Письма в ЭЧАЯ. 2023. Т. 20, № 3(248). С. 422–427

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА. ТЕОРИЯ

РЕШЕНИЕ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С УЧЕТОМ РЕЗОНАНСА В КОМПТОНОВСКОМ ПРОЦЕССЕ В ЗАМАГНИЧЕННОЙ СРЕДЕ

А. А. Ярков [1], *Д. А. Румянцев* [2]

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, Ярославль, Россия

Рассмотрено решение кинетического уравнения для нахождения функции распределения фотонов двух возможных поляризаций в равновесной нерелятивистской e^+e^--плазме в относительно сильном магнитном поле с учетом резонанса на виртуальном электроне. С помощью преобразования Лапласа и разложения функции распределения по полиномам Лежандра задача сведена к системе дифференциальных уравнений на коэффициенты этого разложения. Решение представлено в виде интеграла в комплексной плоскости.

The solution of the kinetic equation for finding the distribution function of photons of two possible polarizations in an equilibrium nonrelativistic e^+e^- plasma in a relatively strong magnetic field is considered taking into account resonance on a virtual electron. Using the Laplace transform and the expansion of the distribution function in Legendre polynomials, the problem is reduced to a system of differential equations for the coefficients of this expansion. The solution is presented as an integral in the complex plane.

PACS: 13.60.Fz; 52.25.Dg; 52.27.Ep

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время является установленным фактом, что наличие магнитного поля в широком классе астрофизических объектов представляет собой типичную ситуацию для наблюдаемой Вселенной. При этом масштаб индукции магнитного поля может варьироваться в очень широких пределах: от крупномасштабных (~ 100 кпк) межгалактических магнитных полей $\sim 10^{-21}$ Гс [1] до полей, реализующихся в сценарии ротационного взрыва сверхновой. Особый интерес представляют объекты с полями масштаба так называемого критического значения $B_e = m^2/e \approx 4{,}41 \cdot 10^{13}$ Гс [3]. К ним, в частности, относятся изолированные нейтронные звезды, включающие в себя радиопульсары и так называемые магнитары, обладающие магнитными полями с индукцией от $B \sim 10^{12}$ Гс (радиопульсары) до $B \sim 4 \cdot 10^{14}$ Гс (магнитары).

[1] E-mail: a12l@mail.ru

[2] E-mail: rda@uniyar.ac.ru

[3] В работе используется естественная система единиц, где $c = h = k_B = 1$, m — масса электрона, $e > 0$ — элементарный заряд.

Анализ спектров излучения радиопульсаров и магнитаров свидетельствует также о наличии электрон-позитронной плазмы в их магнитосферах с концентрацией порядка значения концентрации Голдрайха–Джулиана [2]:

$$n_{\mathrm{GJ}} \approx 3 \cdot 10^{13}\ \mathrm{см}^{-3} \frac{B}{100B_e} \frac{10c}{P}, \tag{1}$$

где P — период вращения нейтронной звезды.

Естественно ожидать, что такие экстремальные условия будут оказывать существенное влияние на квантовые процессы, где в конечном или начальном состоянии могут присутствовать как электрически заряженные, так и электрически нейтральные частицы, например, электроны и фотоны.

Одним из таких процессов является активно обсуждаемое в настоящее время в литературе комптоновское рассеяние, которое играет ключевую роль в формировании спектров сильно замагниченных нейтронных звезд (см., например, обзоры [3–5]). В частности, в работе [4] выражение для сечения комптоновского рассеяния для случая, когда начальный и конечный электроны находятся на основном уровне Ландау, было получено с учетом дисперсии и перенормировки волновых функций фотонов. Одним из применений полученных результатов является решение уравнения переноса излучения в магнитосфере нейтронных звезд. Подобная задача рассматривалась в работе [6], где приводится уравнение переноса для дальнейшего точного решения. В работе [7] эта задача была решена методом Монте-Карло и получены спектры для различных значений температуры и углов между направлением магнитного поля и импульсом фотона.

С другой стороны, есть уникальная возможность аналитически получить решение кинетического уравнения в окрестности резонанса для нахождения функции распределения фотонов двух возможных поляризаций в равновесной электрон-позитронной плазме в относительно сильном магнитном поле с учетом резонанса на виртуальном электроне.

