

# МОНИТОРИНГ БЕТАТРОННЫХ КОЛЕБАНИЙ В БУСТЕРНОМ СИНХРОТРОНЕ ОИЯИ

*В. М. Жабицкий*<sup>1</sup>

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Обсуждаются методы обработки цифрового сигнала, наблюдаемого с помощью четырех-электродного датчика положения ионных сгустков в процессе ускорения в синхротроне. Разработан метод реконструкции функции распределения ионов по длине сгустка, совершающего бетатронные колебания, при ускорении. Полученные результаты использованы для отображения эволюции длины сгустка, совершающего бетатронные колебания, и для идентификации дробной части числа свободных бетатронных колебаний сгустков при ускорении ионов ксенона в бустерном синхротроне ОИЯИ.

Methods of processing a digital signal observed from a four-electrode transverse position sensor of ion bunches during acceleration in a synchrotron are discussed. A method has been developed for reconstructing the ion distribution function along the length of a bunch performing betatron oscillations during acceleration. The results obtained are used to display the bunch length evolution performing betatron oscillations and to identify the fractional part of the free betatron oscillations tune of ion bunches during acceleration.

PACS: 29.20.Lq; 29.27.Fh

## ВВЕДЕНИЕ

Наблюдение бетатронных колебаний заряженных сгустков является обязательной процедурой в синхротронах. Для настройки и оптимизации ускорителя необходимо выявить параметр  $Q$  — число бетатронных колебаний за один оборот. При измерении  $Q$  бетатронные колебания заряженных частиц относительно замкнутой орбиты обычно регистрируют одним датчиком. Поэтому результаты измерений позволяют установить  $\{Q\}$  — дробную часть частот бетатронных колебаний в горизонтальной и вертикальной плоскостях [1]. Необходимые данные получают для центра тяжести сгустка с помощью четырехэлектродного датчика. Используются традиционные методы регистрации аналоговых сигналов с электродов и их последующей цифровой обработки [1, 2]. В новых публикациях добавлен метод выявления особенностей наблюдаемых цифровых сигналов для центра тяжести сгустка при сопоставлении полученных цифровых данных на двух последовательных оборотах [3]. В настоящей

---

<sup>1</sup>E-mail: V.Zhabitsky@jinr.ru

работе изложены процедуры регистрации и математической обработки наблюдаемых при циркуляции сгустков сигналов с целью реконструкции функции распределения ионов по длине сгустка, совершающего бетатронные колебания. Разработанные методы позволили идентифицировать величину  $\{Q\}$  на бустерном синхротроне ОИЯИ, где осуществляются пусконаладочные работы на комплексе NICA [4]. Приведенные процедуры обработки сигналов базируются на методе реконструкции продольной функции распределения ионов в сгустке [5, 6], который был успешно применен при изучении продольной динамики ионных сгустков для широкого класса задач (см. [7, 8]), в том числе для томографического восстановления продольного фазового портрета сгустка [9, 10].

## ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

**Регистрация сигналов.** В синхротроне сгустки заряженных частиц циркулируют со скоростью  $v$  вдоль равновесной орбиты с периметром  $C$ , совершая бетатронные колебания в поперечной  $(x, y)$  к циркуляции частиц  $(s)$  плоскости. Для наблюдения бетатронных колебаний сгустков заряженных частиц в процессе ускорения обычно применяют четырехэлектродные датчики положения. На нуклотроне и на бустерном синхротроне ОИЯИ используются электростатические датчики, длина электродов которых значительно меньше длины сгустков. Данные об иницируемых сгустками импульсах напряжений с каждого из электродов  $u_a(t)$  передаются на удаленные усилители (рис. 1). Расположение электродов по часовой стрелке через  $90^\circ$  (ориентация совпадает с направлением  $s$  циркуляции сгустков) учтено в приведенных наименованиях (см. рис. 1). Электрод  $A$  расположен в вакуумной камере синхротрона со смещением к внешней стороне относительно ее центра. Электрод  $B$  расположен в вакуумной камере синхротрона над горизонтальной плоскостью циркуляции частиц. Электроды имеют одинаковую длину и по геометрическим параметрам идентичны друг другу. Сигналы с электродов в датчике положения используются согласованно: электроды  $A, C$  позволяют наблюдать бетатронные смещения сгустка от центра вакуумной камеры в горизонтальной  $x$  плоскости орбиты синхротрона, а электроды  $B, D$  — в вертикальной  $y$  плоскости.

Выходные сигналы с усилителей  $U_A(t)$ ,  $U_B(t)$ ,  $U_C(t)$  и  $U_D(t)$  оцифровываются (с постоянным периодом дискретизации  $T_{\text{clk}}$ ) дигитайзером [11]. Затем осуществляется математическая обработка [11, 12] цифровых сигналов  $U_a[n]$ . На рис. 2 представлены примеры графиков цифровых сигналов  $U_a[n]$ , которые наблюдались на бустерном

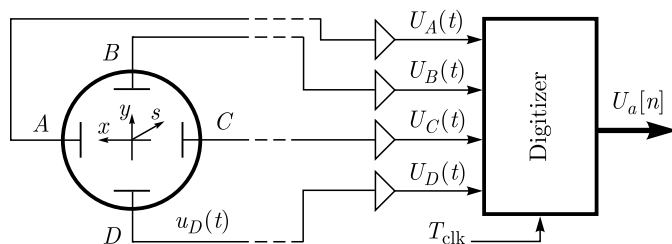


Рис. 1. Функциональная схема регистрации  $u_a(t)$  и  $U_a[n]$ :  $a \in [A, B, C, D]$

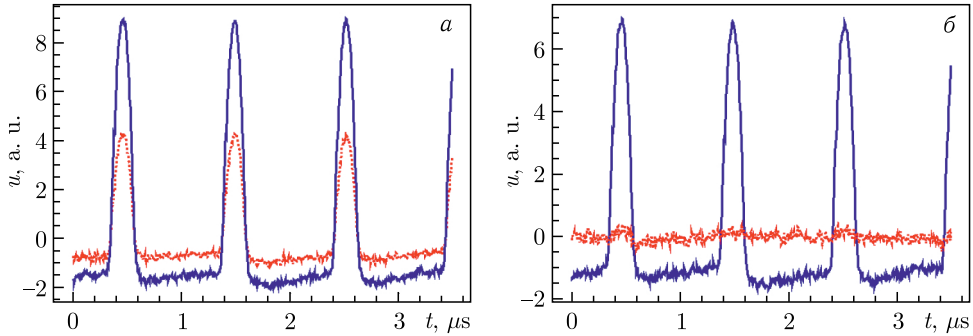


Рис. 2 (цветной в электронной версии). Графики сигналов: а)  $U_C[n]$  (синяя сплошная линия) и  $U_A[n]$  (красная пунктирная линия); б)  $U_D[n]$  (синяя сплошная линия) и  $U_D[n] - U_B[n]$  (красная пунктирная линия)

