

# УРАВНЕНИЕ ПЛОСКИХ ВЫНУЖДЕННЫХ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ТЕМПЕРАТУРЫ. ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

*А. Е. Верхоглядов*<sup>1</sup>

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

В процессе работы над проектом нового импульсного реактора «Нептун» был обнаружен феномен динамического изгиба — особенность динамики пульсирующих реакторов, не проявляющая себя в реакторах другого типа, но играющая значительную роль в оценке устойчивой работы реактора. Движения тепловыделяющих элементов (ТВЭЛ) под действием периодически изменяющейся температуры могут приводить к сильным изменениям реактивности и колебаниям мощности реактора. Для точного моделирования работы реактора необходимо знать форму ТВЭЛ в момент очередного импульса мощности. Поскольку численные методы решения данной динамической задачи термоупругости требуют слишком большого времени вычисления, был применен аналитический метод. Представлены первые результаты численно-аналитического решения уравнения вынужденных колебаний ТВЭЛ, а также перспективы использования этого метода в исследовании динамики реактора «Нептун».

In the process of working on the project of a new NEPTUN pulsed reactor, the phenomenon of dynamic bending was discovered — a feature of the dynamics of pulsed reactors that does not appear in reactors of other types, but plays a significant role in evaluating the stable operation of the reactor. Movement of fuel elements (fuel rods) under the influence of periodically changing temperature can lead to high changes of reactivity and fluctuations of the reactor power. To accurately simulate the operation of the reactor, it is necessary to know the shape of the fuel element at the time of the next power pulse. Since numerical methods for solving this dynamic problem of thermoelasticity require too much computation time, an analytical method was applied. The first results of the numerical-analytical solution of the equation of induced oscillations of a fuel rod, as well as the prospects for using the method in studying the dynamics of the NEPTUN reactor, are presented.

PACS: 28.50.Dr

## ВВЕДЕНИЕ

Пульсирующие реакторы, или импульсные реакторы периодического действия, работают в Лаборатории нейтронной физики ОИЯИ уже более 60 лет: ИБР, ИБР + микротрон, ИБР-30 с инжектором, ИБР-2, ИБР-2М [1–3]. Сейчас идет проектирование будущего реактора «Нептун» с ядерным топливом на основе нептуния [4, 5].

---

<sup>1</sup>E-mail: verhoglyadov\_al@mail.ru

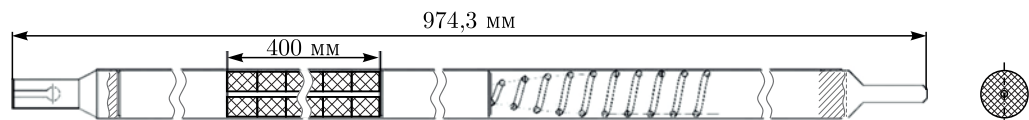


Рис. 1. ТВЭЛ реактора «Нептун» (проект)

В процессе работы над концептуальным проектом «Нептун» был обнаружен феномен *динамического изгиба* — особенность динамики пульсирующих реакторов, не проявляющая себя в реакторах другого типа, но играющая значительную роль в оценке устойчивой работы реактора. Движения тепловыделяющих элементов (ТВЭЛов) под действием периодически изменяющейся температуры могут приводить к сильным изменениям реактивности и колебаниям мощности реактора.

ТВЭЛ (рис. 1) представляет собой стальную трубку диаметром 17 мм и длиной около 1 м. Внутри трубки находится ядерное топливо — столб таблеток высотой 400 мм (заштрихованная область на рис. 1), а также прочие элементы конструкции. В момент импульса мощности реактора топливо разогревается и передает тепло оболочке (стенке трубки). Температура оболочки повышается на несколько градусов в течение 20 мс. Поскольку внутри активной зоны существует градиент энерговыделения [6], оболочка нагревается по-разному с разных сторон ТВЭЛа, что и приводит к деформациям.

Для точного моделирования работы реактора необходимо знать форму ТВЭЛа в момент очередного импульса мощности [7, 8]. Попытки решения данной динамической задачи термоупругости численными методами (методом конечных элементов, численным интегрированием уравнения движения) показали, что для получения приемлемых результатов требуется слишком большое время вычисления. Также следует отметить, что для расчетов динамики реактора периодического действия требуется знать форму ТВЭЛа лишь в моменты импульсов мощности (один раз в 0,1 с для реактора «Нептун»). В связи с этим появилась идея найти аналитическое решение уравнения движения ТВЭЛа и вычислять его форму только в моменты импульсов.

