Письма в ЭЧАЯ. 2023. Т. 20, № 5(250). С. 1261–1265

ФИЗИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА И КОНДЕНСИРОВАННЫХ СРЕД

КАЛИБРОВОЧНО-ИНВАРИАНТНЫЙ ВЫВОД ДАВЛЕНИЯ КАЗИМИРА–ЛИФШИЦА

В. Н. Марачевский [1], *А. А. Сидельников* [2]

Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

Рассмотрен новый калибровочно-инвариантный по построению вывод электрических функций Грина в системе двух диэлектрических полупространств, разделенных вакуумной щелью. Приведен вывод давления Казимира–Лифшица.

We consider a novel explicitly gauge-invariant derivation of electric Green functions in the system of two dielectric half-spaces separated by a vacuum slit. Derivation of the Casimir–Lifshitz pressure is given.

PACS: 34.35.+a; 77.22.Ch; 68.65.Pq; 12.20.Ds; 73.22.–f

ВВЕДЕНИЕ

Эффект Казимира [1, 2] — квантово-полевой флуктуационный эффект при наличии границ [3, 4]. Давление в системе двух диэлектрических полупространств, разделенных вакуумной щелью, определяется формулой Лифшица [5]. В работах [6, 7] формула Лифшица получена с использованием принципа аргумента. Оригинальный калибровочно-инвариантный по построению метод нахождения функций Грина предложен в работе [8], также в [8] в рамках нового подхода получены классические результаты для сил Казимира и потенциала Казимира–Полдера.

Для нахождения электрической функции Грина в работе [8] используется метод последовательных отражений электрической функции Грина от двух параллельных границ диэлектрик–вакуум. В данной работе представлен калибровочно-инвариантный по построению альтернативный математический метод нахождения электрической функции Грина: функция Грина находится решением системы уравнений, полученной из граничных условий для тангенциальных компонент электрического и магнитного полей на двух границах диэлектрик–вакуум и условий поперечности полей. Приведенный впервые в данной работе вывод электрических функций Грина для щели между двумя полупространствами с использованием системы из 12 уравнений является математически строгим выводом электрических функций Грина для рассматриваемой системы в рамках калибровочно-инвариантного метода, предложенного в [8]. С использованием найденных электрической и магнитной функций Грина получена формула Лифшица для давления [5].

В работе используются единицы Хевисайда–Лоренца и $\hbar = c = 1$.

[1] E-mail: maraval@mail.ru

[2] E-mail: st074065@student.spbu.ru

ДАВЛЕНИЕ В СИСТЕМЕ ДВУХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛУПРОСТРАНСТВ, РАЗДЕЛЕННЫХ ВАКУУМНОЙ ЩЕЛЬЮ

Рассмотрим два диэлектрических полупространства $z \geqslant d$, $z \leqslant 0$, характеризующихся диэлектрическими проницаемостями $\varepsilon_1(\omega)$ и $\varepsilon_2(\omega)$ соответственно, и вакуумную щель $0 < z < d$ между ними. Также рассмотрим распространение электромагнитного поля от диполя с дипольным моментом $\mathbf{d}$, расположенного в точке $\mathbf{r}' = (0, 0, z_0)$, $0 < z_0 < d$. Электрические и магнитные поля, распространяющиеся вверх от дипольного источника, представим в виде

$$\mathbf{E} = \int \mathbf{N}\, \mathrm{e}^{i\mathbf{k}_\parallel \cdot \mathbf{r}_\parallel}\, \mathrm{e}^{ik_z(z-z_0)} d^2\mathbf{k}_\parallel, \tag{1}$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\omega} \int [\mathbf{k} \times \mathbf{N}]\, \mathrm{e}^{i\mathbf{k}_\parallel \cdot \mathbf{r}_\parallel}\, \mathrm{e}^{ik_z(z-z_0)} d^2\mathbf{k}_\parallel, \tag{2}$$

где $\mathbf{N} = -i\big((\mathbf{k} \cdot \mathbf{d})\mathbf{k} - \omega^2\mathbf{d}\big)/(8\pi^2 k_z)$, $k_z = \sqrt{\omega^2 - k_x^2 - k_y^2}$, $\mathbf{k}_\parallel = (k_x, k_y)$. Поля, распространяющиеся вниз от дипольного источника, представим в виде

$$\mathbf{E} = \int \widetilde{\mathbf{N}}\, \mathrm{e}^{i\mathbf{k}_\parallel \cdot \mathbf{r}_\parallel}\, \mathrm{e}^{ik_z(z_0-z)}\, d^2\mathbf{k}_\parallel, \tag{3}$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\omega} \int [\mathbf{k} \times \widetilde{\mathbf{N}}]\, \mathrm{e}^{i\mathbf{k}_\parallel \cdot \mathbf{r}_\parallel}\, \mathrm{e}^{ik_z(z-z_0)}\, d^2\mathbf{k}_\parallel, \tag{4}$$