РЕШЕНИЕ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВБЛИЗИ РЕЗОНАНСА

Рассмотрим цилиндрическую колонку с осью, направленной вдоль магнитного поля B (магнитное поле B направлено вдоль оси z), содержащую равновесную e^+e^--плазму при температуре $T = \mathrm{const} \ll m$. Будем предполагать, что поток фотонов описывается неравновесной функцией распределения. Основной вклад в концентрацию электронов и позитронов будет давать нулевой уровень Ландау. В таком случае кинетическое уравнение будет иметь вид

$$(\mathbf{n}, \nabla_r f_\omega^{(\lambda)}(z,x)) = \sum_{\lambda'=1}^{2} \int dW_{\lambda\to\lambda'} \{ f_{E'}(1-f_E) f_{\omega'}^{(\lambda')}(z,x)(1+f_\omega^{(\lambda)}(z,x)) - \\ - f_E(1-f_{E'}) f_\omega^{(\lambda)}(1+f_{\omega'}^{(\lambda')}(z,x)). \tag{2}$$

Здесь $x = \cos\theta$, $x' = \cos\theta'$ (θ, θ' — углы между направлением магнитного поля и импульсами начального и конечного фотонов), $\lambda, \lambda' = 1, 2$ — поляризационные состояния фотонов; $\mathbf{n}$ — единичный вектор, направленный вдоль импульса начального фотона; $f_\omega^{(\lambda)}(z,x)$ и $f_{\omega'}^{(\lambda')}(z,x')$ — функции распределения начального и конечного фотонов с энергиями ω и ω' соответственно; $dW_{\lambda\to\lambda'}$ — коэффициент поглощения фотона, который может быть получен из результатов работ [8, 9]; $f_E = 1/[\exp(E/T)+1]$ и $f_{E'} = 1/[\exp(E'/T)+1]$ — равновесные функции распределения начального и конечного электронов; E, E' — энергии начального и конечного электронов с нулевым химическим потенциалом, что характерно для магнитосфер нейтронных звезд.

Поскольку рассматривается нерелятивистская плазма с температурой $T \ll m$, то энергии начального и конечного фотонов будут близкими друг к другу. Раскладывая правую часть уравнения (2) по величине $\Delta\omega = \omega - \omega' \ll \omega$, где

$$\omega' = \frac{1}{1-x'^2}\Bigg(m + \omega(1-xx') - \\ - \sqrt{(m+\omega(1-xx'))^2 - 2eB(1-x'^2)}\Bigg) \simeq \omega_{\rm res} \simeq eB/m, \tag{3}$$

мы можем воспользоваться методикой, развитой в работах [10, 11]:

$$\frac{\partial f^{(\lambda)}(z,x)}{\partial z} = \frac{1}{x}\sum_{\lambda'=1}^{2}\int\limits_{-1}^{1} dx' \varphi_\omega^{\lambda\lambda'}(x,x')(f^{(\lambda')}(z,x') - f^{(\lambda)}(z,x)) - \\ - \frac{\Delta\omega}{T}\frac{1}{x}\sum_{\lambda'=1}^{2}\int\limits_{-1}^{1} dx'\,\varphi_\omega^{\lambda\lambda'}(x,x')\left[T\frac{\partial f_\omega^{(\lambda')}(z,x')}{\partial\omega} + f_\omega^{(\lambda')}(z,x')\right] + \\ + \frac{1}{2}\frac{(\Delta\omega)^2}{T^2}\frac{1}{x}\sum_{\lambda'=1}^{2}\int\limits_{-1}^{1} dx' \varphi_\omega^{\lambda\lambda'}(x,x')\Bigg[T^2\frac{\partial^2 f_\omega^{(\lambda')}(z,x')}{\partial\omega^2} + \\ + 2T\frac{\partial f_\omega^{(\lambda')}(z,x')}{\partial\omega^2} + f_\omega^{(\lambda')}(z,x')\Bigg]. \tag{4}$$

Рассматривая задачу вблизи резонанса $\omega = \omega_{\rm res} \simeq eB/m$, функции $\varphi_\omega^{\lambda\lambda'}(x,x')$ можно получить из результата работы [9]:

$$\begin{aligned}
\varphi_\omega^{11}(x,x') &\simeq \rho\left(\frac{(eB)^2}{m^2}\frac{1}{\Delta^-} + \frac{[\omega - eB/m]^2}{\Delta^+}\right), \\
\varphi_\omega^{12}(x,x') &\simeq \rho\omega^2\left(\frac{x^2}{\Delta^-} + \frac{\omega - eB/m}{2m^2\Delta^+}\right), \\
\varphi_\omega^{22}(x,x') &\simeq \rho\frac{\omega^4}{4m^2}\left(\frac{4m^4x^2x'^2}{(eB)^2\Delta^-} + \frac{1}{\Delta^+}\right), \\
\varphi_\omega^{21}(x,x') &\simeq \rho\omega^2\left(\frac{x^2}{\Delta^-} + \frac{\omega - eB/m}{2m\Delta^+}\right),
\end{aligned} \tag{5}$$