синхротроне ОИЯИ. Сигнал  $U_C[n]$  заметно превосходит сигнал  $U_A[n]$  по наблюдаемым величинам (см. рис. 2, а). Это означает, что в горизонтальной плоскости ускоряемые частицы циркулируют со смещением от центра вакуумной камеры. На рис. 2, б представлен график сигнала  $U_D[n]$ , который практически совпадает с  $U_B[n]$  по наблюдаемым величинам, подтверждением чего служит разностный сигнал  $U_D[n] - U_B[n]$ . Это свидетельствует о достаточно качественной циркуляции пучка относительно центра вакуумной камеры в вертикальной плоскости.

Таким образом, для разностного сигнала необходимо разработать процедуры выявления детерминированного сигнала, обусловленного бетатронными колебаниями частиц, на фоне случайных помех. Подобная задача успешно решается для узкополосных сигналов в радиофизике [13]. Выделение разностного сигнала для бетатронных колебаний также успешно осуществляется на многих синхротронах (см., например, публикации [1, 14]). В рамках рассматриваемой концепции регистрации сигналов необходимо выявить закономерности соответствия  $u_a(t_n) \iff U_a[n]$ .

Обычно каждому сгустку сопоставляется усредненное по длине сгустка показание о смещении в поперечном направлении на каждом обороте. Пример такой процедуры изложен в [15]. Выявленные усредненные показания используются при анализе поперечной динамики сгустка при ускорении. Например, анализируется положение рабочей точки по  $\{Q\}$  при отклике сгустка на импульсное или шумовое воздействие специализированного дипольного магнита. Данная методика применялась в исследованиях на нуклотроне [11] и была опробована на бустерном синхротроне ОИЯИ [12].

В настоящей работе будет использован весь массив наблюдаемых с помощью четырехэлектродного датчика цифровых данных  $U_a[n]$ , которые будут преобразованы в функциональные зависимости  $U[i, j, k]$ , отвечающие цифровым отсчетам  $i$  для сгустка  $j$  на обороте  $k$ . Функции  $U[i, j, k]$ , характеризующие распределение ионов по длине сгустка, совершающего бетатронные колебания, будем для краткости называть *бетатрон-продольными функциями распределения*. Все данные  $U[i, j, k]$  как массива показаний согласуются резонансным образом с наблюдаемыми величинами. Поскольку сгусток есть ансамбль частиц, то появляется возможность идентифицировать  $\{Q\}$  — дробную часть числа бетатронных колебаний за один оборот, не прибегая к процедурам возбуждения поперечных колебаний пучка.

**Наведенный потенциал на электроде.** Наблюдаемый аналоговый сигнал напряжения  $u_a(t)$  с каждого электрода в квазистатическом приближении пропорционален изменению потенциала  $\varphi_a(t)$  на электроде, длина которого  $l_a$ . При правильном выборе параметров радиотехнической цепи при регистрации изменения потенциала получаем последовательность импульсов, следующих с периодичностью  $T_{\text{rf}}$  (частота ускоряющего напряжения равна  $T_{\text{rf}}^{-1}$ ). Длительность  $\Delta\tau_s$  наблюдаемого импульса отвечает длине сгустка  $4\sigma_s < C/h_{\text{rf}}$ . Здесь  $\sigma_s$  — среднеквадратичная длина сгустка,  $h_{\text{rf}} \equiv T_{\text{rev}}/T_{\text{rf}}$  — кратность частоты ускоряющего поля ( $T_{\text{rev}} = C/v$ ). Следовательно,  $\Delta\tau_s \equiv 4\sigma_s/v < T_{\text{rf}}$ . Однако  $l_a \ll v\Delta\tau_s$ . В соответствии с используемым квазистатическим приближением это означает, что величина сигнала плавно увеличивается при влете сгустка в датчик, далее остается неизменной (при должном выборе входного импеданса радиотехнической цепи), а затем плавно уменьшается при вылете сгустка из датчика (полосковые датчики в настоящей работе не рассматриваются).

Текст здесь приведен для одного циркулирующего сгустка с целью упрощения изложения результатов без ущерба к физической интерпретации исследуемых процессов.

Пролетающий сгусток наводит на электродах заряды. Заряды  $e_a$  и потенциалы  $\varphi_a$  на проводящих электродах зависят друг от друга линейным образом [16]:

$$e_a = \sum_b C_{ab} \varphi_b.$$

Величины  $C_{aa}$  и  $C_{ab}$  зависят от формы и взаимного расположения проводящих электродов датчика, находящегося внутри заземленной проводящей вакуумной камеры. Величины  $C_{aa}$  называют коэффициентами емкости, а величины  $C_{ab} (a \neq b)$  — коэффициентами электростатической индукции [16]. Если заряд иона в сгустке есть  $q$ , а продольное распределение числа ионов вдоль сгустка характеризуется функцией  $N(t)$ , то каждый наблюдаемый импульс изменения потенциала на электроде пропорционален  $qN(t)$  и обратно пропорционален величине коэффициента емкости  $C_{aa}$ :

$$u_a(t) = qN(t)C_{aa}^{-1} + \Delta u_a(t), \quad a \in (A, B, C, D). \quad (1)$$

Поправка  $\Delta u_a(t)$  возникает вследствие экранирования электрода  $a$  заземленной проводящей камерой и учета взаимного влияния других электродов  $b \neq a$ , вклад которых пропорционален коэффициентам электростатической индукции  $C_{ab} (a \neq b)$ .

