Письма в ЭЧАЯ. 2010. Т. 7, № 2(158). С. 149–174

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА. ТЕОРИЯ

# ПРОБЛЕМА КВАНТОВЫХ ЧИСЕЛ ЛЕПТОННОГО СЕКТОРА

*О. С. Космачев*[1]

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Разработан единый подход для описания волновых уравнений стабильных и нестабильных лептонов. Его алгоритм основан на четырех исходных принципах, которые являются необходимыми и достаточными условиями для нахождения уравнений. Главное преимущество и достоинство предложенного метода в том, что он позволяет описать и перечислить все возможные типы свободных уравнений для стабильных и нестабильных лептонов в рамках однородной группы Лоренца на основе единого подхода, не обращаясь к формализму Лагранжа.

A unique approach to wave equations for stable and unstable leptons has been developed. The algorithm is based on four initial principles which are necessary and sufficient conditions for obtaining the wave equations. The main advantage and virtue of the proposed method is a possibility to describe and enumerate all possible types of free equations for stable and unstable leptons in the framework of a homogeneous Lorentz group by means of a unique approach without using the Lagrange formalism.

PACS: 14.60.-z, 14.60.Hi, 14.60.Lm

## ВВЕДЕНИЕ

Проблема квантовых чисел для любых частиц имеет две составляющие. Во-первых, это задача описания свободных уравнений, решения которых при записи матричных элементов играют роль начальных и конечных обкладок. Вторая сторона проблемы связана с описанием взаимодействий тех же самых частиц с частицами, в общем случае, другого сорта. Обе стороны связаны между собой не всегда очевидным или тривиальным образом. Непротиворечивое решение проблемы в целом накладывает ограничения по согласованию этих двух сторон проявления свойств элементарных частиц. Например, заряд электрона отсутствует в свободном уравнении Дирака, однако для адекватного описания поведения электрона в магнитном поле группа $\gamma$-матриц свободного уравнения Дирака должна удовлетворять определенным требованиям.

Уравнения свободных состояний являются единственной возможностью получать теоретически квантовые числа, идентифицирующие любые лептоны в той мере, в какой это возможно для свободных уравнений. Такие квантовые числа (или их некоторую совокупность) будем называть структурными квантовыми числами того или иного лептона, не забывая при этом, что во всей полноте свойства лептонов, включая квантовые числа, проявляются в результате взаимодействия.

[1]E-mail: kos@theor.jinr.ru

Несмотря на ясную и вполне определенную роль свободных состояний, мы не имеем единого и удовлетворительного теоретического описания объектов, которые называем лептонами как стабильными, так и нестабильными, вплоть до наших дней. В частности, теория не объясняет причины и характер различий между стабильными лептонами $e^{\pm}$ и нестабильными мюонами типа $\mu^{\pm}$ ($(\mu - e)$-универсальность). Она не в состоянии ответить на вопрос о полном числе лептонов и ряд других вопросов. Такое положение служит признаком неполноты теории в вопросе, который является исходным для физики элементарных частиц. Значимость концепции квантовых чисел будет возрастать в той мере, в какой будет расти роль групповых методов в теории элементарных частиц. Подтверждением тому служит определение квантовых чисел, данное Вейлем [1]: «...квантовые числа являются индексами, характеризующими представления групп». Основанием для такого заключения послужил анализ атомных спектров.

Качественно новую роль концепция квантовых чисел сыграла в утверждении и развитии унитарной симметрии. Ее роль в адронном секторе оказалась определяющей для последующего прогресса физики элементарных частиц. Здесь квантовые числа прямо связываются со структурой частиц и, по сути дела, подменяют ее. Унитарная симметрия начинается с концепции сохраняющихся квантовых чисел, в основе которой лежит комплекс экспериментальных фактов, установленных с достаточной точностью, при полном отсутствии теоретического объяснения природы самих квантовых чисел. Более естественным представляется положение, когда состояния элементарных частиц являются основой для появления квантовых чисел. Что касается предположения о том, что элементарные частицы укладываются в рамки представлений унитарных групп, то оно, действительно, выполняется, но не единообразно, не точно, не всегда. Более того, из унитарной схемы полностью выпадает лептонный сектор. На качественном уровне это можно понимать так, что лептонный сектор невозможно описать вне рамок последовательного релятивизма, тогда как унитарная симметрия не удовлетворяет этому требованию. Подобные соображения служат дополнительными аргументами в пользу волновых уравнений для лептонов как носителей структурной информации.

По прошествии полувека со времени открытия несохранения пространственной четности нельзя не отметить, что значительный прогресс в описании лептонного сектора не обошелся без пробелов в теории. Совершенно не претендуя на полное обсуждение данного вопроса, полезно отметить лишь то немногое, что может оказаться существенным в дальнейшем при переходе к количественным оценкам и вычислениям.

Хронологически первыми, кто обратился к вычислениям с участием нейтрино, нарушающим пространственную четность, с четко обозначенной позицией, были Ли и Янг [2]. Авторы сделали выбор в пользу так называемой двухкомпонентной теории нейтрино, предложенной Паули [3]. Такой выбор даже в то время не являлся однозначно обоснованным.

В известной работе Майораны [4] с помощью искусного, но частного приема получено уравнение для нейтральной частицы. Можно показать [5], что оно описывает дублетное массивное нейтрино, вполне пригодное для построений Ли и Янга. Сам Майорана не стал анализировать полученное уравнение, а на его основе пытался получить другие уравнения для описания частиц, которые теперь именуются как истинно нейтральные. Вывод Майораны о том, что в результате таких построений «нет никакого основания предполагать наличие антинейтрона или антинейтрино», сегодня не может быть принят, а сами построения нельзя считать вполне законченными.

Следует отметить также, что работа [2] содержит ничем не оправданный прием, когда двухкомпонентное нейтрино, представляющее решение одного уравнения, встраивается в вычислительную схему с четырехкомпонентными спинорами, представляющими решения другого уравнения, путем добавки двух нулевых компонентов. Очевидно, что если нейтрино описывать двухкомпонентным спинором, то возникает трудность согласования вычислений на основе обычной четырехфермионной техники, в арсенале которой имеются только четырехкомпонентные спиноры, а двухкомпонентные не предусмотрены.

В другой известной работе, связанной с именами Фейнмана и Гелл-Манна [6], сформулирована так называемая универсальная (V–A)-теория. Основные предположения теории сводятся к следующему. Волновую функцию электрона в $\beta$-распаде в обычной четырехчастичной связи $\psi_e$ всегда нужно заменять на

$$\psi_e \longrightarrow \frac{1}{2}(1 + i\gamma_5)\psi_e \equiv a\psi_e.$$

При этом $a^2 = a$, $\overline{a} = (1 - i\gamma_5)$, $\overline{a}a = 0$.

Далее предполагается, что это же правило приложимо ко всем волновым функциям, входящим во взаимодействие $(n, p, \mu, \nu)$. Только в таком случае теория становится универсальной. Различие между частицами сводится к различию масс. Необходимость в столь сильных предположениях была продиктована для авторов тем, что электроны, образующиеся в процессе $\beta$-распада, имеют продольную поляризацию.

Следует помнить, что принять названные предположения в теории означает отказаться от возможности записать волновые уравнения типа Дирака или им подобные и тем самым исключить поиск квантовых чисел для идентификации лептонов. Дело в том, что в силу ассоциативности группа не может содержать элементы типа $(1 \pm i\gamma_5)$, так как они не имеют обратных.

Как было показано ранее [8], электроны имеют в структуре своего уравнения $P$-сопряженный компонент связности. Его наличие дает возможность приписать лептонам продольную поляризацию, после чего задача сводится к грамотной формулировке взаимодействия, т. е. адекватной записи инвариантов взаимодействия. В таком случае необходимость в проекционных операторах $(1 \pm i\gamma_5)$ для электронов отпадает. По-видимому, при дальнейшем развитии теории отпадет необходимость в проекционных операторах и для адронных составляющих реакции.

Последующее накопление экспериментальных результатов привело к открытию таона. Уже существовавшая $(\mu - e)$-универсальность расширилась до $(\mu - e - \tau)$-универсальности. Универсальность в данном контексте означает неопределенность в понимании, т. е. в теоретическом описании различий между тремя дублетами частиц $e^{\pm}, \mu^{\pm}, \tau^{\pm}$. Другим следствием того же открытия стало расширение семейства нейтрино. При этом возникает необъяснимое положение, когда различные типы нейтрино мы связываем по их происхождению от частиц, которые мы не можем различать иначе, чем по массам. Автоматически такая же участь постигает $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$. Это означает, что при таком подходе мы не имеем доступа к той части информации, которая связана с внутренними характеристиками таких лептонов, т. е. к структурным квантовым числам.

Соображения, подобные высказанным выше, свидетельствуют о том, что трудности и неувязки в теории лептонов, с учетом длительности их существования, приняли системный характер [7]. Не исключено также, что в данном случае мы столкнулись с таким положением, когда нет смысла говорить об отдельных реакциях или процессах, не охватив всего круга возможных участников хотя бы электрослабых взаимодействий. Положение осложняется еще тем, что как постановка экспериментов, так и интерпретация их результатов практически всегда являются модельно-зависимыми.