где $\widetilde{\mathbf{N}} = -i\big((\widetilde{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{d})\widetilde{\mathbf{k}} - \omega^2\mathbf{d}\big)/(8\pi^2 k_z)$, $\widetilde{k} = (k_x, k_y, -k_z)$. При $0 \leqslant z \leqslant d$ конечные при $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ вклады в электрические и магнитные поля, получающиеся после отражений полей дипольного источника (1)–(4) от диэлектрических полупространств и учета граничных условий при $z = d$ и $z = 0$, могут быть записаны в виде

$$\mathbf{E}^R(\omega, \mathbf{r}) = \int \mathbf{v}_1\, \mathrm{e}^{i\mathbf{k}_\parallel \cdot \mathbf{r}_\parallel}\, \mathrm{e}^{-ik_z z} d^2\mathbf{k}_\parallel + \int \mathbf{v}_2\, \mathrm{e}^{i\mathbf{k}_\parallel \cdot \mathbf{r}_\parallel}\, \mathrm{e}^{ik_z z} d^2\mathbf{k}_\parallel, \tag{5}$$

$$\mathbf{B}^R(\omega, \mathbf{r}) = \frac{1}{\omega} \int \big([\mathbf{k}_\parallel \times \mathbf{v}_1] - k_z[\mathbf{n} \times \mathbf{v}_1]\big)\, \mathrm{e}^{i\mathbf{k}_\parallel \cdot \mathbf{r}_\parallel}\, \mathrm{e}^{-ik_z z} d^2\mathbf{k}_\parallel + \\ + \frac{1}{\omega} \int \big([\mathbf{k}_\parallel \times \mathbf{v}_2] + k_z[\mathbf{n} \times \mathbf{v}_2]\big)\, \mathrm{e}^{i\mathbf{k}_\parallel \cdot \mathbf{r}_\parallel}\, \mathrm{e}^{ik_z z} d^2\mathbf{k}_\parallel, \tag{6}$$

где векторные функции $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ зависят от ω, $\mathbf{k}_\parallel$, параметров геометрии системы z_0, d, диэлектрических проницаемостей полупространств $\varepsilon_1(\omega)$, $\varepsilon_2(\omega)$ и дипольного момента $\mathbf{d}$. Электрические и магнитные поля при $z \geqslant d$ могут быть записаны в виде

$$\mathbf{E}^{1T}(\omega, \mathbf{r}) = \int \mathbf{u}_1\, \mathrm{e}^{i\mathbf{k}_\parallel \cdot \mathbf{r}_\parallel}\, \mathrm{e}^{iK_{z1} z} d^2\mathbf{k}_\parallel, \tag{7}$$

$$\mathbf{B}^{1T}(\omega, \mathbf{r}) = \frac{1}{\omega} \int \big([\mathbf{k}_\parallel \times \mathbf{u}_1] + K_{z1}[\mathbf{n} \times \mathbf{u}_1]\big)\, \mathrm{e}^{i\mathbf{k}_\parallel \cdot \mathbf{r}_\parallel}\, \mathrm{e}^{iK_{z1} z} d^2\mathbf{k}_\parallel, \tag{8}$$

где $\mathbf{n} = (0,0,1)$ и $K_{z1} = \sqrt{\varepsilon_1(\omega)\omega^2 - k_x^2 - k_y^2}$. Электрические и магнитные поля при $z \leqslant 0$ могут быть записаны в виде

$$\mathbf{E}^{2T}(\omega, \mathbf{r}) = \int \mathbf{u}_2 \, \mathrm{e}^{i\mathbf{k}_\parallel \cdot \mathbf{r}_\parallel} \, \mathrm{e}^{-iK_{z2}z} d^2\mathbf{k}_\parallel, \tag{9}$$

$$\mathbf{B}^{2T}(\omega, \mathbf{r}) = \frac{1}{\omega} \int \left([\mathbf{k}_\parallel \times \mathbf{u}_1] - K_{z2}[\mathbf{n} \times \mathbf{u}_1] \right) \mathrm{e}^{i\mathbf{k}_\parallel \cdot \mathbf{r}_\parallel} \, \mathrm{e}^{-iK_{z2}z} d^2\mathbf{k}_\parallel, \tag{10}$$

где $K_{z2} = \sqrt{\varepsilon_2(\omega)\omega^2 - k_x^2 - k_y^2}$.