Вклад слагаемого, пропорционального  $C_{aa}^{-1}$  в (1), по величине становится преобладающим для сформированных сгустков, когда  $4\sigma_s < C/h_{\text{rf}}$ . В квазистатическом приближении этот вклад пропорционален удаленности заряженного сгустка, движущегося по орбите с релятивистской скоростью, от электрода [1, 16]. Тогда наблюдаемые сигналы  $u_a(t)$  отвечают отклонениям сгустка  $d_a(t)$  от равновесной орбиты в конкретный момент времени ( $t$ ). Если поперечный размер сгустка невелик по сравнению с апертурой 2D датчика положения, то  $d_a(t)$  по величине совпадает с отклонением центра такого пучка от центра вакуумной камеры. Обычно сигналы с электродов  $u_a(t)$  прокалиброваны и согласованы по амплитуде. Поэтому для электростатического датчика для смещений  $d_a(t)$  относительно центра вакуумной камеры с апертурой 2D с достаточно высокой степенью точности можно считать, что

$$u_a(t) = \frac{S_a q N(t)}{d_a(t)} + \Delta u_a(t). \quad (2)$$

Здесь  $S_a$  характеризует чувствительность датчика к смещениям пучка.

**Наблюдаемый цифровой сигнал.** Сигнал  $u_a(t)$  передается по кабельной линии на входной усилитель (см. рис. 1), где его величина есть  $U_a(t)$ . Вследствие ограниченной полосы пропускания передающей линии сигнал  $U_a(t)$  будет наблюдаться со смещением базового уровня  $\Delta U_a(t)$ :

$$U_a(t) = u_a(t) + \Delta U_a(t).$$

Если сигналы  $u_a(t)$  есть последовательность положительных импульсов, то смещение  $\Delta U_a(t)$  будет отрицательным. По величине такое смещение  $\Delta U_a(t)$  зависит в первую очередь от амплитуды импульсного тока циркулирующих ионов и соотношения между шириной импульсов и периодом их следования при согласовании источника сигнала ( $u_a$  на электроде) с приемником сигнала ( $U_a$  на входном усилителе) [16].

Пусть аналоговый сигнал  $U_a(t)$  преобразуется в последовательность цифровых отсчетов  $U_a[n] \triangleq U_a(t_n)$ , соответствующих моментам времени  $t_n = n \cdot T_{\text{clk}}$  с постоянным периодом дискретизации  $T_{\text{clk}}$ . Цифровая последовательность отсчетов  $U_a[n]$ , будучи результатом измерений, отвечает, при выполнении условий Котельникова–Найквиста [13]  $T_{\text{clk}} \ll T_{\text{rf}}$ , наблюдаемому сигналу  $u_a(t)$  с учетом измерительных помех и смещений базового уровня. Таким образом, для цифровых сигналов имеем

$$U_a[n] = u_a[n] + \Delta U_a[n].$$

Здесь предполагается, что преобразование Котельникова [13] допустимо для  $u_a(t_n) \triangleq u_a[n]$  и  $\Delta U_a(t_n) \triangleq \Delta U_a[n]$ . Необходимо восстановить  $u_a[n]$  из наблюдаемых данных  $U_a[n]$ , принимая во внимание наличие смещений базового уровня  $\Delta U_a[n]$ . Будем полагать, что все цифровые последовательности отвечают положительно ориентированным импульсам.

**Комбинации сигналов с электродов.** Разностный сигнал с электродов  $A$  и  $C$  будет соответствовать смещениям центра тяжести сгустка в горизонтальной плоскости. Следовательно, для цифровых последовательностей имеем

$$U_-[n] \equiv (U_A[n] - U_C[n])\varkappa = (u_A[n] - u_C[n] + \Delta U_A[n] - \Delta U_C[n])\varkappa. \quad (3)$$

Здесь  $\varkappa$  — коэффициент *полярности*, равный  $\pm 1$ , который введен для того, чтобы сохранить общий подход к изложению последующих результатов при соблюдении соглашения о положительно ориентированных импульсных последовательностях. Если  $U_A[n] > U_C[n]$  в среднем по длине импульса, то  $\varkappa = 1$ . В противном случае, если  $U_A[n] < U_C[n]$  в среднем по длине импульса, то  $\varkappa = -1$ . Более подробное обсуждение *полярности* разностного сигнала будет приведено далее в тексте.

Если равновесная орбита имеет смещение  $\Delta x(t)$  относительно центра вакуумной камеры, а бетатронное смещение пучка относительно орбиты есть  $x(t)$ , то

$$\begin{aligned} u_A(t) &= S_x q N(t) / (D_x + x + \Delta x) + \Delta u_A, \\ u_C(t) &= S_x q N(t) / (D_x - x - \Delta x) + \Delta u_C, \end{aligned}$$

где  $D_x$  — апертура датчика в горизонтальной плоскости;  $S_x$  — чувствительность датчика к смещениям пучка. В результате, в соответствии с уравнением (2), для малых величин  $x$ ,  $\Delta x$  по сравнению с  $D_x$  в линейном приближении в (3) получаем

$$U_-[n] = \left( \frac{2qS_x}{D_x} N[n] \frac{x[n] + \Delta x[n]}{D_x} + \Delta U_-[n] \right) \varkappa, \quad (4)$$

где

$$\Delta U_-[n] \equiv \Delta u_A[n] - \Delta u_C[n] + \Delta U_A[n] - \Delta U_C[n]$$

есть смещение базового уровня для разностного сигнала  $U_-[n]$ . Для суммарного сигнала  $U_+ \equiv U_A + U_C$  в этом же приближении имеем

$$U_+[n] \equiv U_A[n] + U_C[n] = \frac{2qS_x}{D_x} N[n] + \Delta U_\Sigma[n], \quad (5)$$

где базовое смещение  $\Delta U_\Sigma[n]$  суммарного сигнала  $U_+[n]$  есть

$$\Delta U_\Sigma[n] = \Delta u_A[n] + \Delta u_C[n] + \Delta U_A[n] + \Delta U_C[n].$$

Для суммарного сигнала  $V_+ \equiv U_B + U_D$  получаем аналогичное выражение. Разностный сигнал с электродов  $B$  и  $D$  будет соответствовать бетатронным смещениям  $y(t)$  центра тяжести сгустка в вертикальной плоскости с точностью  $\Delta y$  — позиционирования датчика относительно орбиты:

$$V_-[n] \equiv (U_B[n] - U_D[n])\varkappa = \left( \frac{2qS_y}{D_y} N[n] \frac{y[n] + \Delta y[n]}{D_y} + \Delta V_-[n] \right) \varkappa, \quad (6)$$

