwarzschild Space-Time // *Nuovo Cim. B.* 2009. V. 124. P. 1251.
5. *Barranco J., Bernal A., Degollado J. C., Diez-Tejedor A., Megevand M., Alcubierre M., Nunez D., Sarbach O.* Are Black Holes a Serious Threat to Scalar Field Dark Matter Models? // *Phys. Rev. D.* 2011. V. 84. 083008.
6. *Елютин П. В., Кривченков В. Д.* Квантовая механика (с задачами). М.: Наука, 1976.
7. *Анетподистов Р. А.* Remarks on the Thermofield Double State in 4D Black Hole Background // *Phys. Rev. D.* 2021. V. 103. 105008;  
*Bazarov K. V.* Notes on Peculiarities of Quantum Fields in Space-Times with Horizons // *Class. Quant. Grav.* 2022. V. 39. 217001.
8. *Egorov V., Smolyakov M., Volobuev I.* Doubling of Physical States in the Quantum Scalar Field Theory for a Remote Observer in the Schwarzschild Space-Time // *Phys. Rev. D.* 2023. V. 107. 025001.
9. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Квантовая механика (нерелятивистская теория). М.: Физматгиз, 1963.
10. *'t Hooft G.* Virtual Black Holes and Space-Time Structure // *Found. Phys.* 2018. V. 48. P. 1134;  
*'t Hooft G.* The Quantum Black Hole as a Theoretical Lab, a Pedagogical Treatment of a New Approach. arXiv:1902.10469 [gr-qc]. 2019.
11. *'t Hooft G.* Quantum Clones inside Black Holes. arXiv:2206.04608 [gr-qc]. 2022.