Используем локальный ортогональный базис $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_z$ для каждого $\mathbf{k}_\parallel$ и запишем условия поперечности полей в локальном базисе (при этом $\mathbf{k}_\parallel = k_r \mathbf{e}_r$, $k_r = |\mathbf{k}_\parallel|$):

$$u_{1r}k_r + K_{z1}u_{1z} = 0, \tag{11}$$

$$v_{1r}k_r - k_z v_{1z} = 0, \tag{12}$$

$$u_{2r}k_r - K_{z2}u_{2z} = 0, \tag{13}$$

$$v_{2r}k_r + k_z v_{2z} = 0. \tag{14}$$

Из непрерывности тангенциальных компонент электрического и магнитного полей при $z = d$ следуют уравнения

$$u_{1r} \, \mathrm{e}^{iK_{z1}d} = v_{1r} \, \mathrm{e}^{-ik_z d} + v_{2r} \, \mathrm{e}^{ik_z d} + N_r \, \mathrm{e}^{ik_z(d - z_0)}, \tag{15}$$

$$u_{1\theta} \, \mathrm{e}^{iK_{z1}d} = v_{1\theta} \, \mathrm{e}^{-ik_z d} + v_{2\theta} \, \mathrm{e}^{ik_z d} + N_\theta \, \mathrm{e}^{ik_z(d - z_0)}, \tag{16}$$

$$-K_{z1}u_{1\theta} \, \mathrm{e}^{iK_{z1}d} = k_z v_{1\theta} \, \mathrm{e}^{-ik_z d} - k_z v_{2\theta} \, \mathrm{e}^{ik_z d} - k_z N_\theta \, \mathrm{e}^{ik_z(d - z_0)}, \tag{17}$$

$$\begin{aligned} &-k_r u_{1z} \, \mathrm{e}^{iK_{z1}d} + K_{z1}u_{1r} \, \mathrm{e}^{iK_{z1}d} - k_z N_r \, \mathrm{e}^{ik_z(d - z_0)} - \frac{k_r^2}{k_z} N_r \, \mathrm{e}^{ik_z(d - z_0)} = \\ &\qquad = -k_r v_{1z} \, \mathrm{e}^{-ik_z d} - k_z v_{1r} \, \mathrm{e}^{-ik_z d} - k_r v_{2z} \, \mathrm{e}^{ik_z d} + k_z v_{2r} \, \mathrm{e}^{ik_z d}. \end{aligned} \tag{18}$$

Из непрерывности тангенциальных компонент электрического и магнитного полей при $z = 0$ следуют уравнения

$$u_{2r} = v_{1r} + v_{2r} + \widetilde{N}_r \, \mathrm{e}^{ik_z z_0}, \tag{19}$$

$$u_{2\theta} = v_{1\theta} + v_{2\theta} + \widetilde{N}_\theta \, \mathrm{e}^{ik_z z_0}, \tag{20}$$

$$K_{z2}u_{2\theta} = k_z v_{1\theta} - k_z v_{2\theta} + k_z \widetilde{N}_\theta \, \mathrm{e}^{ik_z z_0}, \tag{21}$$

$$\begin{aligned} -k_r u_{2z} - K_{z2}u_{2r} = &- k_r v_{1z} - k_z v_{1r} - k_r v_{2z} + k_z v_{2r} - \\ &\qquad = -k_z \widetilde{N}_r \, \mathrm{e}^{ik_z z_0} - \frac{k_r^2}{k_z} \widetilde{N}_r \, \mathrm{e}^{ik_z z_0}. \end{aligned} \tag{22}$$

Решая систему уравнений (11)–(22), находим из выражения (5) компоненты электрических функций Грина в локальном базисе $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_z$:

$$\begin{aligned} D_{rr}^E(\omega, k_r) = \frac{ik_z}{2\Delta_{TM}} &\Big[\mathrm{e}^{ik_z z} \left(r_{TM1} r_{TM2} \, \mathrm{e}^{ik_z(2d - z_0)} - r_{TM2} \, \mathrm{e}^{ik_z z_0} \right) + \\ &+ \mathrm{e}^{-ik_z z} \left(r_{TM1} r_{TM2} \, \mathrm{e}^{ik_z(2d + z_0)} - r_{TM1} \, \mathrm{e}^{ik_z(2d - z_0)} \right) \Big], \end{aligned} \tag{23}$$