Отмеченным трудностям можно противопоставить системный подход. В данном случае это означает максимальную свободу от произвольных предположений и ограниченность минимальным количеством надежных принципов для формулировки волновых уравнений. Практической реализацией такой программы явилось построение уравнений для стабильных и нестабильных лептонов [8, 9] в рамках единого подхода. Его алгоритм основан на следующих требованиях:

1) инвариантность и ковариантность уравнений относительно однородной группы Лоренца с учетом четырех компонентов связности;

2) формулировка уравнений на основе неприводимых представлений групп, определяющих каждое лептонное уравнение;

3) сохранение четырехвектора тока вероятности и положительно определенный четвертый компонент тока;

4) величина спина лептонов предполагается равной 1/2.

Совокупность перечисленных физических требований с учетом некоторых теоретико-групповых закономерностей позволяет формулировать лептонные волновые уравнения, не обращаясь к формализму Лагранжа.

В упомянутом цикле работ [8, 9] установлены необходимые и достаточные условия формулировки волновых уравнений для лептонов в рамках однородной группы Лоренца. Они представляют собой точные результаты, вытекающие из достаточно общих фундаментальных принципов. Предлагаемый подход, следуя Вигнеру [10], можно назвать кинематическим. Вместе с тем существенным дополнением является учет структуры изучаемых объектов. Поэтому метод следует охарактеризовать в то же время как структурный.

Выяснилось, что необходимые и достаточные условия формулировки волновых уравнений могут быть извлечены из структуры уравнения Дирака с привлечением некоторых теоретико-групповых теорем и алгебры Ли группы Лоренца.

Новизна метода определяется несколькими факторами. Во-первых, на основе теоремы о трех типах неприводимых матричных групп [11] был найден и использован новый тип инвариантов волновых уравнений, представляющий собой числовую характеристику. Для каждого конкретного уравнения она принимает одно из трех значений $(\pm 1, 0)$. Далее эта величина будет называться структурным инвариантом. Для уравнения Дирака он оказался равным $\mathrm{In}[D_\gamma(\mathrm{II})] = -1$.

Другой фактор связан с тем, что выяснилась роль различных компонентов связности группы Лоренца в формировании уравнения Дирака и других лептонных уравнений. Четыре компонента связности переходят друг в друга при дискретных преобразованиях: пространственных отражениях $(P)$, обращении времени $(T)$ и получении их произведения $(PT)$. Получены в явном виде группы $(d_\gamma, f_\gamma, b_\gamma, c_\gamma)$, на которых реализуются все четыре компонента связности. Они имеют первое весовое число, равное $l_0 = 1/2$. Это одно из двух чисел, однозначно определяющих каждое неприводимое представление группы Лоренца [13]. Коммутационные соотношения для $(P)$-, $(T)$- и $(PT)$-сопряженных представлений (по отношению с собственному представлению группы Лоренца), т. е. для групп $b_\gamma, c_\gamma, f_\gamma$, в физической литературе были представлены впервые. Что касается неприводимых представлений собственной ортохронной группы Лоренца, то они давно описаны в физической и математической литературе [12–14].

И наконец, сравнение коммутационных соотношений одной из подгрупп ($d_\gamma$) группы $\gamma$-матриц Дирака и коммутаторов инфинитезимальных матриц неприводимых представлений (НП) собственной группы Лоренца [13] позволило установить между ними однозначное соответствие. Таким образом была получена возможность физической интерпретации операторов (матриц) уравнения Дирака сначала для НП собственной группы Лоренца, а затем для трех других компонентов связности. Именно они явились составляющими лептонных уравнений.

## 1. СТРУКТУРНЫЙ ПОДХОД К ОПИСАНИЮ СТАБИЛЬНЫХ ЛЕПТОНОВ

Вся полнота информации, которая содержится в свободном уравнении Дирака, определяется тем, что $\gamma$-матрицы образуют конечную группу [11] (далее группа Дирака — $D_\gamma(\mathrm{II})$) и структурой этой группы. Известное обстоятельство, которое в полной мере не изучалось и не использовалось. Изложенный далее анализ восполняет имеющийся пробел по данному вопросу.

**1.1. Структура группы Дирака.** Примем определение $\gamma$-матриц, предложенное в работе [15], которое приводит к уравнению Дирака в виде

$$[i(\gamma_\mu p_\mu) + m]\psi = 0, \tag{1}$$

где

$$\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}, \qquad \mu,\nu = 1,2,3,4, \qquad \gamma_\mu^2 = 1.$$

Здесь и далее используется система единиц $c = \hbar = 1$.

Обозначим

$$a_1 \sim \gamma_3\gamma_2, \qquad a_2 \sim \gamma_1\gamma_3, \qquad a_3 \equiv a_1 a_2 \sim \gamma_2\gamma_1. \tag{2}$$

Символ $\sim$ означает соответствие отношений между элементами искомой подгруппы, содержащей $a_1, a_2$, и $\gamma$-матрицами. Тогда получаем равенства $a_1^2 = a_2^2 = a_3^2 = -1$, $a_2 a_1 a_2^{-1} = a_1^{-1}$, откуда следует, что элементы $a_1, a_2$ генерируют группу кватернионов. Обозначим ее как $Q_2[a_1, a_2]$.

Далее обозначим $c \sim \gamma_1\gamma_2\gamma_3$. Видно, что $c$ коммутирует со всеми элементами подгруппы $Q_2[a_1, a_2]$ и $c^2 = a_1^2$. Прямым вычислением можно убедиться, что расширение $Q_2[a_1, a_2]$ с помощью $c$ приводит к группе 16-го порядка. Таким образом, группа $\gamma$-матриц Дирака содержит подгруппу, которая далее будет обозначаться как $d_\gamma$.

Следуя развитой ранее методике [8], можно построить неприводимые представления группы $d_\gamma$, и тогда коммутаторы образующих элементов алгебры принимают вид

$$\begin{array}{lll}
[a_1, a_2] = 2a_3, & [a_2, a_3] = 2a_1, & [a_3, a_1] = 2a_2, \\
[b_1, b_2] = -2a_3, & [b_2, b_3] = -2a_1, & [b_3, b_1] = -2a_2, \\
[a_1, b_1] = 0, & [a_2, b_2] = 0, & [a_3, b_3] = 0, \\
[a_1, b_2] = 2b_3 & [a_1, b_3] = -2b_2, & \\
[a_2, b_3] = 2b_1, & [a_2, b_1] = -2b_3, & \\
[a_3, b_1] = 2b_2, & [a_3, b_2] = -2b_1. &
\end{array} \tag{3}$$

Здесь введены обозначения

$$b_1 = a_1 c, \quad b_2 = a_2 c, \quad b_3 = a_3 c. \tag{4}$$

Если отвлечься от общего для всех соотношений нормировочного множителя 2, то увидим, что полученные коммутационные соотношения (КС) полностью совпадают с коммутаторами инфинитезимальных матриц собственного ортохронного преобразования Лоренца [13]. С шестью операторами $(a_1, a_2, a_3)$ и $(b_1, b_2, b_3)$ связаны шесть действительных параметров группы Лоренца. Оператор $c$ в данной группе переводит инфинитезимальные операторы трехмерных вращений $(a_1, a_2, a_3)$ в операторы инфинитезимальных преобразований Лоренца вдоль соответствующих осей координат $(b_1, b_2, b_3)$. Как следует из определения, оператор $c$ является элементом центра группы $d_\gamma$, поэтому в данном представлении он равен единичному оператору, умноженному на мнимую единицу $i$. Далее собственные ортохронные представления с коммутационными соотношениями типа (3) будут называться стандартными представлениями группы Лоренца.

Последующее расширение $d_\gamma$ с помощью дополнительного генератора $b_4$ приводит к группе $\gamma$-матриц Дирака. При этом сумму всех элементов группы Дирака (или ее циклическую структуру [8]) можно записать в компактном, мультипликативном виде

$$D_\gamma(\mathrm{II}) = d_\gamma[a_1, a_2, c][e + b_4], \tag{5}$$

где $b_4$ является групповым эквивалентом $\gamma_4$ и $b_4^2 = e$; $e$ — единичный элемент и $d_\gamma[a_1, a_2, c] = Q_2[a_1, a_2][e + c]$ является циклической структурой группы $d_\gamma$, т. е. суммой всех элементов, записанной в мультипликативной форме.

**1.2. $T$-сопряженное представление.** Выражение (5) допускает иную запись циклической структуры благодаря другому выбору генераторов группы $\gamma$-матриц. Вместо генераторов $\{a_1, a_2, c, b_4\}$ можно выбрать $\{a_1, a_2, c', b_4'\}$. Здесь $c' \sim -\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$ и $b_4' \sim \gamma_1\gamma_2\gamma_4$.

В результате циклическая структура той же самой группы принимает вид

$$D_\gamma[a_1, a_2, c', b_4'] = Q_2[a_1, a_2][e + c'][e + b_4']. \tag{6}$$

Так же как и в случае (5), данное выражение представляет собой сумму всех элементов группы, но записанную в виде других сомножителей. Прямой проверкой можно убедиться, что выражение

$$b_\gamma[a_1, a_2, c'] = Q_2[a_1, a_2][e + c'] \tag{7}$$

представляет собой циклическую структуру подгруппы 16-го порядка. Из выражений для генераторов $a_1, a_2, c'$ следуют такие определяющие соотношения для подгруппы $b_\gamma$:

$$\begin{aligned} &a_2 a_1 a_2^{-1} = a_1^{-1}, \quad && a_1 a_2 a_1^{-1} = a_2^{-1}, \\ &c' a_1 c'^{-1} = a_1, && c' a_2 c'^{-1} = a_2. \end{aligned} \tag{8}$$

Сравнение показывает, что $d_\gamma$ и $b_\gamma$ близки по своим свойствам. Действительно, каждая группа имеет порядок 16, центры содержат по четыре элемента, и совпадает число сопряженных классов — 10. Как $d_\gamma$, так и $b_\gamma$ содержат подгруппу кватернионов. Но имеются и различия. Так, генератор $c$ имеет порядок 4, тогда как $c'$ — второго порядка. В результате группа $b_\gamma$ не изоморфна группе $d_\gamma$.