где базовое смещение  $\Delta V_-[n]$  разностного сигнала  $V_-[n]$  есть

$$\Delta V_-[n] \equiv \Delta u_B[n] - \Delta u_D[n] + \Delta U_B[n] - \Delta U_D[n].$$

Таким образом, суммарный сигнал имеет составляющую, зависящую от распределения числа ионов  $N[n]$  по длине сгустка. Вклад первого слагаемого в (5), пропорционального  $N(t)$ , является определяющим. Разностный сигнал, по составляющим его величинам, зависит от произведения относительных смещений сгустка  $(x[n] + \Delta x[n])/D_x$  (или  $(y[n] + \Delta y[n])/D_y$ ) и составляющей, пропорциональной  $N[n]$ . Если величины относительных смещений невелики, то вклад первого слагаемого в (4) (или в (6)) может быть сопоставим с  $\Delta U_-[n]$  (или с  $\Delta V_-[n]$ ).

Обычно все составные части магнитной структуры синхротрона тщательно изготавливаются с тем, чтобы минимизировать отклонения от идеальной (расчетной) структуры. Поэтому величина  $\Delta y$  крайне мала, так что ее наличие можно относить к неточности юстировки датчика в вертикальной плоскости. Однако смещения  $\Delta x$  необходимо минимизировать в процессе настройки равновесной орбиты с тем, чтобы настроенная орбита отвечала расчетной, когда сгустки циркулируют вдоль центра вакуумной камеры, что отвечает максимальному акцептансу синхротрона. При анализе цифровых сигналов  $U_-[n]$ ,  $U_+[n]$ ,  $V_-[n]$  и  $V_+[n]$  следует выработать критерии применимости используемых алгоритмов, исходя из физических особенностей исходных аналоговых сигналов, поперечной динамики ускоряемых ионов и величин сигналов по

сравнению с шумами. Следует уделить особое внимание критерию *полярности* разностного сигнала и смещениям базового уровня  $\Delta U_{=} [n]$  и  $\Delta V_{=} [n]$ , величина которых зависит от шага квантования измеряемого сигнала по амплитуде и периода дискретизации сигнала с учетом шумов, а также, главным образом, от длительности импульса сгустка  $\Delta \tau_s$  по сравнению с  $T_{rf}$ .

### БЕТАТРОН-ПРОДОЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

**Процедура реконструкции.** Одномерные последовательности отсчетов  $U[n]$ , где  $U[n]$  есть цифровой сигнал  $U_a[n]$  или комбинация цифровых сигналов с датчика, могут быть преобразованы в соответствии с процедурой, изложенной в работе [5], в трехмерные последовательности для профилей **profile#k: b#j**  $\equiv U_j[i, j, k]$  (рис. 3: пример для 5 сгустков). Получающиеся функции  $U_j[i, j, k]$ , будучи положительно определенными финитными функциями, могут являться характеристикой закона распределения ионов (индекс  $i$ ) по длине сгустка с номером  $j \in [1, h_{rf}]$  на обороте  $k$  с учетом удаленности сгустка от электродов. Реконструированная функция распределения ионов по длине сгустка, совершающего бетатронные колебания, названа *бетатрон-продольной функцией распределения* в соответствии с определениями, принятыми для функций распределения в статистической физике.

Процедура преобразования, которая аналогична использованной в [5], заключается в следующем.

Аналоговый сигнал с датчика  $U(t)$  и синхронизирующий сигнал  $\tilde{U}(t)$  поступают на дигитайзер, где эти сигналы оцифровываются:  $U(t_n) \triangleq U[n]$  и  $\tilde{U}(t_n) \triangleq \tilde{U}[n]$ . Для цифровой последовательности  $\tilde{U}[n]$  формируются точки расщепления  $t_j(k)$ , с помощью которых осуществляется привязка сигнала  $U[n]$  для  $j$ -сгустка на  $k$ -обороте к синхронизирующему сигналу  $\tilde{U}[n]$ . Индекс  $n$  пробегает значения от  $n_l(j, k)$  для левой границы временного интервала  $T_{rf}(k)$  до  $n_r(j, k)$  для его правой границы в соответствии с правилами позиционирования компактного ускоряемого сгустка [5]: на рис. 3 точки расщепления указаны вертикальными метками на оси  $t$  для энергий частиц ниже критической. Сформированная таким образом серия отсчетов для  $j$ -сгустка на  $k$ -обороте начинается в момент времени  $t_j(k)$ . В указанных пределах по  $n$  выявляется минимальное отрицательное значение  $U^{\min}[n]$ , которое используется

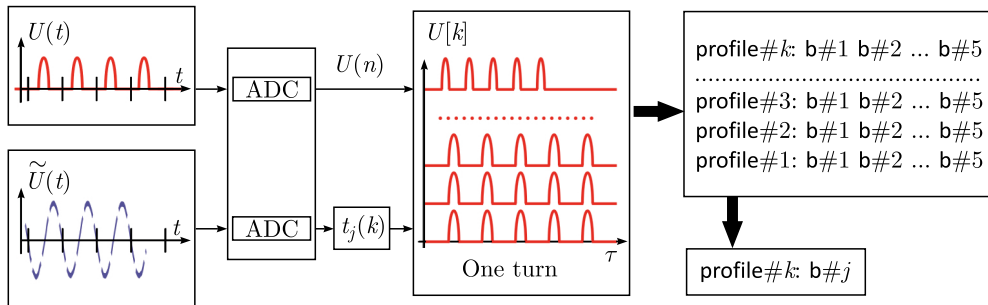


Рис. 3. Функциональная схема формирования функций **profile#k: b#j**

для компенсации смещения базового уровня. В результате получаем положительную последовательность данных в пределах сгустка.