$$D^E_{\theta\theta}(\omega, k_r) = \frac{i\omega^2}{2k_z\Delta_{TE}}\Big[\mathrm{e}^{ik_z z}\Big(r_{TE1}r_{TE2}\,\mathrm{e}^{ik_z(2d-z_0)} + r_{TE2}\,\mathrm{e}^{ik_z z_0}\Big) + \\ + \mathrm{e}^{-ik_z z}\Big(r_{TE1}r_{TE2}\,\mathrm{e}^{ik_z(2d+z_0)} + r_{TE1}\,\mathrm{e}^{ik_z(2d-z_0)}\Big)\Big], \quad (24)$$

$$D^E_{zz}(\omega, k_r) = \frac{ik_r^2}{2k_z\Delta_{TM}}\Big[\mathrm{e}^{ik_z z}\Big(r_{TM1}r_{TM2}\,\mathrm{e}^{ik_z(2d-z_0)} + r_{TM2}\,\mathrm{e}^{ik_z z_0}\Big) + \\ + \mathrm{e}^{-ik_z z}\Big(r_{TM1}r_{TM2}\,\mathrm{e}^{ik_z(2d+z_0)} + r_{TM1}\,\mathrm{e}^{ik_z(2d-z_0)}\Big)\Big], \quad (25)$$

где $\Delta_{TM} \equiv 1 - r_{TM1}r_{TM2}\,\mathrm{e}^{2ik_z d}$, $\Delta_{TE} \equiv 1 - r_{TE1}r_{TE2}\,\mathrm{e}^{2ik_z d}$ выражены через коэффициенты отражения Френеля $r_{TM}(\omega, k_r) = (\varepsilon(\omega)k_z - K_z)/(\varepsilon(\omega)k_z + K_z)$, $r_{TE}(\omega, k_r) = (k_z - K_z)/(k_z + K_z)$. Система из 12 уравнений (11)–(22) для нахождения компонент электрической функции Грина (23)–(25) между диэлектрическими полупространствами ранее не рассматривалась и приведена в данной работе впервые.

Дальнейший вывод формулы Лифшица следует работе [8]. Выразим функции Грина в декартовом базисе при $\mathbf{r}_\parallel = \mathbf{r}'_\parallel$ через компоненты функций Грина (23)–(25) в локальном базисе:

$$D^E_{xx}(\omega, z, z_0) = \int \Big(D^E_{rr}(\omega, k_r)\cos^2\theta + D^E_{\theta\theta}(\omega, k_r)\sin^2\theta\Big)\,\frac{d^2\mathbf{k}_\parallel}{(2\pi)^2}, \quad (26)$$

$$D^E_{yy}(\omega, z, z_0) = \int \Big(D^E_{rr}(\omega, k_r)\sin^2\theta + D^E_{\theta\theta}(\omega, k_r)\cos^2\theta\Big)\,\frac{d^2\mathbf{k}_\parallel}{(2\pi)^2}, \quad (27)$$

$$D^E_{zz}(\omega, z, z_0) = \int D^E_{zz}(\omega, k_r)\frac{d^2\mathbf{k}_\parallel}{(2\pi)^2}. \quad (28)$$

Магнитные функции Грина могут быть выражены через электрические функции Грина:

$$D^H_{il}(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{\omega^2}\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn}\frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x'^m}D^E_{kn}(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{x}'). \quad (29)$$

Найдем компоненты магнитной функции Грина в локальном базисе $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_z$:

$$D^H_{rr}(\omega, k_r) = \frac{ik_z}{2\Delta_{TE}}\Big[\mathrm{e}^{ik_z z}\Big(r_{TE1}r_{TE2}\,\mathrm{e}^{ik_z(2d-z_0)} - r_{TE2}\,\mathrm{e}^{ik_z z_0}\Big) + \\ + \mathrm{e}^{-ik_z z}\Big(r_{TE1}r_{TE2}\,\mathrm{e}^{ik_z(2d+z_0)} - r_{TE1}\,\mathrm{e}^{ik_z(2d-z_0)}\Big)\Big], \quad (30)$$

$$D^H_{\theta\theta}(\omega, k_r) = \frac{i\omega^2}{2k_z\Delta_{TM}}\Big[\mathrm{e}^{ik_z z}\Big(r_{TM1}r_{TM2}\,\mathrm{e}^{ik_z(2d-z_0)} + r_{TM2}\,\mathrm{e}^{ik_z z_0}\Big) + \\ + \mathrm{e}^{-ik_z z}\Big(r_{TM1}r_{TM2}\,\mathrm{e}^{ik_z(2d+z_0)} + r_{TM1}\,\mathrm{e}^{ik_z(2d-z_0)}\Big)\Big], \quad (31)$$