Обозначим

$$b_1' \equiv c' a_1 \sim -\gamma_1\gamma_4, \qquad b_2' \equiv c' a_2 \sim -\gamma_2\gamma_4, \qquad b_3' \equiv c' a_3 \sim -\gamma_3\gamma_4, \tag{9}$$

Если на элементах группы $b_\gamma[a_1, a_2, c'] = Q_2[a_1, a_2][e+c']$ определить алгебру аналогично случаю $d_\gamma$, то получим коммутационные соотношения, весьма похожие на (3):

$$\begin{array}{lll} [a_1, a_2] = 2a_3, & [a_2, a_3] = 2a_1, & [a_3, a_1] = 2a_2, \\ [b_1', b_2'] = 2a_3, & [b_2', b_3'] = 2a_1, & [b_3', b_1'] = 2a_2, \\ [a_1, b_1'] = 0, & [a_2, b_2'] = 0, & [a_3, b_3'] = 0, \\ [a_1, b_2'] = 2b_3' & [a_1, b_3'] = -2b_2', & \\ [a_2, b_3'] = 2b_1', & [a_2, b_1'] = -2b_3', & \\ [a_3, b_1'] = 2b_2', & [a_3, b_2'] = -2b_1'. & \end{array} \tag{10}$$

Очевидно, что (3) переходит в (10) при замене

$$b_k \to b_k' = ib_k \quad (k = 1, 2, 3). \tag{11}$$

При этом происходит переход одной группы в другую: $d_\gamma \to b_\gamma$. Различие КС (3) и (10) заключается в противоположных знаках трех коммутаторов, расположенных во второй верхней строке. Никаким неособенным преобразованием это расхождение не устраняется, так как группы $d_\gamma$ и $b_\gamma$ неизоморфны. Время как параметр преобразований Лоренца проявляется начиная с этой строки. Все остальные коммутаторы, расположенные ниже, являются следствием первых шести операторов, расположенных в двух верхних строчках. Поэтому данный тип неприводимых представлений был назван $T$-сопряженным по отношению к стандартному, который реализуется на группе $d_\gamma$. Другими словами, на группе $b_\gamma$ реализуется $T$-сопряженный компонент связности группы Лоренца. Очевидно, что $T$-сопряжение не затрагивает операторы $a_1, a_2, a_3$, поэтому оно не меняет величину $l_0 = 1/2$ и не меняет тип спина, т. е. все три пространственных оси остаются одинаково возможными для выбора оси квантования. Это обстоятельство является одним из важных факторов для формирования объективных критериев для формулировки отношений частица–античастица.

Для последующего отметим, что в группе $D_\gamma(\mathrm{II})$ содержится два типа подгрупп $d_\gamma$ и $b_\gamma$ и не содержится других подгрупп 16-го порядка, не изоморфных им.

**1.3. $P$-сопряженное представление и двойственность $d_\gamma$.** Детальное изучение структуры подгруппы $d_\gamma$ показало, что она обладает двойственностью. Выражается это в том, что помимо подгруппы $Q_2$ в $d_\gamma$ содержится еще одна подгруппа восьмого порядка $q_2$ с циклической структурой вида

$$q_2[a_1, a_2', a_3'] = C_4[a_1][e + a_2'], \tag{12}$$

где $a_1 \sim \gamma_3\gamma_2, \quad a_2' \sim \gamma_2, \quad a_3 \equiv a_1 a_2' \sim \gamma_3$ и $C_4[a_1]$ означает сумму элементов циклической группы четвертого порядка с генератором $a_1$. Определяющие соотношения между элементами $q_2$ те же, что и в $Q_2$. Разница заключается в том, что в $Q_2$ все три элемента $a_1, a_2, a_3$ имеют порядок 4, тогда как в $q_2$ только элемент $a_1$ имеет порядок 4, два других — порядок 2. Элементы алгебры, построенной на $q_2$, удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$[a_1, a_2'] = 2a_3', \qquad [a_2', a_3'] = -2a_1, \qquad [a_3', a_1] = 2a_2'. \tag{13}$$

Они практически совпадают с таковыми для группы трехмерных вращений (см. первую строку (10) или (3)). Отличие лишь в знаке второго коммутатора.

Переход от первой строчки коммутационных соотношений (10) к (13) равносилен замене $a_2 \to ia'_2$, и, по определению, ($a_3 \equiv a_1 a_2$) получаем $a_3 \to ia'_3$. При этом подгруппа кватернионов $Q_2[a_1, a_2]$ переходит в подгруппу $q_2[a_1, a'_2]$ с теми же самыми определяющими отношениями между генераторами. Как следствие различных порядков элементов $a'_2, a'_3$ и $a_1$, мы получаем здесь и далее в подобных случаях неэквивалентность пространственных направлений, или, как принято говорить, асимметрию между левым и правым.

Последующее расширение группы $q_2[a_1, a'_2]$ с помощью того же генератора $c$, который фигурирует в равенстве (5), ведет к группе 16-го порядка

$$f_\gamma = C_4[a_1][e + a'_2][e + c]. \tag{14}$$

В силу построения подгруппа $f_\gamma$ изоморфна $d_\gamma$. Различие циклических структур отражает неодинаковый выбор трех генераторов в первом и втором случаях. При этом $c \sim \gamma_1\gamma_2\gamma_3$ по-прежнему является элементом центра подгруппы.

Коммутационные соотношения на основе подгруппы $f_\gamma$ строятся в полной аналогии с двумя предыдущими случаями:

$$\begin{array}{lll}
[a_1, a'_2] = 2a'_3, & [a'_2, a'_3] = -2a_1, & [a'_3, a_1] = 2a'_2, \\
[b'_1, b'_2] = -2a'_3, & [b'_2, b'_3] = 2a_1, & [b'_3, b'_1] = -2a'_2, \\
[a_1, b'_1] = 0, & [a'_2, b'_2] = 0, & [a'_3, b'_3] = 0, \\
[a_1, b'_2] = 2b'_3, & [a_1, b'_3] = -2b'_2, & \\
[a'_2, b'_3] = -2b'_1, & [a'_2, b'_1] = -2b'_3, & \\
[a'_3, b'_1] = 2b'_2, & [a'_3, b'_2] = 2b'_1. &
\end{array} \tag{15}$$

Данный вид представления был назван $P$-сопряженным по отношению к $d_\gamma$, так как различие возникает уже в первой строке коммутационных соотношений (15), т. е. на уровне подгруппы трехмерных вращений. Все последующие (ниже первой строчки) отклонения от стандарта (3) являются следствиями первичного изменения знака коммутатора в подгруппе трехмерных вращений.

На основе соотношений (15) было установлено [5], что группа $f_\gamma$, вследствие асимметрии между левым и правым в подгруппе $q_2$, обладая тем же самым весовым числом $l_0 = 1/2$, отличается от $d_\gamma$. Данное число в случае группы $f_\gamma$ принимает действительное значение только для одного из трех пространственных направлений. Это приводит к тому, что для некоторых волновых уравнений спин частицы может быть ориентирован только в направлении импульса или против него.

Как уже отмечалось, группа $\gamma$-матриц Дирака содержит только два типа подгрупп 16-го порядка, не изоморфных друг другу, $d_\gamma$ и $b_\gamma$. Поэтому для уравнения Дирака соотношения (3), (10) и (15) исчерпывают, учитывая двойственность $d_\gamma$, все возможные типы равенств, которые называются коммутационными соотношениями (КС) для инфинитезимальных операторов группы Лоренца. Других КС не имеется.

Введем обозначения для операций перехода между найденными подгруппами и соответствующими КС. В некоторой фиксированной матричной реализации неприводимого представления переход $d_\gamma \to b_\gamma$ будем обозначать как

$$b_\gamma = \langle T\rangle d_\gamma, \tag{16}$$

что эквивалентно замене

$$b_k \to b'_k = ib_k \quad (k = 1, 2, 3). \tag{17}$$

Следствием перехода от подгруппы $d_\gamma$ к $b_\gamma$ является переход от КС (3) к (10). Операцию, обратную к названной, обозначим $\langle T^{-1}\rangle$. Тогда переход $d_\gamma = \langle T^{-1}\rangle b_\gamma$, очевидно, связан с заменой

$$b'_k \to b_k = ib'_k \quad (k = 1, 2, 3). \tag{18}$$

Аналогично для перехода $d_\gamma \to f_\gamma$ и обратно введем такие обозначения:

$$f_\gamma = \langle P\rangle d_\gamma, \qquad d_\gamma = \langle P^{-1}\rangle f_\gamma; \tag{19}$$

здесь $\langle P\rangle$ означает замену генераторов по правилу

$$a_2 \to a'_2 = ia_2. \tag{20}$$

Как следствие получаем

$$a_3 \to a'_3 = ia_3, \quad b_1 \to b'_1 = b_1, \quad b_2 \to b'_2 = ib_2, \quad b_3 \to b'_3 = ib_3$$

и переход от КС (3) к (10). Процедура обратного перехода $\langle P^{-1}\rangle$ соответствует преобразованию $a'_2 \to a_2 = ia'_2$.