Вследствие ускорения число отсчетов по  $i$  в пределах сгустка будет уменьшаться (см. рис. 3). Для сохранения начального диапазона по  $i$ , возникающего при  $k = 0$ , при графическом отображении эволюции  $h_{rf}$  сгустков в течение  $k$  оборотов добавляются отсчеты, совпадающие с данными для первого сгустка в момент времени  $t_1(k)$ . Поэтому диапазон изменения индекса  $i$  в трехмерном массиве данных, подлежащих графическому представлению, лежит в пределах от нуля до

$$i_{\max} \equiv \frac{\tau}{T_{\text{clk}}} = \frac{T_{\text{rev}}^{\max}(k)}{T_{\text{clk}}}.$$

Если сгусток один ( $h_{rf} = 1$ ) или изучается эволюция профиля для одного выбранного сгустка  $j$ , то  $T_{\text{rev}}^{\max}(k)$  необходимо заменить на  $T_{\text{rf}}^{\max}(k)$ . Вследствие этого диапазон  $\tau$  по времени при графическом отображении функции  $U_j[i, j, k]$  будет от нуля до  $\tau_{\max} \equiv i_{\max} T_{\text{clk}}$  (см. рис. 3).

Точки расщепления  $t_j(k)$  в [5] заданы для гармонической функции ускоряющего напряжения. В настоящей работе в качестве синхронизирующего сигнала использовалась сумма сигналов  $\tilde{U}[n] = U_A[n] + U_B[n] + U_C[n] + U_D[n]$ . Величина  $t_j(k)$  вычислялась с учетом данных для двух последовательных максимальных значений  $\tilde{U}[n]$  в соседних импульсах наблюдаемых напряжений. Таким образом, используется общепринятый в математической статистике [17] метод нахождения центра  $t_j(k)$  распределения  $\tilde{U}[n]$  между двумя максимальными значениями.

**Эволюция бетатрон-продольной функции распределения.** В результате для функции  $U_j[i, j, k]$  получаем трехмерный массив, который можно представить как 3D-графическое представление в координатах  $(\tau, k, U_j)$  для импульсного напряжения  $U_j$ , наведенное сгустком на электроде с учетом удаленности сгустка от электродов. Удобно эту же зависимость отображать как 2D-график в проекции на плоскость  $(\tau, k)$ , где величина  $U_j$  представлена цветом. При построении 3D- и 2D-графиков использовалась процедура усреднения данных для профилей на нескольких оборотах  $\Delta k_{\text{av}}$ .

Таким образом, после применения процедуры преобразования одномерной цифровой последовательности для  $U_-[n]$  и  $V_-[n]$  получаем функции  $U_{j-}[i, j, k]$  и  $V_{j-}[i, j, k]$ . Из (4) и (6) следует, что эти функции имеют составляющую, обусловленную бетатронными колебаниями сгустков. Наблюдаемые с электродов сигналы не имеют постоянной составляющей. Следовательно, разностный сигнал всегда будет иметь некоторое смещение базового уровня относительно нуля. Если уровень базового смещения отрицателен, то импульсы от сгустков будут положительно ориентированы и  $\varkappa = 1$ . Если уровень базового смещения положителен, то импульсы от сгустков будут отрицательно ориентированы и  $\varkappa = -1$ . Приведенное утверждение есть критерий *полярности* для разностных сигналов. Его применение позволяет всегда иметь только положительно определенные финитные функции для  $U_{j-}[i, j, k]$  и  $V_{j-}[i, j, k]$ .

Сконструированные таким образом функции  $U_{j-}[i, j, k]$  и  $V_{j-}[i, j, k]$ , с учетом *полярности* разностных сигналов, есть положительно определенные финитные функции, которые в пределах каждого импульса напряжения, генерируемого сгустком, начинаются, вследствие шумов, с почти нулевых (но положительных) величин, достигают положительных максимальных значений и далее спадают до нуля. Поэтому



функции  $U_{j-}[i, j, k]$  и  $V_{j-}[i, j, k]$  могут быть интерпретированы как функции распределения и использованы для выявления эволюции длины сгустка с учетом его удаленности от электродов, а также для изучения других закономерностей с использованием методов, общепринятых в математической статистике [17].

Число частиц в  $j$ -сгустке на  $k$ -обороте пропорционально величине суммарного сигнала  $\tilde{U} = U_A + U_B + U_C + U_D$ :

$$\mathbb{M}_0(\tilde{U})[j, k] = \langle \tilde{U}[i, j, k] \rangle \cdot T_{\text{clk}}/T_{\text{rf}}[k] \equiv \left( \sum_{i=0}^{T_{\text{rf}}[k]/T_{\text{clk}}} \tilde{U}[i, j, k] \right) \cdot T_{\text{clk}}/T_{\text{rf}}[k].$$

Здесь и далее  $\langle \dots \rangle$  идентифицирует процедуру суммирования по индексу  $i$  в пределах сгустка:  $i \in [0, \dots, T_{\text{rf}}[k]/T_{\text{clk}})$ . Величина  $\mathbb{M}_0(U_{j+})[j, k]$  может быть использована для контроля процедуры реконструкции: результат расчета должен отвечать постоянному значению или убывать при наличии потерь частиц.

**Первый момент бетатрон-продольной функции распределения.** Для выявления параметра  $\{Q\}$  — дробной части числа бетатронных колебаний — можно воспользоваться цифровыми данными  $U_{-}[n]$  и  $V_{-}[n]$ . Действительно, в синхротроне, оптимизированном на максимальную проводку пучка в вакуумной камере циклического ускорителя, сгустки циркулируют вдоль центра камеры. Поэтому сигналы с противоположных электродов, которые прокалиброваны относительно центра вакуумной камеры, близки по величине друг к другу. Следовательно, близки величины добавочных смещений ( $\Delta u_a$  и  $\Delta U_a$ ). При их вычитании вклад смещений в  $U_{-}[n]$  и  $V_{-}[n]$ , можно полагать, частично нивелируется. Если потери частиц отсутствуют, то изменяющаяся по величине составляющая в сигналах  $U_{-}[n]$  и  $V_{-}[n]$  в своих амплитудных значениях обусловлена бетатронными смещениями частиц.

Первый момент функции распределения для положения центра сгустка  $j$  по времени на каждом обороте  $k$  с учетом отклонений от электродов есть

$$\mathbb{M}_1(U_{j-})[j, k] = \frac{\langle i \cdot U_{j-}[i, j, k] \rangle \cdot T_{\text{clk}}/T_{\text{rf}}[k]}{\langle U_{j-}[i, j, k] \rangle}.$$

Дискретное преобразование Фурье может быть применено для идентификации частоты свободных бетатронных колебаний в соответствии с данными для первого момента функции распределения  $\mathbb{M}_1(U_{j-})[j, k]$ . Действительно, поскольку фурье-преобразование  $\mathbf{A}(\omega) \equiv \mathcal{F}\{\mathbb{M}_1(U_{j-})[j, k]\}$  применяется для дискретных отсчетов, соответствующих положению центра сгустка по времени на каждом обороте, то для амплитуд  $|\mathbf{A}(\omega)|$  такого преобразования получаем спектр, который позволяет идентифицировать  $\{Q\}$ . Отметим, что для амплитуд  $|\mathbf{A}(\omega)|$  наблюдаемый спектр будет отвечать собственным частотам частиц в сгустке в области каждого пика  $\{Q\}$ .

## НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Применение изложенных выше методов обработки сигналов, которые наблюдались в бустерном синхротроне ОИЯИ [4] при проведении пусконаладочных работ в январе-феврале 2023 г., продемонстрируем, в первую очередь, для бетатронных колебаний в вертикальной плоскости. Использовалась технология TANGO для наблюдения

и записи цифровых сигналов on-line [18] примерно за 200 мс до вывода сгустка ( $h_{\text{rf}} = 1$ ) из бустера. При этом применялись 16-разрядные аналого-цифровые преобразователи и был выбран интервал дискретизации  $T_{\text{clk}} = 4$  нс. Осуществлялось ускорение ионов ксенона  $^{124}\text{Xe}^{28+}$ .

**Мониторинг колебаний в вертикальной плоскости.** На рис. 2, б представлены графики сигнала  $U_D[n]$ , который практически совпадает с  $U_B[n]$  по наблюдаемым величинам, и разностного сигнала  $U_D[n] - U_B[n]$ , так что  $\varkappa = -1$ .

На рис. 4, а представлен 3D-график эволюции функций  $V_{j-}[i, j, k]$  для единственного сгустка ( $h_{\text{rf}} = 1 \Rightarrow j = 1$ ), который за 200 мс совершил более 200 тыс. оборотов. В качестве синхронизирующего сигнала использовался  $\tilde{U} = U_A + U_B + U_C + V_D$ . Проекция 3D-графика на плоскость  $(\tau, k)$  приведена на рис. 4, б. Наклон влево свидетельствует об ускорении сгустка.

Функция  $\tilde{U}$  может быть применена для выявления зависимости числа частиц  $\langle N(t) \rangle \equiv M_0(\tilde{U})[1, k]$  от времени (см. рис. 5, а). Видно, что за время наблюдения 200 мс потери частиц незначительны. Результат фитирования (красная прямая линия с небольшим отрицательным наклоном) служит подтверждением этого. График зависимости  $T_{\text{rev}}(t)$  — периода обращения частиц от времени, приведенный на рис. 5, б, служит подтверждением наличия ускорения.

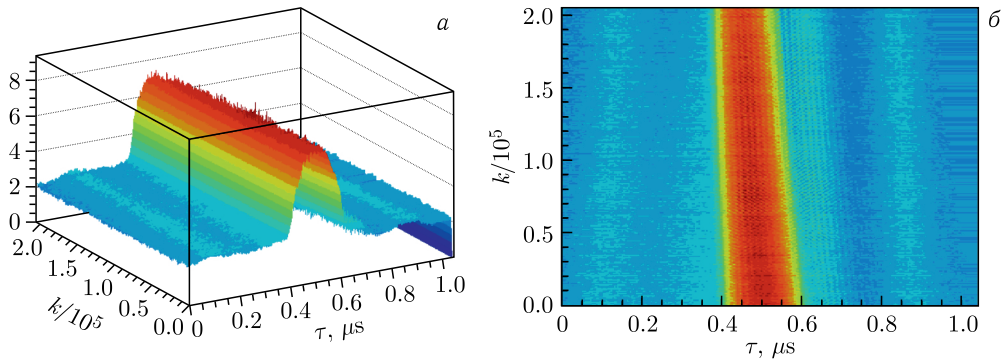


Рис. 4. 3D-график (а) и 2D-график (б) функции  $V_{j-}[i, j, k]$

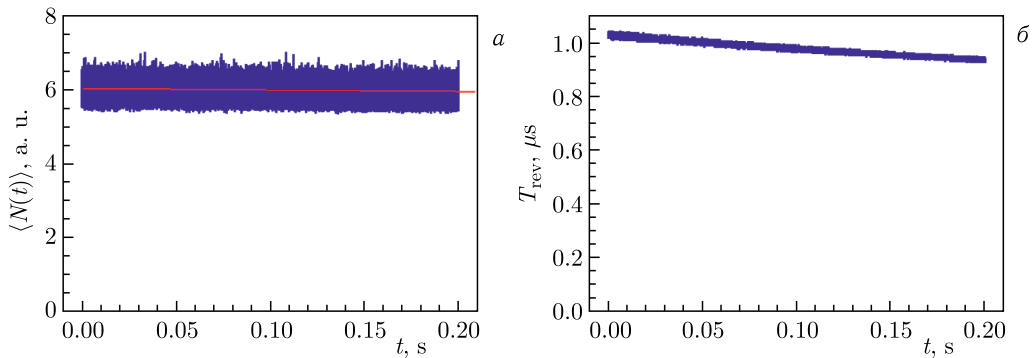


Рис. 5. а)  $\langle N(t) \rangle$ ; б)  $T_{\text{rev}}(t)$

Следует отметить еще одну особенность приведенных графических зависимостей на рис. 4. Закономерное сокращение длительности сгустка при ускорении (см. рис. 4, б) сопровождается также уменьшением вклада  $(y + \Delta y)/D_y$ : сгусток в конце измеряемого массива данных 200 мс все более точно позиционируется в центре вакуумной камеры, причем с уменьшенным среднеквадратичным поперечным размером вследствие закономерностей поперечной динамики пучков заряженных частиц.

**Мониторинг колебаний в горизонтальной плоскости.** На рис. 2, а представлены график сигнала  $U_C[n]$ , который заметно превосходит сигнал  $U_A[n]$  по наблюдаемым величинам, так что  $\varkappa = -1$ . Графики, иллюстрирующие эволюцию бетатрон-продольной функции распределения с учетом удаленности от электродов, приведены на рис. 6.