В данной работе представлены первые результаты численно-аналитического решения уравнения вынужденных колебаний ТВЭЛа, а также перспективы использования метода в исследовании динамики реактора «Нептун».

## УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ

Рассмотрим упругий стержень, который может изгибаться в плоскости  $xu$  (рис. 2).

Уравнение поперечных колебаний упругого стержня выводится путем сложения проекций сил, действующих в поперечном направлении (по оси  $Y$ ) и моментов, действующих на малый элемент стержня [9]. Для случая плоских поперечных колебаний уравнение движения имеет следующий вид: распределенная сила  $q$ , действующая в поперечном направлении на элемент стержня, равна второй производной по координате  $x$  от изгибающего момента  $M$ , возникающего в элементе стержня

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} M(x, t) = -q(xt). \quad (1)$$

Знак минус в этом уравнении показывает, что сила упругой деформации (реакция стержня) направлена в противоположную сторону относительно внешних сил. В качестве  $q(x, t)$  следует подставить сумму распределенных сил инерции и трения, поскольку стержень твэла находится в жидком натрии. Распределенная сила инерции равна  $\mu(\partial^2 y / \partial t^2)$ , где  $\mu = \mu(x)$  — распределенная масса стержня (кг/м),  $y = y(x, t)$  — отклонение центра стержня от оси  $Ox$  (линия оси). Распределенную силу трения представим в виде  $f(x, t) = \eta d(\partial y / \partial t)$ , где  $\eta$  — коэффициент трения,  $d$  — диаметр стержня.

Момент  $M(x)$  возникает вследствие двух причин. Во-первых, вследствие изгиба (деформации) оси стержня и растяжения-сжатия волокон материала. Обозначим этот момент через  $M_d$ , он равен  $M_d = EJ(\partial^2 y / \partial x^2)$ , где  $E$  — модуль Юнга,  $J$  — геометрический момент инерции сечения стержня относительно оси  $Z$  [9].

Во-вторых, изгибающий момент создается разностью температур на сторонах стержня (слева и справа от оси). Обозначим этот момент через  $M_t$ . Рассмотрим элемент неизогнутого стержня, вырезанный двумя плоскостями, перпендикулярными оси стержня в точках  $x$  и  $x + \Delta x$  (рис. 3).

Распределение температуры по оси  $r$ , перпендикулярной оси стержня и лежащей в плоскости  $xy$ , представим в виде линейной функции

$$T_r(r) = \frac{r}{d} \varphi T.$$

Здесь  $d$  — диаметр стержня,  $\varphi$  — безразмерный коэффициент, равный отношению разности температур на стенках оболочки твэла к средней температуре оболочки (вычисляется по градиенту энерговыделения в активной зоне),  $T$  — средняя температура оболочки в данный момент времени (рассчитывается решением нестационарного уравнения теплопроводности). Строго говоря, нагрев оболочки после импульса вызывает рост температуры как справа, так и слева от оси стержня. Но поскольку изгибающий момент зависит только от разности температур на краях, то такой выбор функции  $T_r(r)$  адекватен для вычисления изгибающего момента. Удлинение стержня под действием температуры (продольные деформации) учитывается отдельно в расчетах динамики реактора.

Напряжение, вызываемое температурой в сечении стержня на расстоянии  $r$  от оси, равно  $\sigma = E\alpha_t T_r(r) = E\alpha_t (r/d) \varphi T$ , где  $\alpha_t$  — температурный коэффициент линейного расширения. Зная напряжение в точке  $r$ , находим температурный момент  $M_t$ :

$$M_t = \int r \sigma dS = \int r^2 E \alpha_t \frac{\varphi T}{d} dS = EJ \alpha_t \frac{\varphi T}{d}. \quad (2)$$

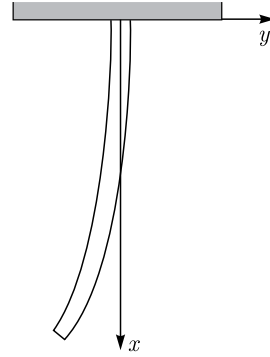


Рис. 2. Модель плоского изгиба твэла

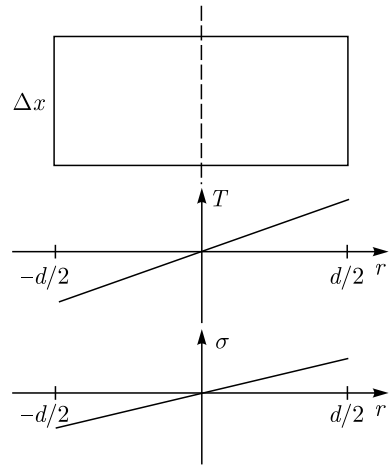


Рис. 3. Температурные напряжения в сечении стержня

Два момента —  $M_d$  и  $M_t$  действуют в сечении стержня одновременно и независимо, поэтому их сумму следует принять в качестве момента  $M(x)$  в уравнении (1):

$$M = M_d + M_t. \quad (3)$$

Подставляя полученные соотношения (2), (3) в исходное уравнение (1), получаем уравнение вынужденных поперечных колебаний упругого стержня в следующем виде:

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + EJ \alpha_t \frac{\varphi T}{d} \right) + \eta d \frac{\partial y}{\partial t} = 0. \quad (4)$$

Параметры  $\mu$ ,  $J$ ,  $d$ ,  $E$  определяются конструкцией твэла и в общем случае могут зависеть от координаты  $x$ . Параметры  $\varphi$ ,  $\eta$  находятся с помощью численного моделирования либо эксперимента.  $T = T(x, t)$  — средняя температура оболочки в момент времени  $t$  в точке  $x$ , которая определяется процессом выделения тепла в топливе.

Граничные условия зависят от способа крепления твэла на его концах (свободный конец, жесткая заделка, шарнир).

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В данной работе рассмотрим упрощенную модель твэла. Пусть стержень представляет собой круглую однородную по длине трубку, жестко заделанную с одного конца и свободную на другом конце (рис. 2). Соответственно, коэффициенты  $\mu$ ,  $J$ ,  $d$ ,  $E$  в уравнении (4) являются константами. Значения параметров, необходимых для расчета, приведены ниже:  $l = 1$  м — длина стержня;  $d = 0,017$  м — диаметр стержня;  $0,00045$  м — толщина стенок трубки;  $m = 1,809$  кг — масса твэла;  $\alpha_t = 17,3 \cdot 10^{-6}$  1/К — коэффициент температурного расширения стали;  $E = 2 \cdot 10^{11}$  кг/м · с<sup>2</sup> — модуль Юнга стали;  $\varphi = 0,05$  — неравномерность нагрева стенок слева-справа;  $\eta = 11,24$  кг/(м<sup>2</sup> · с) — коэффициент трения (значение взято из расчета времени затухания 2 с). Эти параметры достаточно точно описывают проектные характеристики твэла «Нептун».

Допускается, что масса твэла равномерно распределена по его длине, т. е.  $\mu = m/l$ . Поскольку в реальном твэле топливо (зона нагрева) не меняет своего положения

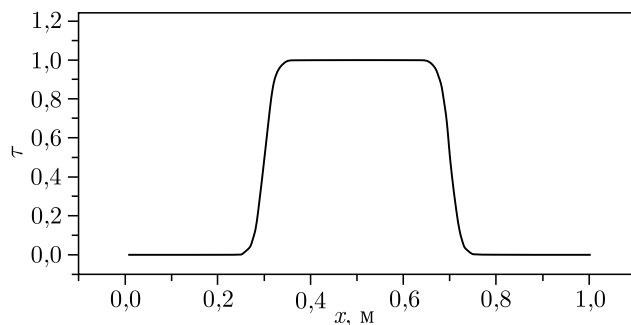


Рис. 4. Распределение зоны нагрева вдоль стержня

во времени, то функцию температуры в уравнении (4) можно представить в виде

$$T(x, t) = \tau(x)\beta(t).$$

Вид безразмерной функции  $\tau(x)$  представлен на рис. 4 (зона нагрева стержня в области от 0,3 до 0,7 м). Функция  $\beta(t)$  имеет размерность градусов Кельвина и представляет собой температуру стержня в его средней точке ( $x = 0,5$  м).

Задача состоит в нахождении решения  $y = y(x, t)$  неоднородного дифференциального уравнения (4) для заданной температуры  $\beta(t)$ , формы  $y(x, t = 0)$ , скорости  $\partial y / \partial t|_{t=0}$  в начальный момент времени и граничных условий на концах стержня (жесткая заделка при  $x = 0$  и свободный конец при  $x = 1$  м).