Естественно, что подгруппы $f_\gamma$ и $b_\gamma$ тоже могут быть связаны между собой с помощью операций $\langle T\rangle$ и $\langle P\rangle$. Действительно, $d_\gamma = \langle P^{-1}\rangle f_\gamma$. Обозначив последовательное действие операций $\langle T\rangle\langle P^{-1}\rangle \equiv \langle TP^{-1}\rangle$, получаем, учитывая (16),

$$\langle TP^{-1}\rangle f_\gamma = b_\gamma. \tag{21}$$

Нетрудно заметить, что сами по себе обе операции коммутируют:

$$\langle TP^{-1}\rangle = \langle P^{-1}T\rangle. \tag{22}$$

Но при этом выясняется, что уравнение Дирака не замкнуто относительно действия всевозможных комбинаций $\langle T\rangle$ и $\langle P\rangle$. Это означает, что действие этих операций на подгруппы $d_\gamma, f_\gamma, b_\gamma$ приводит к появлению подгруппы, не содержащейся в группе $\gamma$-матриц Дирака. Достаточно просто и наглядно в этом можно убедиться на примере КС (3). Обозначим последовательное действие двух операций $\langle T\rangle$ и $\langle P\rangle$ на $d_\gamma$ так:

$$\langle TP\rangle d_\gamma = c_\gamma. \tag{23}$$

Действие этих же операций на коммутационные соотношения (3) приводит к КС, отличным от трех предыдущих (3), (10), (15):

$$\begin{array}{lll}
[a_1, a'_2] = 2a'_3, & [a'_2, a'_3] = -2a_1, & [a'_3, a_1] = 2a'_2,\\
[b''_1, b''_2] = 2a'_3, & [b''_2, b''_3] = -2a_1, & [b''_3, b''_1] = 2a'_2,\\
[a_1, b''_1] = 0, & [a'_2, b''_2] = 0, & [a'_3, b''_3] = 0,\\
[a_1, b''_2] = 2b''_3, & [a_1, b''_3] = -2b''_2, & \\
[a'_2, b''_3] = -2b''_1, & [a'_2, b''_1] = -2b''_3, & \\
[a'_3, b''_1] = 2b''_2, & [a'_3, b''_2] = 2b''_1. &
\end{array} \tag{24}$$

Никаким неособенным преобразованием получить КС (24) из предыдущих невозможно, так как они связаны с группой $c_\gamma$, не изоморфной подгруппам $d_\gamma$ и $b_\gamma$ [5]. Так же как в случае подгруппы $f_\gamma$, отличие от стандартных КС (3) возникает уже в первой строке. Это означает, что $c_\gamma$ содержит подгруппу $q_2[a_1, a_2']$. Ее циклическая структура отличается от циклической структуры $f_\gamma$ тем, что третий генератор $c''$, также будучи центром группы, имеет порядок два:

$$c_\gamma = C_4[a_1][e + a_2'][e + c''], \tag{25}$$

где $c''^2 = e$.

Группа $c_\gamma$, так же как $d_\gamma$ и $b_\gamma$, имеет центр, состоящий из четырех элементов, и десять сопряженных классов. Это означает, что имеется восемь одномерных и два неэквивалентных неприводимых представления (НП). В этом отношении все три группы схожи. Все сказанное о первом весовом числе $l_0 = 1/2$ для $f_\gamma$ верно и для $c_\gamma$, так как оно определяется подгруппой $q_2[a_1, a_2']$.

Исходя из соотношений (16), (19) и (23), можно записать следующий ряд равенств:

$$\langle T\rangle d_\gamma = b_\gamma, \quad \langle P\rangle d_\gamma = f_\gamma, \quad \langle PT\rangle d_\gamma = c_\gamma, \tag{26}$$

$$\langle T^{-1}\rangle b_\gamma = d_\gamma, \quad \langle P\rangle b_\gamma = c_\gamma, \quad \langle T^{-1}P\rangle b_\gamma = f_\gamma, \tag{27}$$

$$\langle T^{-1}\rangle c_\gamma = f_\gamma, \quad \langle P^{-1}\rangle c_\gamma = b_\gamma, \quad \langle T^{-1}P^{-1}\rangle c_\gamma = d_\gamma, \tag{28}$$

$$\langle T\rangle f_\gamma = c_\gamma, \quad \langle P^{-1}\rangle f_\gamma = d_\gamma, \quad \langle P^{-1}T\rangle f_\gamma = b_\gamma. \tag{29}$$

Равенства со всей очевидностью показывают, что четыре группы $d_\gamma$, $f_\gamma$, $b_\gamma$, $c_\gamma$ образуют полный набор, который замкнут относительно произвольного сочетания дискретных преобразований. Четыре группы связаны с четырьмя классами преобразований группы Лоренца. Принято различать эти классы по величине детерминанта ($\pm 1$) и изменению знака ($\pm$) временного компонента четырехвектора при преобразованиях. Как видно из коммутационных соотношений (3), (10), (15) и (24), на каждой из подгрупп реализуется по одному неприводимому представлению группы Лоренца из четырех возможных классов. Указанные переходы между различными компонентами связности известны в литературе так же, как аналитические продолжения по параметрам групп [16].

Как видно из определений (17) и (20), все операции сопряжения являются преобразованиями четвертого порядка, т. е. квадрат каждого из них не является тождественным преобразованием. Это означает, например, что $\langle T\rangle\langle T\rangle \equiv \langle T^2\rangle \neq I$ и только $\langle T^4\rangle = I$. Положение здесь полностью повторяет характер изменения спиноров при трехмерных поворотах на $2\pi$ и $4\pi$.

**1.4. Структурные инварианты.** Дополнительным инструментом анализа объектов типа группы $\gamma$-матриц Дирака и понимания новых возможностей в рамках единых общих требований является теорема о трех типах матричных групп [11]. Теорема утверждает: если $D_\gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ является неприводимой матричной группой, то

$$\mathrm{In}[D_\gamma] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Sp}(\gamma_i^2) = \begin{cases} \ \ 1, \\ -1, \\ \ \ 0. \end{cases} \tag{30}$$

Здесь $n$ — порядок группы; $\mathrm{Sp}(\gamma_i^2)$ — след квадрата $i$-й матрицы из данной матричной группы. Далее число $\mathrm{In}[D_\gamma]$ будет называться структурным инвариантом (СИ) группы $D_\gamma$.

Согласно теореме, если группа относится к первому типу ($\mathrm{In} = 1$), то она эквивалентна группе реальных матриц. В таком случае она эквивалентна также группе ортогональных матриц. Если группа относится ко второму типу ($\mathrm{In} = -1$), то она эквивалентна своей комплексно-сопряженной группе (так, что существует $S$ такая, что $\gamma_i^* = S^{-1}\gamma_i S$), но не реальной группе. Здесь $*$ — символ комплексного сопряжения. Третий тип ($\mathrm{In} = 0$) характеризуется тем, что группа не эквивалентна комплексно-сопряженной, то есть не существует $S$ такой, что $\gamma_i^* = S^{-1}\gamma_i S$.

Для группы $\gamma$-матриц Дирака структурный инвариант $(30)$ получается равным $\mathrm{In} = -1$, что является однозначным следствием определения

$$\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}, \qquad \mu, \nu = 1, 2, 3, 4. \qquad \gamma_\mu^2 = 1. \tag{31}$$

Величина инварианта не зависит от конкретного выбора представления для $\gamma$-матриц и определяется только соотношением между числом элементов четвертого и второго порядков в группе Дирака $D_\gamma(\mathrm{II})$, т. е. является некоторой структурной характеристикой [17]. Для последующих вычислений важно подчеркнуть, что в зависимости от величины структурного инварианта меняются свойства группы $D_\gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ в целом. Так, например, для группы Дирака, когда $\mathrm{In} = -1$, требование эквивалентности $\gamma_i^* = S^{-1}\gamma_i S$ оборачивается автоморфизмом $D_\gamma(\mathrm{II}) = D_\gamma(\mathrm{II})^*$. Именно поэтому уравнение Дирака одинаково успешно описывает движение в электромагнитном поле как электрона с зарядом $-e$, так и позитрона с зарядом $e$. Такое положение невозможно в случае, если $\mathrm{In} = 1$, так как при этом все $\gamma$-матрицы становятся действительными.

Другое, не менее важное, обстоятельство — то, что представление группы Дирака в целом является неприводимым, а максимальные инвариантные подгруппы $d_\gamma, f_\gamma, b_\gamma$ связаны с различными неприводимыми представлениями общей группы Лоренца. Этим самым очерчиваются рамки для построения уравнений типа Дирака.

Если по отношению к упомянутым подгруппам $d_\gamma, f_\gamma, b_\gamma, c_\gamma$ воспользоваться теоремой (30), то получим такие числа:

$$\mathrm{In}[d_\gamma] = \mathrm{In}[f_\gamma] = 0, \qquad \mathrm{In}[b_\gamma] = -1, \qquad \mathrm{In}[c_\gamma] = 1. \tag{32}$$

Поскольку подгруппы $d_\gamma, f_\gamma$ изоморфны, их структурные инварианты совпадают. Неизоморфные подгруппы имеют различные структурные инварианты. Их число свидетельствует в пользу того, что найденные четыре группы исчерпывают весь набор, на котором реализуются неприводимые представления всех четырех классов преобразований общей группы Лоренца с первым весовым числом $l_0 = 1/2$.