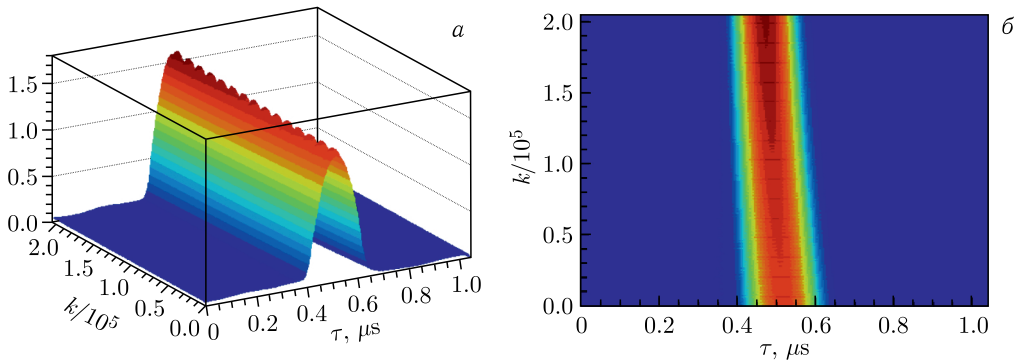


Рис. 6. 3D-график (а) и 2D-график (б) функции  $U_{1-}[i, 1, k]$

Приведенные графики подтверждают закономерное сокращение длительности сгустка. Однако, в отличие от рис. 4, сокращения вклада  $(x + \Delta x)/D_x$  не наблюдается. Орбита не проходит через центр вакуумной камеры.

**Частота колебаний в вертикальной плоскости.** На рис. 7, а приведен график для амплитуд  $|\mathbf{A}(\omega)|$  в течение  $\Delta k_{\text{init}} = 2^{11}$  оборотов (использовалось быстрое преобразование Фурье) после  $t_{\text{init}} = 195$  мс.

Пик при нулевой частоте ( $\omega = 0$ ) свидетельствует о достаточно качественной циркуляции сгустка (незначительное вертикальное смещение). Пик в области  $\omega/\omega_{\text{clk}} < 0,4$  можно идентифицировать как возможное значение для  $\{Q_y\}$ . Этот результат согласуется с данными для  $\{Q_y\}$ , приведенными в [12], где для измерения  $\{Q_y\}$  использовалась процедура внешнего возбуждения колебаний сгустка.

Обычно при измерении  $\{Q\}$  в момент времени  $t_{\text{init}}$  для регистрации выборок бетатронных смещений выбирается окно до  $2^{12}$  оборотов, в пределах которого иницируется внешнее возбуждение. Данные о реакции пучка на внешнее воздействие формируются в пределах  $2^{11}$  оборотов. Такая процедура измерения используется для того, чтобы минимизировать рост эмиттанса сгустка вследствие примененного внешнего воздействия. Поскольку в предлагаемом методе измерение  $\{Q\}$  осуществляется без внешнего воздействия на сгусток, то окно регистрации может быть выбрано в значительно более широком интервале. Результат такого измерения для  $\Delta k_{\text{init}} = 2^{16}$  оборотов при  $t_{\text{init}} = 0$  мс в записанных данных в течение 200 мс приведен на рис. 7, б. Расширение пика свидетельствует об изменении положения рабочей точки

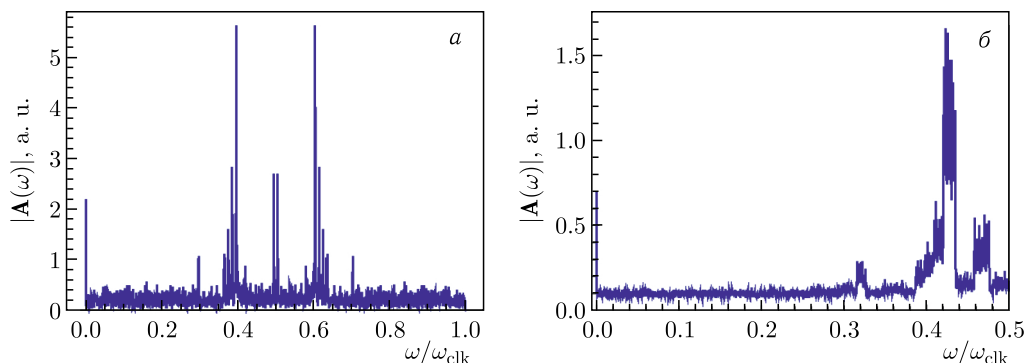


Рис. 7. Амплитуда спектра  $|\mathbf{A}(\omega)|$  вертикальных колебаний: а)  $t_{\text{init}} = 195$  мс,  $\Delta k_{\text{init}} = 2^{11}$ ; б)  $t_{\text{init}} = 0$  мс,  $\Delta k_{\text{init}} = 2^{16}$

по  $\{Q\}$  при ускорении. Следует, однако, отметить, что данные для первого момента бетатрон-продольной функции распределения цифрового сигнала  $U_{1-}$  одного ускоряемого сгустка сформированы для точек расщепления  $t_1(k)$ , вычисленных для синхронизирующего сигнала  $\tilde{U} \equiv U_A + U_B + U_C + U_D$ , т. е. в собственной системе сгустка. Поэтому приведенный метод идентификации  $\{Q\}$  должен быть верифицирован для синхронизирующего сигнала от ускоряющей ВЧ-станции.

**Частота колебаний в горизонтальной плоскости.** На рис. 8 приведены графики амплитуд спектра  $|\mathbf{A}(\omega)|$  при  $t_{\text{init}} = 195$  мс и  $t_{\text{init}} = 0$  мс с разной шириной окна  $\Delta k_{\text{init}}$ . Эти графики находятся в согласии с графиками спектров вертикальных колебаний. Необходимо также отметить, что идентифицированный пик для  $\{Q\}$  на рис. 8, а имеет форму и ширину на полувысоте, которые отвечают спектру собственных частот ионов в ускоряемом сгустке.