где

$$\rho = \frac{n_e}{8\pi}e^4\left(\frac{\sqrt{m^2+eB}+m}{\sqrt{m^2+eB}}\right) \simeq \frac{n_e}{4\pi}e^4, \tag{6}$$

n_e — концентрация электронов,

$$\Delta^{\pm} = (\omega^2(1-x^2) + 2\omega m - 2eB)^2 + \left(\frac{E''_n\Gamma^{\pm}}{2}\right)^2 \simeq \left(\frac{E''_n\Gamma^{\pm}}{2}\right)^2, \tag{7}$$

где $\Gamma^{\pm}$ — полная ширина поглощения электрона для двух возможных поляризационных состояний [12].

Решение уравнения (4) формально можно представить следующим образом:

$$f_\omega^{(\lambda)}(z,x) = f_{0\omega}\,\mathrm{e}^{-\chi_\omega^{(\lambda)}(x)\,z} + \frac{1}{x}\int\limits_0^z dz' \int\limits_{-1}^{1} dx' \mathrm{e}^{-\chi_\omega^{(\lambda)}(x)\,(z-z')} \varphi_\omega^{\lambda\lambda'}(x,x') F_\omega^{(\lambda')}(z',x'), \tag{8}$$

где $f_{0\omega} = [\exp(\omega/T) - 1]^{-1}$ — равновесная функция распределения фотонов, а

$$F_\omega^{(\lambda')}(z',x') = f_\omega^{(\lambda')}(z',x') - \frac{\Delta\omega}{T}\left[T\frac{\partial f_\omega^{(\lambda')}(z',x')}{\partial\omega} + f_\omega^{(\lambda')}(z',x')\right] + \\ + \frac{1}{2}\frac{(\Delta\omega)^2}{T^2}\left[T^2\frac{\partial^2 f_\omega^{(\lambda')}(z',x')}{\partial\omega^2} + 2T\frac{\partial f_\omega^{(\lambda')}(z',x')}{\partial\omega^2} + f_\omega^{(\lambda')}(z',x')\right], \tag{9}$$

$$\chi_\omega^{(\lambda)}(x) \equiv \frac{1}{x}\int\limits_{-1}^{1} dx' \left\{\varphi_\omega^{\lambda 1}(x,x') + \varphi_\omega^{\lambda 2}(x,x')\right\}. \tag{10}$$

Далее раскладываем функцию распределения фотонов по полиномам Лежандра $\mathcal{P}_\ell(x)$ относительно переменной x:

$$f_\omega^{(\lambda)}(z,x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell^{(\lambda)}(z,\omega)\mathcal{P}_\ell(x). \tag{11}$$

Подставляя (11) в (8) с учетом (9) и применяя к полученному выражению преобразование Лапласа относительно переменной z, получим систему дифференциальных уравнений второго порядка относительно переменной ω:

$$\frac{2}{2\ell+1}\overline{A}_\ell^{(\lambda)}(s,\omega) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{f_{0\omega}^{(\lambda)}}{s+\chi_\omega(x)}\mathcal{P}_\ell(x)\,dx + \\ + \sum_{\ell'=0}^{\infty}\frac{1}{x}\int\limits_{-1}^{1} dx' \int\limits_{-1}^{1} dx \frac{\mathcal{P}_\ell(x)\mathcal{P}_{\ell'}(x')}{s+\chi_\omega^{(\lambda)}(x)} \varphi_\omega^{\lambda\lambda'}(x,x')\overline{\mathcal{F}}_{\ell'}^{(\lambda')}(s,\omega), \tag{12}$$