**1.5. Волновое уравнение для дублета нейтрино.** Группа Дирака содержит 20 элементов четвертого порядка и 12 элементов второго. Это однозначный результат определения (31) и, как следствие, $\mathrm{In}[D_\gamma(\mathrm{II})] = -1$. Если, к примеру, положить $\gamma_s^2 = 1\,(s = 1, 2, 3)$ и $\gamma_4^2 = -1$, то в такой группе получается 12 элементов четвертого порядка и 20 элементов второго. Получается соотношение между элементами четвертого и второго порядка, обратное по отношению к $D_\gamma(\mathrm{II})$. Вычисление в данном случае дает $\mathrm{In}[D_\gamma(\mathrm{I})] = 1$.

Всего имеется пять различных возможностей выбора $\gamma_\mu^2 = \pm 1\,(\mu = 1, 2,\ 3, 4)$. Все они приводят к группам 32-го порядка и только к двум несовпадающим значениям структурного инварианта $(-1)$ в первом случае и $(+1)$ — во втором:

$$\begin{aligned}
&1)\ \gamma_\mu^2 = 1 \qquad (\mu = 1,2,3,4),\\
&2)\ \gamma_\mu^2 = -1 \quad (\mu = 1,2,3,4),\\
&3)\ \gamma_s^2 = -1 \quad (s = 1,2,3), \qquad \gamma_4^2 = 1.
\end{aligned} \tag{33}$$

Ко второму случаю относятся варианты

$$\begin{aligned}
&4)\ \gamma_s^2 = 1 \quad (s = 1,2,3), \quad \gamma_4^2 = -1,\\
&5)\ \gamma_s^2 = 1 \quad (s = 1,2), \quad \gamma_{3,4}^2 = -1.
\end{aligned} \tag{34}$$

Первые три варианта дают группы, изоморфные группе Дирака с $\mathrm{In}[D_\gamma(\mathrm{II})] = -1$. Варианты 4 и 5 также приводят к изоморфным между собой группам, но к другому структурному инварианту $\mathrm{In}[D_\gamma(\mathrm{I})] = 1$. Различие между изоморфными группами сводится к различным вариантам выбора четырех генераторов, но каждый раз в рамках соотношений (33) или (34).

Для полноты анализа уравнения Дирака имеет смысл остановиться на трех равенствах (33). Уравнение Дирака описывает дублет и имеет в своей структуре необходимые элементы, ответственные за оба компонента. Однако в каждом случае в явном виде в уравнении содержится только один из них. Второй присутствует, но не явно, он скрыт в определяющих соотношениях. В случае уравнения Дирака (1) и стандартной записи определяющих соотношений для $\gamma$-матриц (31) мы имеем явную запись уравнения на основе подгруппы $d_\gamma$. Это означает, что первые три матрицы $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ являются генераторами, порождающими подгруппу $d_\gamma$. Чтобы записать уравнение, когда в явном виде представлена подгруппа $b_\gamma$, необходимо в рамках этой же группы перейти к другому набору генераторов. Первые три из них находятся из соотношений (9) и равенств, связывающих $a_1, a_2, a_3$ и $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ (2). Далее вычисляется $\gamma_4$ исходя из соответствующей циклической структуры (7) для $D_\gamma(\mathrm{II})$. В результате будем иметь

$$[(\gamma'_\mu p'_\mu) + m]\Psi' = 0, \quad \gamma'_\mu\gamma'_\nu + \gamma'_\nu\gamma'_\mu = -2\delta_{\mu\nu}, \quad \mu', \nu' = 1,2,3,4, \tag{35}$$

где коэффициенты типа $\pm i$ при $(\gamma'_\mu p'_\mu)$ выбираются из требования редукции данной линейной формы к уравнению Клейна–Гордона. Уравнение (35) является реализацией пункта 2 из (33).

Сравнительный анализ двух типов неизоморфных групп, определяемых с помощью равенств (33), (34), показывает, что обе имеют порядок 32, и каждая имеет 17 сопряженных классов. Это означает, что обе имеют 16 одномерных НП и одно четырехмерное. Однако есть различия, весьма существенные с точки зрения физической интерпретации.

Сопоставление групп $d_\gamma, f_\gamma, b_\gamma, c_\gamma$ показывает, что генераторы инфинитезимальных преобразований Лоренца антикоммутируют для всех четырех компонентов связности. В общем случае все они представимы в виде

$$b_1 \equiv ca_1 \sim \gamma_1, \qquad b_2 \equiv ca_2 \sim \gamma_2, \qquad b_3 \equiv ca_3 \sim \gamma_3,$$

где $c$ — элемент центра соответствующей подгруппы $d_\gamma, f_\gamma, b_\gamma, c_\gamma$. Каждая из четырех подгрупп порождается тремя генераторами и является расширением либо подгруппы $Q_2$, либо подгруппы $q_2$. В свою очередь, каждая из этих двух подгрупп порождается двумя генераторами, которые антикоммутируют. Последующее расширение до группы Лоренца в любом из четырех случаев можно осуществить с помощью элемента, относящегося к центру группы. Тогда произведение первых двух генераторов и элемента центра тоже антикоммутирует с двумя первыми генераторами и может играть роль третьего генератора.

Различие между $b_k\,(k = 1, 2, 3)$ для разных компонентов связности сводится к различным порядкам этих операторов. В случае $d_\gamma$ все три $b_k$ имеют порядок 2, в случае $b_\gamma$ все три — порядок 4. В случае подгруппы $f_\gamma$ положение усложняется. Здесь два оператора четвертого порядка и один второго. В подгруппе $c_\gamma$, наоборот, имеется один оператор четвертого порядка и два второго. Отсюда следует вывод. В рамках одних и тех же антикоммутационных соотношений, варьируя только порядок трех генераторов группы (порядок элемента группы есть минимальная степень его, при которой этот элемент обращается в единицу), мы получаем все четыре компонента связности группы Лоренца. Поэтому для того, чтобы в волновом уравнении типа Дирака выполнить требование лоренц-инвариантности, необходимо для начала наличие трех антикоммутирующих генераторов.

Вместе с тем мы видим, что группа Дирака порождается четырьмя генераторами. Исходным требованием в данном случае является квантово-механическое условие существования положительно определенной плотности вероятности, четырехвектора тока вероятности и уравнения непрерывности для тока вероятности, в котором присутствуют четыре оператора: $\partial/\partial t$, $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z$. С другой стороны, эти же четыре оператора присутствуют в линейном по этим операторам уравнении Дирака. И только из совместного выполнения как уравнения непрерывности, так и релятивистского волнового уравнения вытекают все свойства группы $\gamma$-матриц. Поэтому для записи релятивистского волнового уравнения в ковариантной форме необходимо как минимум четыре генератора, порождающих соответствующую группу $\gamma$-матриц.

Совокупность высказанных выше соображений показывает, что существует еще одна группа $(D_\gamma(\mathrm{I}))$, которая позволяет сформулировать волновое уравнение типа Дирака. Согласно (34) группу можно определить, например, такими соотношениями:

$$\begin{aligned} &\gamma_s\gamma_t + \gamma_t\gamma_s = 2\delta_{st}, \quad \gamma_{s,t}^2 = 1 \qquad (s,t = 1,2,3), \\ &\gamma_s\gamma_4 + \gamma_4\gamma_s = 0 \qquad (s = 1,2,3), \\ &\gamma_4^2 = -1. \end{aligned} \tag{36}$$

Так как для $\mu, \nu = 1, 2, 3$ соотношения (1), (2) не изменились, то все построения и выводы, касающиеся подгрупп $Q_2$ и $d_\gamma$, остаются в силе, т. е. циклические структуры и соотношения между составляющими их элементами остаются без изменений.

Циклическая структура группы в целом может быть представлена в виде

$$D_\gamma(\mathrm{I}) = d_\gamma[a_1, a_2, c][e + b_4'] = Q_2[a_1, a_2][e + c][e + b_4'], \tag{37}$$

где $b_4' \sim \gamma_4$. При матричной реализации НП это ведет к ${b_4'}^2 = -I$, ибо здесь $\gamma_4$ удовлетворяет (36). Как и ранее, здесь приняты обозначения:

$$a_1 \sim \gamma_3\gamma_2, \quad a_2 \sim \gamma_1\gamma_3, \quad a_3 \equiv a_1a_2 \sim \gamma_2\gamma_1, \quad c \sim \gamma_1\gamma_2\gamma_3.$$

Из построения $D_\gamma(\mathrm{I})$ видно, что она содержит подгруппу $d_\gamma$. Ранее было установлено, что каждая $d_\gamma$ содержит подгруппу $q_2$:

$$q_2[a_1, a_2', a_3'] = C_4[a_1][e + a_2'],$$

где $a_1 \sim \gamma_3\gamma_2$, $a_2' \sim \gamma_2$, $a_3' = a_1 a_2' \sim \gamma_3$.