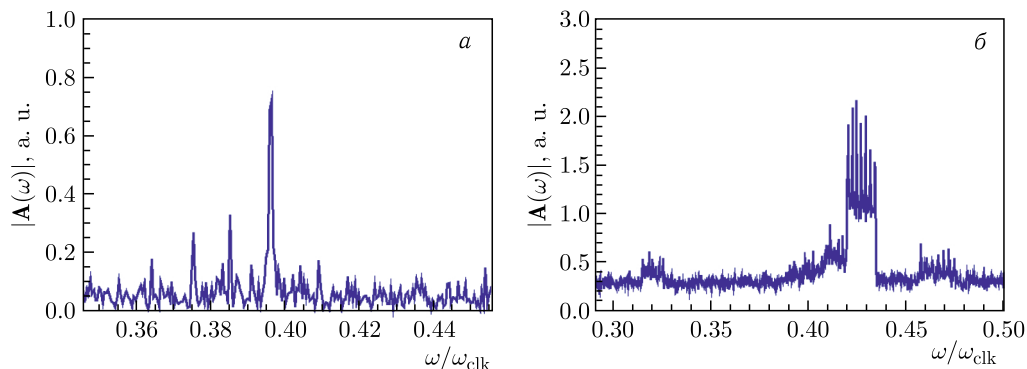


Рис. 8. Амплитуда спектра  $|\mathbf{A}(\omega)|$  горизонтальных колебаний: а)  $t_{\text{init}} = 195$  мс,  $\Delta k_{\text{init}} = 2^{11}$ ; б)  $t_{\text{init}} = 0$  мс,  $\Delta k_{\text{init}} = 2^{16}$

## ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Приведенные результаты позволяют утверждать, что процедура нормализации [15] для идентификации  $\{Q\}$  не столь необходима. Проще убедиться в постоянстве  $\langle N(t) \rangle$ . Достоинством изложенного выше метода являются широкие возможности исследова-

ния спектров свободных колебаний сгустков относительно равновесной орбиты в горизонтальной и вертикальной плоскостях.

Представляется интересным изучить приведенные выше результаты при совместном исследовании сигналов с четырехэлектродного датчика, а также сигналов с быстрого трансформатора тока и ускоряющего ВЧ-напряжения, характеризующих продольную динамику сгустков [5–10].

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработан метод реконструкции *бетатрон-продольной функции распределения* — функции распределения ионов по длине сгустка, совершающего бетатронные колебания.

Установлены правила определения *полярности* разностных сигналов с электродов датчика положения, выполнение которых позволяет реконструировать бетатрон-продольную функцию распределения.

Приведены примеры отображения эволюции бетатрон-продольной функции распределения при ускорении ионов ксенона в бустерном синхротроне ОИЯИ.

Приведены примеры идентификации дробной части числа свободных бетатронных колебаний за один оборот при ускорении без процедур возбуждения поперечных колебаний пучка. Предлагаемый метод должен быть верифицирован в последующих экспериментальных исследованиях. Получены спектры собственных частот ионов ксенона в сгустке при ускорении в бустерном синхротроне ОИЯИ.

Автор благодарен Е. В. Горбачеву за предоставленные экспериментальные данные и обсуждения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Jones R., Gasior M., Lefevre T. et al. Introduction to Beam Instrumentation // Proc. of the CAS–CERN Accelerator School: Advanced Accelerator Physics, Trondheim, Norway, Aug. 18–29, 2013 / Ed. by W. Herr. CERN-2014-009. 2014. P. 23–60.
2. Hinkson J. A. Beam Position Monitors // Handbook of Accelerator Physics and Engineering / Ed. by A. Chao, M. Tinger. Singapore: World Sci., 1999. P. 555–557.
3. Menor De Onate A., Kotzian G. Algorithms for Tune Estimation and Damper Control. Tech. Rep. CERN-ACC-NOTE-2023-0007. CERN. Geneva, 2023. 27 p.
4. Бутенко А. В., Бровко О. И., Галимов А. Р. Бустер комплекса NICA: сверхпроводящий синхротрон нового поколения // УФН. 2023. Т. 193, № 2. С. 206–225.
5. Жабицкий В. М. Цифровые методы диагностики продольных параметров сгустков в синхротронах // Письма в ЭЧАЯ. 2016. Т. 13, № 1(199). С. 199–207.
6. Жабицкий В. М. Методы компьютерной обработки экспериментальных данных об интенсивности сгустков в синхротронах // Письма в ЭЧАЯ. 2016. Т. 13, № 7(205). С. 1294–1299.
7. Жабицкий В. М. Методы контроля продольного импульсного разброса ионов в сгустке при инжекции в синхротрон // Письма в ЭЧАЯ. 2022. Т. 19, № 6(245). С. 636–642.
8. Жабицкий В. М. Методы контроля среднеквадратичной длины сгустка при инжекции в бустерный сверхпроводящий синхротрон комплекса NICA // Письма в ЭЧАЯ. 2023. Т. 20, № 4(249). С. 1047–1051.
9. Жабицкий В. М. Компьютерная томография ионных сгустков на нуклотроне // Письма в ЭЧАЯ. 2018. Т. 15, № 7(219). С. 694–702.

10. *Жабицкий В. М.* Продольная томография ионных сгустков в сверхпроводящем бустерном синхротроне ОИЯИ // Письма в ЭЧАЯ. 2023. Т. 20, № 6(251). С. 1418–1426.
11. *Горбачев Е. В., Кириченко А. Е., Монахов Д. В. и др.* Разработка инструментов для изменения бетатронной частоты в реальном времени на нуклотроне // Письма в ЭЧАЯ. 2016. Т. 13, № 5(203). С. 918–921.
12. *Шандов М. М., Горбачев Е. В., Коробицина М. Ю. и др.* Исследование характеристик магнитной структуры бустера NICA в сеансах пусконаладочных работ с пучком в 2020–2022 гг. // Письма в ЭЧАЯ. 2023. Т. 20, № 4(249). С. 969–983.
13. *Гоноровский И. С.* Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Сов. радио, 1977. 608 с.
14. *Gorbachev E. V., Lebedev N. I., Makarov A. A. et al.* LHC Transverse Feedback System: First Results of Commissioning // Proc. of the XXI Russ. Part. Accel. Conf. “RuPAC-2008”, Zvenigorod, Russia, Sept. 28 – Oct. 3, 2008. JACoW.org, 2008. P. 97–100.
15. *Reiter A., Singh R., Chorniy O.* Statistical Treatment of Beam Position Monitor Data. arXiv:1609.01332v1. GSI, 2018. 39 p.
16. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. Т. VIII. 624 с.
17. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1978. 832 с.
18. *Gorbachev E. V., Andreev V. A., Kirichenko A. E. et al.* The Nuclotron and NICA Control System Development Status // Phys. Part. Nucl. Lett. 2016. V. 13, No. 5(203). P. 905–912.

Получено 3 ноября 2023 г.