### БАЛОЧНЫЕ ФУНКЦИИ

Известно, что для нахождения форм и частот колебаний балок и стержней (в задачах статики и динамики при разных способах закрепления) используются так называемые балочные функции [9]. В нашем случае будем использовать следующее выражение:

$$W(x) = AS(x) + BT(x) + CU(x) + DV(x),$$

где

$$S(x) = \operatorname{ch}(x) + \cos(x),$$

$$T(x) = \operatorname{sh}(x) + \sin(x),$$

$$U(x) = \operatorname{ch}(z) - \cos(z),$$

$$V(x) = \operatorname{sh}(x) - \sin(x).$$

Коэффициенты  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  определяются исходя из граничных условий. Дифференцирование этих функций обладает следующими свойствами:

$$S' = V, \quad V' = U, \quad U' = T, \quad T' = S \Rightarrow W'''' = W.$$

### РЕШЕНИЕ ОДНОРОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Перепишем уравнение (4) в следующем виде:

$$y'''' + a\ddot{y} + b\dot{y} + h\tau''\beta = 0. \quad (5)$$

Здесь введены обозначения:

$$a = \frac{\mu}{EJ}, \quad b = \frac{\eta d}{EJ}, \quad h = \frac{\alpha_t \varphi}{d}, \quad \tau = \tau(x), \quad \beta = \beta(t).$$

Штрих обозначает дифференцирование по координате  $x$ , точка — дифференцирование по времени  $t$ . Однородное дифференциальное уравнение (описывающее свободные затухающие колебания) имеет вид

$$y'''' + a\ddot{y} + b\dot{y} = 0. \quad (6)$$

Будем искать решение уравнения (6) в виде  $y(x, t) = A_0 e^{rt} W(\alpha x)$ , где  $A_0$  — произвольная константа,  $r$  — комплексная величина,  $\alpha$  — вещественная величина [10]. Подставив это выражение в уравнение (6) и применив свойства балочных функций, получим уравнение для определения параметра  $r$ :

$$ar^2 + br + \alpha^4 = 0.$$

Решим это уравнение относительно  $r$ :

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a\alpha^4}}{2a} = \frac{-b \pm i\sqrt{4a\alpha^4 - b^2}}{2a}.$$

Здесь учтено, что  $4a\alpha^4 \gg b^2$  для реальных физических условий (при слишком большом трении колебания невозможны). Таким образом, решение уравнения (6) можно записать в виде

$$y(x, t) = A_0 \exp\left(-\frac{b}{2a}t\right) W(\alpha x) \cos\left[\frac{\sqrt{4a\alpha^4 - b^2}}{2a}t + \varphi\right],$$

где  $\varphi$  — произвольная константа.

Далее, для определения форм и частот колебаний стержня (параметр  $\alpha$ ) используем граничные условия. В точке  $x = 0$  (жесткая заделка) смещение и угол наклона оси стержня равны нулю. В точке  $x = 1$  м (свободный конец) кривизна стержня равна нулю, другими словами, отсутствует изгибающий момент. Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} y(x=0) = 0 \\ y'(x=0) = 0 \\ y''(x=1) = 0 \\ y'''(x=1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \\ C S(\alpha) + D T(\alpha) = 0 \\ C V(\alpha) + D S(\alpha) = 0 \end{cases} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{\operatorname{ch} \alpha}.$$

Решением этой системы является набор параметров  $\alpha_k$  и функций  $W_k(x) = W(\alpha_k x)$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ). Каждой  $k$ -й гармонике соответствует своя форма  $W_k$  и циклическая частота колебаний, равная  $\sqrt{4a\alpha_k^4 - b^2}/2a$ :

$$\begin{aligned} \alpha_1 = 1,875104\dots, & \quad W_1(x) \approx \operatorname{ch}(\alpha_1 x) - \cos(\alpha_1 x) - 0,7341 (\operatorname{sh}(\alpha_1 x) - \sin(\alpha_1 x)), \\ \alpha_2 = 4,694091\dots, & \quad W_2(x) \approx \operatorname{ch}(\alpha_2 x) - \cos(\alpha_2 x) - 1,01847 (\operatorname{sh}(\alpha_2 x) - \sin(\alpha_2 x)), \\ \alpha_3 = 7,854757\dots, & \quad W_3(x) \approx \operatorname{ch}(\alpha_3 x) - \cos(\alpha_3 x) - 0,99922 (\operatorname{sh}(\alpha_3 x) - \sin(\alpha_3 x)), \\ \alpha_4 = 10,99554\dots, & \quad W_4(x) \approx \operatorname{ch}(\alpha_4 x) - \cos(\alpha_4 x) - 1,00003 (\operatorname{sh}(\alpha_4 x) - \sin(\alpha_4 x)), \\ \alpha_{k \gg 1} \approx \pi \left(kn - \frac{1}{2}\right), & \quad W_{k \gg 1}(x) \approx e^{-\alpha_k x} - \cos(\alpha_k x) + \sin(\alpha_k x) - \\ & \quad - e^{\alpha_k(x-1)} [e^{-\alpha_k} + (-1)^k]. \end{aligned}$$