Последующее расширение группы $q_2[a_1, a_2', a_3']$ с помощью генератора $c'' = a_1 b_4'$ доставляет группу 16-го порядка $c_\gamma$:

$$c_\gamma = C_4[a_1][e + a_2'][e + c''].$$

Подобно тому, как $D_\gamma(\mathrm{II})$ содержит только подгруппы $d_\gamma$ и $b_\gamma$, группа $D_\gamma(\mathrm{I})$ содержит только подгруппы $d_\gamma$ и $c_\gamma$. Естественно, при этом необходимо помнить о подгруппе $f_\gamma$, изоморфной $d_\gamma$. Структурный инвариант в таком случае получается $\mathrm{In}[D_\gamma(\mathrm{I})] = 1$.

Согласно утверждению теоремы (30), если $\mathrm{In} = 1$, то группа эквивалентна группе действительных матриц. С помощью развитой ранее методики они были получены в явном виде [8]:

$$\gamma_1^{'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \gamma_2^{'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma_3^{'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma_4^{'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В результате выполненных построений получены выражения для четырех антикоммутирующих генераторов. Группа в целом содержит только три подгруппы $d_\gamma, f_\gamma, c_\gamma$, на которых реализуются неприводимые представления группы Лоренца. При этом представление группы $D_\gamma(\mathrm{I})$ в силу теоремы (30) само является неприводимым, гарантируя тем самым лоренц-инвариантность. Как уже отмечалось, для выполнения лоренц-инвариантности достаточно трех антикоммутирующих генераторов. Оставшийся четвертый генератор совместно с тремя первыми определяет в итоге тип уравнения, состав группы в целом, т. е. количество максимальных инвариантных подгрупп и их принадлежность к различным НП группы Лоренца. Фактически это означает, что четвертый генератор регулирует характер отношений между подсистемами, которые (в том числе) приводят к описанию как частицы, так и античастицы.

Запись волнового уравнения для группы $D_\gamma(\mathrm{I})$ выполняется по тому же рецепту, что и уравнение Дирака с предварительным выбором для явного представления одной из трех подструктур $d_\gamma, f_\gamma, c_\gamma$. Для большей ясности необходимо отметить следующую деталь. В соотношениях (33), (34) через $\gamma_\mu$ обозначены генераторы групп $D_\gamma(\mathrm{II})$ и $D_\gamma(\mathrm{I})$. В уравнении Дирака $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, как уже отмечалось (4), имеют смысл инфинитезимальных операторов бустов. Говорить о смысловом совпадении одинаковых символов в волновых уравнениях и в соотношениях (33), (34) в общем случае нельзя. Безусловно верно только утверждение об изоморфизме групп, определяемых соотношениями (33) или (34).

Если для явной записи волнового уравнения выбрать подгруппу $d_\gamma$, то роль трех инфинитезимальных операторов бустов играют как раз матрицы $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ равенства 4 из формулы (34). Для них остаются верными соотношения (2), (4). Роль четвертого генератора может выполнять $\gamma_4$ в полном соответствии с условиями 4 из (34) и определяющими соотношениями (36). В результате волновое уравнение принимает вид

$$[i(\gamma_\mu p_\mu) - m_0]\psi = 0, \quad \mu = 1, 2, 3, 4, \tag{38}$$

где

$$\begin{aligned} &\gamma_s\gamma_t + \gamma_t\gamma_s = 2\delta_{st}, \quad \gamma_{s,t}^2 = 1 \qquad (s, t = 1, 2, 3), \\ &\gamma_s\gamma_4 + \gamma_4\gamma_s = 0 \qquad (s = 1, 2, 3), \\ &\gamma_4^2 = -1. \end{aligned}$$

Требования редукции полученного уравнения к уравнению Клейна–Гордона допускают $m_0 \neq 0$. По форме оно совпадает с уравнением Дирака. Отличие заключается в иной структуре группы $D_\gamma(\mathrm{I})$, которая однозначно определяется соотношениями (36). Так же как в случае уравнения Дирака, явная форма записи с конкретным выбором для представления одной из подгрупп не выявляет всех характеристик уравнения. Уравнение с действительными $\gamma$-матрицами можно найти уже в работе Майораны [4]. Анализ его физического содержания при этом не был произведен, так как одной из главных задач автора была формулировка уравнений, не содержащих дублеты частица–античастица. Приведенное выше построение преследует цель не только проанализировать конкретную группу, но и далее унифицировать методы получения лептонных уравнений.

**1.6. Квартетное уравнение.** После анализа двух предыдущих групп возникает естественный вопрос о возможности существования группы с $\mathrm{In} = 0$. Как уже отмечалось выше, все допустимые варианты сохранения клифордовых антикоммутационных соотношений типа (31) и (36) приводят только к двум возможностям $D_\gamma(\mathrm{II})$ и $D_\gamma(\mathrm{I})$.

Если ограничиться поиском уравнения для частиц со спином 1/2 ($l_0 = 1/2$), то максимальными подгруппами могут быть только $d_\gamma, f_\gamma, b_\gamma, c_\gamma$. Следовательно, порядок генераторов как элементов подгрупп может быть либо 4, либо 2. Как отмечалось выше, необходимым условием формулировки лоренц-инвариантного волнового уравнения является наличие трех антикоммутирующих генераторов. При этом полное число генераторов для формулировки волнового уравнения пока предполагается равным четырем. Таковы необходимые ограничения. Один из немногих вариантов положительного ответа на поставленный вопрос представлен в работе [18].

Пусть формальная запись циклической структуры для некоторой группы $\gamma$-матриц имеет вид

$$D_\gamma(\mathrm{III}) = D_\gamma[a_1, a_2, c_1, b_6] = Q_2[a_1, a_2][e + c_1][e + b_6]. \tag{39}$$

Здесь, как ранее, $Q_2[a_1, a_2]$ — подгруппа кватернионов с генераторами $a_1, a_2$. Выберем генераторы $c_1$ и $b_6$ так, чтобы $D_\gamma(\mathrm{III})$ содержала две подгруппы 16-го порядка $d_\gamma[a_1, a_2, c_1] = Q_2[a_1, a_2][e+c_1]$ и $b_\gamma[a_1, a_2, b_6] = Q_2[a_1, a_2][e+b_6]$. Все четыре генератора $a_1, a_2, c_1, b_6$ имеют порядок 4.

Кроме того, оказалось, что можно выполнить построение так, чтобы элемент $c_1$ стал элементом центра не только подгруппы $d_\gamma[a_1, a_2, c_1]$, но и всей группы $D_\gamma(\mathrm{III})$.

Тогда с учетом определений $Q_2$, $d_\gamma$ и $b_\gamma$ получаем следующий набор соотношений между генераторами:

$$\begin{aligned} &a_2a_1a_2^{-1}=a_1^{-1}, \quad a_1a_2a_1^{-1}=a_2^{-1}, \quad b_6c_1b_6^{-1}=c_1,\\ &c_1a_1c_1^{-1}=a_1, \qquad c_1a_2c_1^{-1}=a_2, \qquad c_1b_6c_1^{-1}=b_6,\\ &b_6a_1b_6^{-1}=a_1^{-1}, \quad b_6a_2b_6^{-1}=a_2^{-1}. \end{aligned} \tag{40}$$

Полученная таким образом группа $D_\gamma(\mathrm{III})$ имеет порядок 32. Группа, как и обе предыдущие, устроена так, что квадраты любых элементов четвертого порядка совпадают. Обозначим этот элемент $(k)$:

$$(a_1)^2=(a_2)^2=(c_1)^2=(b_6)^2=(k), \quad (k)^2=e. \tag{41}$$

Существенно изменилась структура группы. Если в двух предыдущих случаях центры групп состояли из двух элементов $(e\sim I, k\sim -I)$, то теперь центр содержит восемь элементов. Именно:

$$e, \quad k, \quad c_1, \quad c_1^{-1}, \quad a_3b_6, \quad a_3b_6^{-1}, \quad a_3b_6c_1, \quad a_3b_6c_1^{-1}. \tag{42}$$

Число сопряженных классов становится равным 20, поэтому группа имеет 16 одномерных неприводимых представлений и четыре неэквивалентных двумерных. Это означает, что решения будут не биспинорные, но спинорные. Другое важное отличие от дублетных уравнений заключается в том, что группа $D_\gamma(\mathrm{III})$ содержит все три возможных подгруппы $d_\gamma, b_\gamma, c_\gamma$. В силу построения (39) содержит подгруппы $d_\gamma$ и $b_\gamma$.

Можно заметить, что набор таких элементов

$$\{e, \quad a_1, \quad a_1^2, \quad a_1^3, \quad a_2c, \quad a_2^3c, \quad a_1a_2c, \quad a_1a_2c^3\}$$

образует подгруппу $q_2$. Дальнейшее ее расширение с помощью элемента $a_1a_2b_6$ дает подгруппу $c_\gamma$. Определяющие соотношения (40) позволяют перейти к выражениям в привычном виде, т. е. в виде соотношений между $\gamma$-матрицами, которые также порождают неприводимые матричные представления. В полной аналогии с уравнением Дирака получаем

$$\begin{aligned} &\gamma_s\gamma_t+\gamma_t\gamma_s=2\delta_{st}, \quad \gamma_s^2=1 \qquad (s,t=1,2,3).\\ &\gamma_s\gamma_4-\gamma_4\gamma_s=0 \qquad (s=1,2,3),\\ &\gamma_4^2=1. \end{aligned} \tag{43}$$

Очевидное и принципиальное отличие от условия Дирака (31) заключается в том, что $\gamma_4$ коммутирует со всеми остальными генераторами. Прямой проверкой можно убедиться, что в группе не имеется четвертого генератора, который антикоммутирует с первыми тремя. При этом выясняется, что группа $D_\gamma(\mathrm{III})$ содержит 16 элементов четвертого порядка и 16 — второго порядка, т. е. после построения НП получаем $\mathrm{In}=0$.