где

$$\overline{\mathcal{F}}_{\ell'}^{(\lambda')}(s,\omega) = \overline{A}_{\ell'}^{(\lambda')}(s,\omega) - \frac{\Delta\omega}{T}\left[T\frac{\partial \overline{A}_{\ell'}^{(\lambda')}(s,\omega)}{\partial\omega} + \overline{A}_{\ell'}^{(\lambda')}(s,\omega)\right] + \\ + \frac{1}{2}\frac{(\Delta\omega)^2}{T^2}\left[T^2\frac{\partial^2 \overline{A}_{\ell'}^{(\lambda')}(s,\omega)}{\partial\omega^2} + 2T\frac{\partial \overline{A}_{\ell'}^{(\lambda')}(s,\omega)}{\partial\omega^2} + \overline{A}_{\ell'}^{(\lambda')}(s,\omega)\right], \tag{13}$$

$$\overline{A}_{\ell'}^{(\lambda)}(s,\omega) = \int\limits_0^\infty A_{\ell'}^{(\lambda)}(z,\omega)\,\mathrm{e}^{-sz}dz. \tag{14}$$

Система уравнений (12) с учетом (13) решает задачу о нахождении функции распределения фотонов. После применения обратного преобразования Лапласа окончательную функцию распределения фотонов поляризации λ можно представить в следующем виде:

$$f_\omega^{(\lambda)}(z,x) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{\ell=0}^{\infty} P_\ell(x) \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} ds\,\mathrm{e}^{sz}\,\overline{A}_{\ell}^{(\lambda)}(s,x,\omega), \tag{15}$$

где интеграл берется в комплексной плоскости по прямой $\mathrm{Re}\,s=\sigma$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрено решение кинетического уравнения для нахождения функции распределения фотонов двух возможных поляризаций в равновесной нерелятивистской e^+e^--плазме в относительно сильном магнитном поле с учетом резонанса на виртуальном электроне. С помощью преобразования Лапласа и разложения функции распределения по полиномам Лежандра задача сведена к системе дифференциальных уравнений на коэффициенты этого разложения. Решение представлено в виде интеграла в комплексной плоскости.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-32-90068.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ryu D., Schleicher D. R. G., Treumann R. A., Tsagas C. G., Widrow L. M.* Magnetic Fields in the Large-Scale Structure of the Universe // Space Sci. Rev. 2012. V. 166, No. 1–4. P. 1–35.
2. *Goldreich P., Julian W. H.* Pulsar Electrodynamics // Astrophys. J. 1969. V. 157. P. 869–880.
3. *Suleimanov V., Werner K.* Importance of Compton Scattering for Radiation Spectra of Isolated Neutron Stars with Weak Magnetic Fields // Astron. Astrophys. 2007. V. 466. P. 661–668.
4. *Chistyakov M. V., Rumyantsev D. A.* Compton Effect in Strongly Magnetized Plasma // Intern. J. Mod. Phys. 2009. V. 24. P. 3995–4008.
5. *Kuznetsov A. V., Rumyantsev D. A., Shlenev D. M.* Generalized Two-Point Tree-Level Amplitude $jf \to j'f'$ in a Magnetized Medium // Intern. J. Mod. Phys. A. 2015. V. 30, No. 11. P. 1550049.
6. *Mushtukov A. A., Nagirner D. I., Poutanen J.* Compton Scattering S-Matrix and Cross Section in Strong Magnetic Field // Phys. Rev. D. 2016. V. 93, No. 10. P. 105003.
7. *Mushtukov A. A., Markozov I. D., Suleimanov V. F., Nagirner D. I., Kaminke A. D., Potekhin A. Y., Portegies Zwart S.* Statistical Features of Multiple Compton Scattering in a Strong Magnetic Field // Phys. Rev. D. 2022. V. 105. P. 103027.
8. *Rumyantsev D. A., Shlenev D. M., Yarkov A. A.* Resonances in Compton-Like Scattering Processes in an External Magnetized Medium // JETP. 2017. V. 125. P. 410–419.

9. *Chistyakov M. V., Rumuyantsev D. A., Yarkov A. A.* Effect of a Strongly Magnetized Plasma on the Resonant Photon Scattering Process // J. Phys.: Conf. Ser. 2020. V. 1690. P. 012015.
10. *Kompaneets A. S.* The Establishment of Thermal Equilibrium between Quanta and Electrons // JETP. 1957. V. 4, No. 5. P. 876–885.
11. *Любарский Ю. Э.* Комптонизация в сверхсильном магнитном поле. I // Астрофизика. 1988. Т. 28, вып. 1.
12. *Kuznetsov A. V., Mikheev N. V.* Electroweak Processes in External Electromagnetic Fields. Springer-Verlag, 2003. V. 120.

Получено 27 октября 2022 г.