Графики первых пяти функций  $W_k$  приведены на рис. 5. Функции  $W_k(x)$  обладают свойством ортогональности в пространстве  $L_2[0, 1]$  с нормой функций  $W_k(x)$ , равной единице, т. е.:

$$\begin{aligned} (W_k, W_k) &= \|W_k\|_{L_2[0,1]}^2 = \int_0^1 W_k^2(x) dx = 1, \\ (W_k, W_n) &= \int_0^1 W_k(x) W_n(x) dx = \|W_k\|_{L_2[0,1]}^2 \delta_{k,n} = \delta_{k,n}, \end{aligned}$$

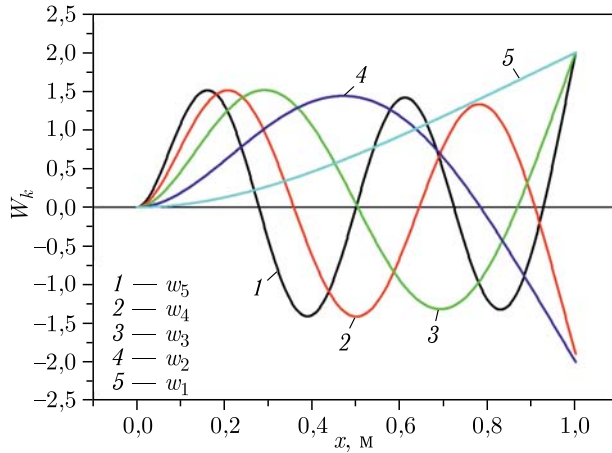


Рис. 5. Графики функций  $W_k(x)$

где  $\delta_{k,n}$  — дельта-символ Кронекера. Эти свойства могут быть проверены численно с точностью, достаточной для расчетов в рамках данной задачи.

Итак, решение однородного дифференциального уравнения (6) имеет следующий вид:

$$y_0(x, t) = \exp\left(-\frac{b}{2a}t\right) \sum_k A_k W_k(x) \cos\left[\frac{\sqrt{4a\alpha_k^4 - b^2}}{2a}t + \varphi_k\right]. \quad (7)$$

Выражение (7) представляет собой сумму гармонических колебаний, затухающих с постоянной времени  $2a/b$ . Каждая гармоника имеет константы амплитуды  $A_k$  и фазы  $\varphi_k$ , которые определяются начальными условиями: формой и скоростью стержня в момент  $t = 0$ .

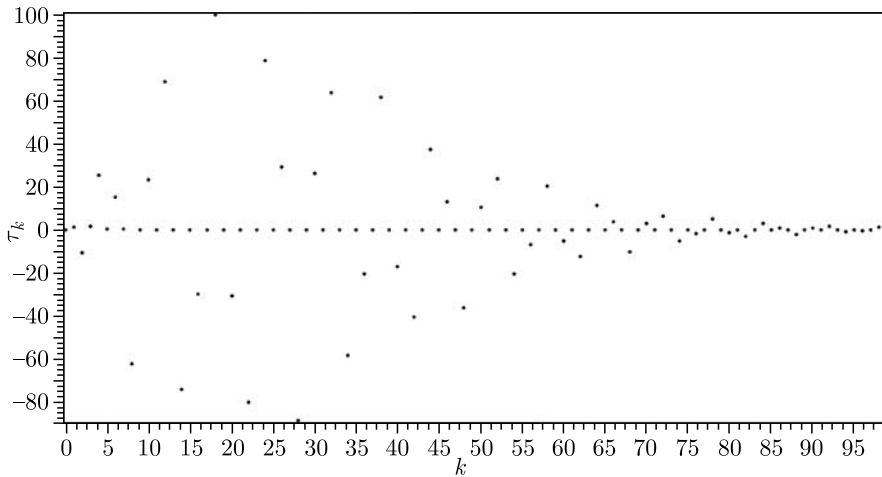
### ЧАСТНОЕ РЕШЕНИЕ НЕОДНОРОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Функции  $W_k(x)$  являются ортогональными на отрезке  $x \in [0, 1]$ . Поэтому, если существует такой конечный набор коэффициентов  $\tau_k$ , при котором выполняется равенство (8), разложение  $\tau''(x)$  по функциям  $W_k(x)$  будет единственным:

$$\tau''(x) = \sum_k \tau_k W_k(x). \quad (8)$$

Функция  $\tau(x)$  известна, поэтому коэффициенты  $\tau_k$  находятся численными методами перед решением уравнения. Для нахождения  $\tau_k$  используются соотношения

$$\tau_k = \int_0^1 \tau''(x) W_k(x) dx.$$

Рис. 6. Коэффициенты  $\tau_k$ 

Первые 100 коэффициентов  $\tau_k$ , найденных для функции  $\tau(x)$  (см. рис. 4), показаны на рис. 6. Видно, что при  $k > 80$  все  $\tau_k$  стремятся к нулю. При этом равенство (8) выполняется на всем интервале  $x \in [0, 1]$  (в пределах заданной точности вычислений). Это означает, что разложение  $\tau''(x)$  по функциям  $W_k(x)$  существует и оно единственно.

Будем искать решение уравнения (5) в виде

$$y_n(x, t) = \sum_k y_k(t) W_k(x).$$

Полученные разложения для  $y_n(x, t)$  и  $\tau''(x)$  подставим в неоднородное уравнение (5). После взятия производных и применения свойства ортогональности базисных функций приходим к набору из  $k$  одномерных неоднородных дифференциальных уравнений [11]:

$$a\ddot{y}_k + b\dot{y}_k + \alpha_k^4 y_k + f_k = 0. \quad (9)$$

Здесь введено обозначение  $f_k = f_k(t) = (\tau_k a_t \varphi / d) \beta(t)$ . Перепишем уравнение (9) в операторном виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_k y_k &= -\rho f_k, & \mathcal{L}_k &= \frac{d}{dt} p(t) \frac{d}{dt} - q_k(t), \\ p(t) &= a\rho(t), & q_k(t) &= -\alpha_k^4 \rho(t), & \rho(t) &= e^{2\gamma t}, & \gamma &= \frac{b}{2a}. \end{aligned} \quad (10)$$

Найдем набор собственных функций  $\psi_n^{(k)}$  и собственных значений  $\lambda_n^{(k)}$  для оператора  $\mathcal{L}_k$  решением задачи Штурма–Лиувилля:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_k \psi_n^{(k)} = \lambda_n^{(k)} \rho \psi_n^{(k)}, \\ \psi_n^{(k)}(0) = \psi_n^{(k)}(t_{\max}) = 0. \end{cases} \quad (11)$$



Решение задачи (11) имеет вид

$$\psi_n^{(k)}(t) = \sqrt{\frac{2}{t_{\max}}} e^{-\gamma t} \sin\left(\frac{\pi n t}{t_{\max}}\right), \quad \lambda_n^{(k)} = \alpha_k^4 - a \left[ \gamma^2 + \left(\frac{\pi n}{t_{\max}}\right)^2 \right].$$

Собственные функции  $\psi_n^{(k)}$  не зависят в явном виде от индекса  $k$ , поэтому в дальнейшем будем опускать этот индекс, т. е.  $\psi_n^{(k)} \equiv \psi_n$ . Отметим, что система собственных функций  $\{\psi_n\}$  является ортонормированной с весом  $\rho$ :

$$(\psi_n, \psi_m) \equiv \int_0^{t_{\max}} \psi_n(t) \rho(t) \psi_m(t) dt = \delta_{n,m}.$$

Так как необходимо найти только частное решение уравнения (9), можно рассмотреть решение с граничными условиями  $y_k(0) = y_k(t_{\max})$ . Такое решение будет разлагаться по базису  $\{\psi_n\}$ , т. е.

$$y_k(t) = \sum_n c_n^{(k)} \psi_n(t). \tag{12}$$

Подставляя разложение (12) в уравнение (10) и учитывая свойство ортогональности собственных функций  $\{\psi_n\}$ , получим

$$\sum_n c_n^{(k)} \mathcal{L}_k \psi_n = \sum_n c_n^{(k)} \lambda_n^{(k)} \rho \psi_n = -\rho f_k. \tag{13}$$

Умножая уравнение (13) на  $\psi_j$  и производя интегрирование в области  $[0, t_{\max}]$ , получим

$$\sum_n c_n^{(k)} \lambda_n^{(k)} (\psi_n, \psi_j) = \int_0^{t_{\max}} f_k(t) \rho(t) \psi_j(t) dt = -f_j^{(k)}, \tag{14}$$

$$c_j^{(k)} = -\frac{f_j^{(k)}}{\lambda_j^{(k)}}. \tag{15}$$

Подставляя известные коэффициенты (15) в разложение (12), получим искомое частное решение:

$$y_k(t) = -\sum_n \frac{f_n^{(k)}}{\lambda_n^{(k)}} \psi_n(t). \tag{16}$$

В результате частное решение уравнения (5) примет вид

$$y_n(x, t) = -\sum_k W_k(x) \sum_n \frac{f_n^{(k)}}{\lambda_n^{(k)}} \psi_n(t). \tag{17}$$