Из условия редукции данного (далее квартетного) уравнения к уравнению Клейна–Гордона получаем, что масса частиц $m=0$. Явная форма волнового уравнения зависит, как уже отмечалось, от выбора подгруппы, связанной с тем или иным неприводимым представлением. Если для явной записи выбрать $d_\gamma$, то получаем

$$(\gamma_sp_s)\psi-\gamma_4\frac{\partial\psi}{\partial t}=0 \quad (s=1,2,3), \tag{44}$$

где $\gamma$-матрицы определяются равенствами (43). Здесь и в последующих волновых уравнениях по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Подобно тому, как сделан переход от уравнения (1) к (35), можно записать уравнение (44) для явного представления с подгруппами $b_\gamma$ или $c_\gamma$.

Поскольку $\gamma_4$ коммутирует с $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, значит она коммутирует со всеми остальными, и потому $\gamma_4$ кратна единичной матрице. В таком случае уравнение принимает вид

$$(\gamma_s p_s)\psi \pm \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0 \quad (s = 1, 2, 3). \tag{45}$$

Знаки «$\pm$» возникают из того требования, что линейная форма (45) должна переходить (при умножении на сопряженную к ней) в квадратичную, которая называется уравнением Клейна–Гордона. Видно, что в данном случае мы имеем дело с четырьмя подструктурами. В дублетных случаях вопрос о том, что считать частицей и античастицей, представляется во многом условностью. Теперь необходимо сделать выбор того критерия, по которому мы выделяем пару частица–античастица. Физическое требование, кажущееся простым и естественным, — противоположность значений так называемых квантовых чисел — в условиях свободного уравнения является недостаточным. Поэтому можно исходить из аналогии с уравнением Дирака. Будем считать, что пара подгрупп, связанных между собой $\langle T \rangle$-преобразованием, ответственна за дублет частица–античастица. Этот выбор гарантирует однотипность спиновых свойств дублета [19]. В таком случае имеется две возможности одновременно, когда одна пара связана с подгруппами $d_\gamma$ и $b_\gamma$, а вторая с подгруппами $f_\gamma$ и $c_\gamma$.

Из установленной выше физической интерпретации величин $a_i$ и $b_k$ $(i, k = 1, 2, 3)$ и методики вычисления на их основе весовых чисел неприводимых представлений группы Лоренца видно, что первое весовое число $(l_0 = 1/2)$ одинаково для подгруппы $d_\gamma$ и для $b_\gamma$ так же, как и в уравнении Дирака. Поэтому спиновые свойства пары частиц, связанной с подгруппами $d_\gamma, b_\gamma$, совпадают с таковыми для дублета $e^+e^-$ в том смысле, что каждая из трех пространственных координат может быть выбрана в качестве оси квантования.

Основные характеристики второй пары частиц, связанной с подгруппами $f_\gamma, c_\gamma$, по спиновым свойствам совпадают со свойствами такой же пары подгрупп в рамках группы $D_\gamma(\mathrm{I})$. В частности, не меняются собственные значения операторов, определяющих весовые числа представлений группы Лоренца [13]. Это означает совпадение спиновых свойств соответствующей пары частица–античастица. Таким образом, вторая пара частиц имеет спин, ориентированный по направлению или против импульса так же, как это имеет место в случае $D_\gamma(\mathrm{I})$.

В отличие от дублетных уравнений, в квартетном случае уравнение замкнуто относительно каждого из возможных преобразований (26)–(29). Любая из дискретных операций либо оставляет каждый из двух наборов подгрупп ($d_\gamma, b_\gamma$ и $f_\gamma, c_\gamma$) без изменения, либо переводит один в другой. Но в квартетном случае группа в целом переходит сама в себя. Такое взаимно обратное превращение двух пар в условиях единого уравнения естественно связывать с осцилляциями. Необходимым условием их реализации является наличие квартетных состояний. Кстати сказать, такое положение наблюдается в случае осцилляций $K$-мезонов. Вопрос о достаточных условиях зависит от того, будет ли найден механизм или условия для перехода одной аннигилирующей пары в другую.

Безмассовое двухкомпонентное нейтрино не является новостью, поэтому возникает необходимость отметить различие предложенного формализма и аналогичных имеющихся.

Как уже отмечалось во введении, Ли и Янг [2] в своих построениях на основе двухкомпонентного нейтрино исходили из работы Паули [3]. В последней имеется словесная нечеткость. А именно, говорится о необходимости «зачеркивания» (в книге 1947 г.) «массового члена» или его «отбрасывания» в другом издании [20]. Но что принципиально, не просто массы $m$, а всего члена $m\gamma_4$, где $\gamma_4$ — четырехрядная матрица из уравнения Дирака. В противном случае, если оставить $\gamma_4$, не произойдет разделение уравнения на расцепленные двухкомпонентные части. Это говорит о том, что такой способ получения безмассового уравнения на основе уравнения Дирака невозможен, ибо переход к случаю $m = 0$ требует структурной перестройки. Она не возникает автоматически. К чести Паули, эта словесная недоговоренность не привела к ошибке в математической формулировке уравнения.

Для нас важным в анализируемой работе является то, что Паули написал в ковариантном виде и волновое уравнение, и уравнение непрерывности для четырехвектора плотности тока вероятности. Здесь, как и положено, присутствуют все четыре оператора $\partial/\partial t, \partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z$. Тогда в случае $m = 0$ в этих уравнениях оператору $\partial/\partial t$ необходимо соотнести множитель $\gamma_4$ (т. е. написать $\gamma_4\partial/\partial t$), который в безмассовом случае кратен единичной матрице. Это означает, что $\gamma_4 \sim I$ коммутирует с остальными тремя $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, как это записано во второй строке равенств (43) и как это имеет место в формулировках Паули. В результате волновое уравнение Паули совпадает с уравнением (45), полученным на основе (43). В противном случае, когда отсутствует $\gamma_4$, волновое уравнение теряет ковариантность формы. При этом $\gamma_4$ относится уже к уравнению для двухкомпонентных спиноров, а не к уравнению Дирака. Подобный анализ уравнений типа (45) со всеми вытекающими отсюда последствиями ранее никем не проводился.

**1.7. Синглетные состояния лептонов.** Отказ от антикоммутации четвертого генератора и его коммутация с тремя первыми открывают еще два новых варианта. Они отличаются от квартетной группы (43) значениями структурных инвариантов, а получаются в рамках требований коммутации одного из генераторов с тремя остальными и вариацией при этом порядков всех четырех генераторов [21].

Первый из двух возможных вариантов, обозначаемый далее $D_\gamma(\mathrm{IV})$, задается такими определяющими соотношениями:

$$\begin{aligned} &\gamma_s\gamma_t + \gamma_t\gamma_s = -2\delta_{st} \qquad (s,t = 1,2,3) \\ &\gamma_4\gamma_s - \gamma_s\gamma_4 = 0, \qquad\qquad \gamma_4^2 = 1. \end{aligned} \tag{46}$$

Вычисления дают при этом $\mathrm{In}[D_\gamma(\mathrm{IV})] = -1$.

При другом выборе определяющих соотношений

$$\begin{aligned} \gamma_s\gamma_t + \gamma_t\gamma_s = 0, &\qquad s \neq t \qquad (s,t = 1,2,3), \\ \gamma_3^2 = \gamma_2^2 = 1, &\qquad \gamma_1^2 = -1, \\ \gamma_4\gamma_s - \gamma_s\gamma_4 = 0, &\qquad \gamma_4^2 = 1 \end{aligned} \tag{47}$$

получаем группу, обозначаемую далее $D_\gamma(\mathrm{V})$, и величину структурного инварианта $\mathrm{In}[D_\gamma(\mathrm{V})] = 1$.

Обе группы, как три предыдущие, имеют порядок 32 и, подобно квартетному состоянию, имеют 20 сопряженных классов. Центр группы состоит из восьми элементов второго порядка. Следовательно, синглетные состояния описываются двухкомпонентными спинорами. Из соотношений (46), (47) совместно с требованием редукции к уравнению Клейна–Гордона однозначно следует, что $m = 0$ для обоих уравнений.

Основная особенность обеих групп заключается в том, что каждая из них содержит подгруппы одного типа: группа $D_\gamma(\mathrm{IV})$ содержит только подгруппы $b_\gamma$, а группа $D_\gamma(\mathrm{V})$ только подгруппы $c_\gamma$. Здесь имеются в виду подгруппы 16-го порядка, т. е. подгруппы, которые представляют тот или иной компонент связности группы Лоренца. Уравнения, связанные с такими группами, не содержат $\langle T\rangle$-сопряженных компонентов связности, а частицы не имеют античастиц. Таким образом, мы получаем синглетные состояния.