$$D^H_{zz}(\omega, k_r) = \frac{ik_r^2}{2k_z\Delta_{TE}}\Big[\mathrm{e}^{ik_z z}\Big(r_{TE1}r_{TE2}\,\mathrm{e}^{ik_z(2d-z_0)} + r_{TE2}\,\mathrm{e}^{ik_z z_0}\Big) + \\ + \mathrm{e}^{-ik_z z}\Big(r_{TE1}r_{TE2}\,\mathrm{e}^{ik_z(2d+z_0)} + r_{TE1}\,\mathrm{e}^{ik_z(2d-z_0)}\Big)\Big]. \quad (32)$$

Декартовы компоненты магнитных функций Грина получаются из локальных компонент магнитных функций Грина (30)–(32) аналогично (26)–(28).

Для вычисления давления удобно воспользоваться формулой для T_{zz}-компоненты тензора энергии-импульса [9]:

$$T_{zz}(z_0) = -\frac{i}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\left[D^E_{xx}(\omega, z_0, z_0) + D^E_{yy}(\omega, z_0, z_0) - D^E_{zz}(\omega, z_0, z_0) + \right.$$
$$\left. + D^H_{xx}(\omega, z_0, z_0) + D^H_{yy}(\omega, z_0, z_0) - D^H_{zz}(\omega, z_0, z_0)\right]. \quad (33)$$

Из формулы (33) и выражений для электрических и магнитных функций Грина (23)–(25), (30)–(32) получаем формулу Лифшица [5] для давления в системе двух диэлектрических полупространств, разделенных вакуумной щелью d:

$$P = -\frac{1}{2\pi^2}\int\limits_0^{\infty} d\omega \int\limits_0^{\infty} dk_r\, k_r \exp\left(-2\sqrt{\omega^2 + k_r^2}d\right)\sqrt{\omega^2 + k_r^2}\, \times$$
$$\times\left(\frac{r_{TE1}(i\omega, k_r) r_{TE2}(i\omega, k_r)}{\Delta_{TE}(i\omega, k_r)} + \frac{r_{TM1}(i\omega, k_r) r_{TM2}(i\omega, k_r)}{\Delta_{TM}(i\omega, k_r)}\right). \quad (34)$$

В монографии [9] для нахождения давления используется решение для функций Грина, не зависящее от $z + z_0$, где z и z_0 — аргументы функций Грина. Важно подчеркнуть, что зависимость электрических и магнитных функций Грина от $z + z_0$ необходима для калибровочной инвариантности теории и получения корректного выражения для потенциала Казимира–Полдера нейтрального атома, находящегося между двумя диэлектрическими полупространствами [8].

Работа выполнена при финансовой поддержке грантом Российского научного фонда (проект № 22-13-00151). Исследования проведены с использованием вычислительных ресурсов ресурсного центра «Вычислительный центр СПбГУ» (http://www.cc.spbu.ru/).

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Casimir H. B. G., Polder D.* The Influence of Retardation on the London–van der Waals Forces // Phys. Rev. 1948. V. 73. P. 360–372.
2. *Casimir H. B. G.* On the Attraction between Two Perfectly Conducting Plates // Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch. B. 1948. V. 51. P. 793–795.
3. *Fursaev D., Vassilevich D.* Operators, Geometry and Quanta: Methods of Spectral Geometry in Quantum Field Theory. Dordrecht: Springer. 2011.
4. *Bordag M., Klimchitskaya G. L., Mohideen U., Mostepanenko V. M.* Advances in the Casimir Effect. Oxford: Oxford Univ. Press, 2015.
5. *Lifshitz E. M.* The Theory of Molecular Attractive Forces between Solids // J. Exp. Theor. Phys. 1955. V. 29. P. 94–110.
6. *Schram K.* On the Macroscopic Theory of Retarded Van der Waals Forces // Phys. Lett. A. 1973. V. 43. P. 282–284.
7. *Nesterenko V. V., Pirozhenko I. G.* Lifshitz Formula by a Spectral Summation Method // Phys. Rev. D. 2012. V. 86. 052503.
8. *Marachevsky V. N., Sidelnikov A. A.* Green Functions Scattering in the Casimir Effect // Universe. 2021. V. 7. 195.
9. *Lifshitz E. M., Pitaevskii L. P.* Statistical Physics. Part II. Oxford: Pergamon, 1980.

Получено 31 января 2023 г.