Соответственно, решение исходного уравнения (4) есть сумма решения (7) однородного уравнения и частного решения (17) неоднородного уравнения

$$y(x, t) = y_o(x, t) + y_n(x, t). \tag{18}$$

### ПРИМЕР РЕШЕНИЯ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ

Найдем решение уравнения (4) для простого случая — переход в состояние статического изгиба.

Пусть в начальный момент времени (до начала нагрева) стержень покоится в недеформированном состоянии. Разность температур  $\Delta T(t) = \varphi\beta(t)$  равна 1 К в период времени  $t$  от 0 до 5 с. Физически это соответствует быстрому нагреву стержня до разности температур стенок 1 К и удержанию такой температуры в течение 5 с. Форма стержня (его нагретой части) в состоянии статического изгиба легко находится из уравнения статики:

$$y_{\text{стат}}(x) = -\frac{\alpha_t \varphi \beta x^2}{2d}. \quad (19)$$

Участки стержня, не подверженные нагреву (от 0 до 0,3 м и от 0,7 до 1 м), остаются прямолинейными.

Будем искать решение в промежутке времени от 0 до  $t_{\text{max}} = 5$  с. После подстановки  $\varphi\beta(t) = 1$  К в (14) получаем аналитическое частное решение в виде

$$y_{\text{н. аналит}}(x, t) = -\frac{\alpha_t}{d} \sqrt{\frac{2}{t_{\text{max}}^3}} \sum_k \frac{\pi n \tau_k}{\gamma^2 + \left(\frac{\pi n}{t_{\text{max}}}\right)^2} W_k(x) \sum_n \frac{1 - (-1)^n e^{\gamma t_{\text{max}}}}{\lambda_n^{(k)}} \psi_n(t). \quad (20)$$

Из начальных условий  $y(x, 0) = 0$  и  $\partial y / \partial t|_{t=0} = 0$  с учетом ортогональности функций  $W_k(x)$  однозначно находятся коэффициенты  $A_k$  и  $\varphi_k$ . В случае численного расчета матрицы  $f_n^{(k)}$  интегралы в выражении (14) вычисляются методом трапеций с оптимальным шагом из расчета точности 1%.

Ниже представлены результаты вычисления  $y(x, t)$  чисто аналитическим методом (20) в сравнении с результатами численно-аналитического метода (18) (рис. 7), а также в сравнении формы стержня, полученные с помощью уравнения статики и численно-аналитического метода (рис. 8).

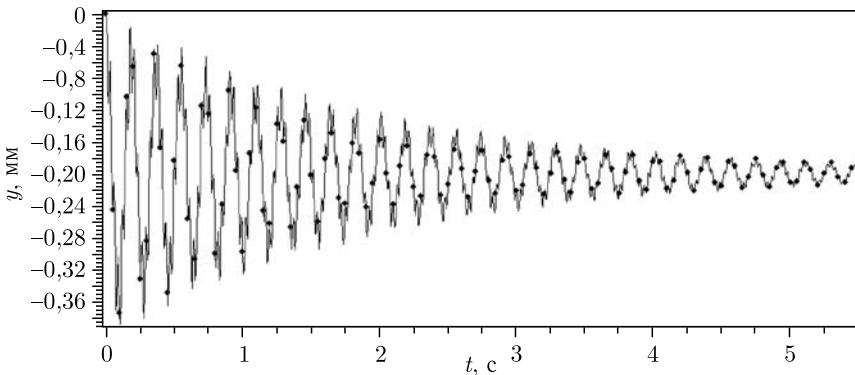


Рис. 7. Динамика положения свободного конца стержня  $y(x = 1, t)$  после «включения» температуры. Линия — численно-аналитическое решение, точки — аналитическое решение

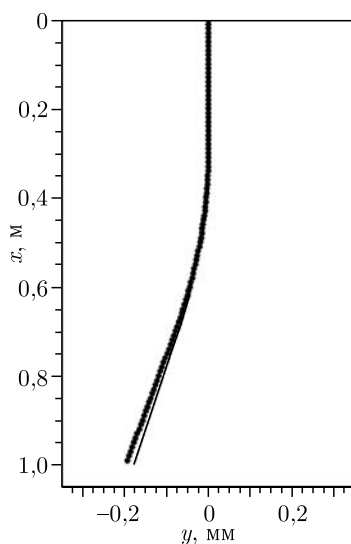


Рис. 8. Форма стержня в состоянии статического изгиба. Тонкая линия — решение уравнения статики, толстая — численно-аналитическое решение уравнения движения при  $t = 5$  с

В первые несколько секунд после начала действия температуры стержень испытывает колебания, вызванные быстрым изменением внешней силы (тепловой удар). Но спустя 5–10 с за счет трения колебания исчезают и стержень переходит в состояние статического изгиба, форма которого представлена на рис.8. Небольшое различие кривых на этом рисунке можно объяснить неточным учетом распределения температуры  $\tau(x)$  при выводе уравнения (19).

Характер колебаний свободного конца стержня представляет собой наложение гармонических колебаний разной частоты и амплитуды. Основная частота (около 6 Гц) согласуется с результатом 8 Гц, полученным при моделировании твэла в полной геометрии в программном комплексе ANSYS. На рис.7 видно, что численно-аналитическое и аналитическое решения полностью совпадают.

## ВЫВОДЫ

1. Уравнение вынужденных колебаний стержня может быть решено численно-аналитическими методами с высокой точностью на заданном интервале времени, что позволяет использовать его в расчетах динамики реактора периодического действия.

2. Для решения необходимо заранее знать зависимость температуры от времени (функция  $\beta(t)$ ). При расчетах динамики мощности импульсного реактора периодического действия можно вычислять решение от импульса к импульсу, переопределяя каждый раз начальные условия — коэффициенты амплитуды  $A_k$  и фазы  $\varphi_k$ .

3. Время расчетов существенно сокращается по сравнению с другими численными методами, поскольку теперь нет необходимости рассчитывать всю эволюцию стержня. Мы можем сразу находить его форму в тот момент времени, когда это нужно.

4. Точность результатов вычислений ограничена, в основном, исходными данными: коэффициентом трения, граничными условиями, ходом температуры со временем. Требуются экспериментальные данные для уточнения этих параметров.

5. После сравнения с результатами эксперимента допускается развитие и усложнение модели: неоднородное распределение массы  $\mu(x)$ , различные варианты закрепления твэла, трехмерное движение и т. д.

**Благодарности.** Автор выражает благодарность доктору физико-математических наук Е. Е. Перепелкину за ценные консультации и помощь при создании этой работы.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Блохин Г. Е., Блохинцев Д. И., Блюмкина Ю. А. и др.* Импульсный реактор на быстрых нейтронах // АЭ. 1961. Т. 10, вып. 5. С. 437.
2. *Ананьев В. Д., Блохинцев Д. И., Булкин Ю. М. и др.* ИБР-2 — импульсный реактор периодического действия для нейтронных исследований // ПТЭ. 1977. Вып. 5. С. 17–35; *Ананьев В. Д., Блохинцев Д. И., Булкин Ю. М. и др.* Сообщ. ОИЯИ РЗ-10888. Дубна, 1977.
3. *Шабалин Е. П.* Импульсные реакторы на быстрых нейтронах. М.: Атомиздат, 1976.
4. *Шабалин Е. П., Аксенов В. Л., Комышев Г. Г., Рогов А. Д.* // АЭ. 2018. Т. 124, № 6. С. 309.
5. *Лопаткин А. В., Третьяков И. Т., Романова Н. В., Горячих А. В., Кокорин Н. Д., Попов В. Е., Мороко В. И., Кравцова О. А., Аксенов В. Л., Куликов С. А., Рязинин М. В., Швецов В. Н., Шабалин Е. П.* Концепция нового высокопоточного импульсного источника нейтронов периодического действия на основе нептуния // АЭ. 2020. Т. 129, вып. 4. С. 222.
6. *Бать Г. А.* Основы теории и методы расчета ядерных энергетических реакторов. М.: Энергоиздат, 1982.
7. *Колесов В. Ф.* Аperiodические импульсные реакторы. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2007.
8. *Колесов В. Ф.* Решения динамических задач термоупругости для полусферической оболочки и стержня // ВАНТ. Физика ядерных реакторов. 2012. Вып. 3. С. 61–71.
9. *Ильюшин А. А., Ленский В. С.* Сопrotивление материалов. М., 1959.
10. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 1. Механика. М.: Физматлит, 2004.
11. *Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения: примеры и задачи. М., 1989.

Получено 6 ноября 2022 г.