В полной аналогии с предыдущими случаями строятся волновые уравнения. Для $D_\gamma(\mathrm{IV})$ такое уравнение принимает вид

$$(ip_4\gamma_4 - p_1\gamma_1 - p_2\gamma_2 - p_3\gamma_3)\Psi(\mathbf{x}, t) = 0. \tag{48}$$

Волновое уравнение $D_\gamma(\mathrm{V})$ для одного из конкретных выборов $\gamma$-матриц (47) принимает вид

$$(p_4\gamma_4 - ip_1\gamma_1 - p_2\gamma_2 - p_3\gamma_3)\Psi(\mathbf{x}, t) = 0. \tag{49}$$

Аналогичные равенства можно записать для других вариантов, когда согласно (47) или $\gamma_2^2 = -1$, или $\gamma_3^2 = -1$.

Из коммутационных соотношений (24) и определяющих соотношений (47) следует неравнозначность трех пространственных направлений для подгруппы $c_\gamma$ в группе синглетов типа $D_\gamma(\mathrm{V})$. Это есть следствие неоднотипности операторов $a_1, a_2, a_3$. Оператор $a_1$ имеет порядок 4 ($a_1^4 = I$), в то время как операторы $a_2, a_3$ имеют порядок 2: $a_2^2 = a_3^2 = I$. Квантовое число спин в данном случае принимает действительное значение 1/2 только вдоль направления $a_1$. Собственные значения операторов $a_2$ и $a_3$ являются мнимыми. Это означает, что спин имеет направление либо вдоль, либо против импульса, связанного с направлением $a_1$. Здесь положение во многом аналогично дублету массивных нейтрино.

Необходимо отметить, что на первый взгляд в уравнении (49) имеется выделенность одной из пространственных осей. Действительно, выражение $ip_1\gamma_1$ содержит множитель $i$, тогда как два аналогичных не содержат. Но на самом деле с помощью элементов этой же самой группы можно совершить поворот вокруг одной из пространственных осей, и тогда множитель $i$ будет стоять при $\gamma_2$ или при $\gamma_3$. Таким образом, никаких ограничений на направление импульса не имеется, но всегда при этом спин ориентирован по импульсу. В этом смысле можно говорить, что ковариантность формулировки в целом выполняется, так как все необходимые для этого предпосылки имеются, но в скрытой форме. Это можно воспринимать как недостаточность стандартного (собственного ортохронного) представления группы Лоренца для адекватного описания всего многообразия свойств лептонов.

Можно показать, что комплексное сопряжение является преобразованием автоморфизма для каждой из упомянутых групп $\gamma$-матриц. В силу такого свойства вопрос о положительной определенности плотности вероятности ($\overline{\Psi}\Psi$), как справедливо отмечал Паули [3], является простым следствием линейности уравнения и многокомпонентности

$\Psi$. Формулировка уравнения непрерывности для тока вероятности также не претерпевает принципиальных изменений.

Прямым вычислением можно показать, что во всех случаях, когда $m = 0$, оператор $\gamma_4$ ($\beta$ в обозначениях Паули) становится кратным единице. Этот оператор умножается на $\partial/\partial t$ в ковариантной формулировке, будь то волновое уравнение или уравнение непрерывности. Поэтому уравнение непрерывности в виде, предложенном Паули [3, с. 252],

$$\frac{\partial\Psi(\mathbf{x},t)}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \sigma_k \frac{\partial\Psi(\mathbf{x},t)}{\partial x_k} = 0, \tag{50}$$

остается справедливым при условии замены $\sigma_k$ на $(b_\gamma)_k$ в случае $D_\gamma(\mathrm{IV})$ и на $(c_\gamma)_k$ — в случае $D_\gamma(\mathrm{V})$. Здесь $\sigma_k$ — матрицы Паули; $k = 1, 2, 3$, а $(b_\gamma)_k$ и $(c_\gamma)_k$ — матричное представление для операторов бустов для $T$- и $P$-сопряженных компонентов связности, т. е. групп $b_\gamma$ и $c_\gamma$ соответственно. Но исключить при этом $\gamma_4$ из рассмотрения, согласно (46) и (47), означает отказаться от волнового уравнения.

Явный вид матриц $(b_\gamma)_k$ и $(c_\gamma)_k$, которые играют роль эквивалентов матриц $\sigma_k$, для конкретного выбора уравнений (48) и (49) таков [19]:

$$(b_\gamma)_1 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}; \quad (b_\gamma)_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}; \quad (b_\gamma)_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и

$$(c_\gamma)_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}; \quad (c_\gamma)_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad (c_\gamma)_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Подстановка в уравнения (48) и (49) решений в виде плоских волн, т. е. переход к $p$-представлению для стационарных решений, показывает, что решения существуют при положительных и отрицательных значениях энергии $E = \pm\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}$. Отличие от уравнения Дирака и варианта массивного дублета нейтрино заключается в том, что в дублетных состояниях имеет место двукратное вырождение обоих значений энергии.

Из определяющих соотношений (46) и (47) следует, что связанные с ними группы имеют четыре неэквивалентных неприводимых представления размерности 2. Каждому из них, согласно теореме Бернсайда, сопутствует по одному эквивалентному неприводимому представлению. Можно показать, что эквивалентные представления отличаются одно от другого только пространственным поворотом.

Четыре неэквивалентных представления отличаются обратными знаками элементов центра со следами, не равными нулю. В результате появляются четыре типа решений, отличающихся двумя знаками энергий и двумя значениями проекций спинов. Это прямое следствие того, что группы $D_\gamma(\mathrm{IV})$ и $D_\gamma(\mathrm{V})$ порождаются четырьмя генераторами и имеют порядок 32. В этом отношении синглетные уравнения вполне аналогичны дублетным.

Как уже отмечалось, каждая из групп $D_\gamma(\mathrm{IV})$ и $D_\gamma(\mathrm{V})$ имеет в своей структуре максимальную инвариантную подгруппу одного сорта — $b_\gamma$ и $c_\gamma$ соответственно. Различие свойств подгрупп ведет к различию спиновых характеристик синглетов. Из коммутационных соотношений (10) для подгруппы $b_\gamma$ очевидно, что все три пространственных направления эквивалентны для синглетов типа $D_\gamma(\mathrm{IV})$. Следовательно, ось квантования спина может быть направлена вдоль любой из них так же, как у электрона или позитрона. Учитывая, что подгруппа $b_\gamma$ связана с $d_\gamma$ $\langle T\rangle$-преобразованием (16), данный тип состояния далее будет называться $T$-синглетом.

Учитывая, что подгруппа $c_\gamma$ связана с пространственно-несимметричной подгруппой $q_2[a_1, a_2]$, данный тип состояния далее будет называться $P$-синглетом.

Любое из рассмотренных ранее лептонных уравнений обладает той или иной инвариантностью относительно дискретных преобразований $\langle T\rangle, \langle P\rangle$, $\langle PT\rangle$. Согласно равенствам (26)–(29) составляющие синглетных уравнений неинвариантны относительно любого из дискретных преобразований. Поэтому если синглетные состояния реализуются в природе как самостоятельные объекты, то взаимодействия с их участием могут играть выделенную роль в поисках необратимости во времени или асимметрии вещество–антивещество на микроскопическом уровне.

Перечисленные результаты для всех типов уравнений позволяют утверждать, что каждое уравнение для стабильного лептона имеет собственный, неповторяющийся состав, т. е. набор подструктур, на которых реализуется четыре различных компонента связности однородной группы Лоренца.

1. Уравнение Дирака — $D_\gamma(\mathrm{II})$: $d_\gamma, b_\gamma, f_\gamma$.

$$\mathrm{In}[D_\gamma(\mathrm{II})] = -1.$$

2. Уравнение для дублета массивных нейтрино — $D_\gamma(\mathrm{I})$: $d_\gamma, c_\gamma, f_\gamma$.

$$\mathrm{In}[D_\gamma(\mathrm{I})] = 1.$$

3. Уравнение для квартета безмассовых нейтрино —$D_\gamma(\mathrm{III})$: $d_\gamma, b_\gamma, c_\gamma, f_\gamma$.

$$\mathrm{In}[D_\gamma(\mathrm{III})] = 0.$$

4. Уравнение для безмассового $T$-синглета — $D_\gamma(\mathrm{IV})$: $b_\gamma$.

$$\mathrm{In}[D_\gamma(\mathrm{IV})] = -1.$$

5. Уравнение для безмассового $P$-синглета — $D_\gamma(\mathrm{V})$: $c_\gamma$.

$$\mathrm{In}[D_\gamma(\mathrm{V})] = 1.$$

Видно, что структура уравнений позволяет отличить одно уравнение от другого. Все пять типов уравнений не имеют подструктур, допускающих физическую интерпретацию. По этой причине нет оснований считать их нестабильными так же, как это имеет место в случае электрона. Простой перебор всех возможностей на основе структурных инвариантов четырех компонентов связности и возможных инвариантов уравнений в целом позволяет утверждать, что других стабильных лептонов в рамках оговоренных предположений и требований не имеется.

## 2. РАСШИРЕНИЕ ГРУПП СТАБИЛЬНЫХ ЛЕПТОНОВ

Можно ли, оставаясь в рамках прежних четырех предположений, получить дополнительные лептонные уравнения? Оказалось, что возможно [9].

Решается поставленная задача введением дополнительного (пятого) генератора для порождения новой группы волнового уравнения. Выяснилось, что существует три и только три возможности, которые допускают интерпретацию как новые волновые уравнения со своими дополнительными характеристиками. При этом в новых группах появляются подструктуры, допускающие физическую интерпретацию в терминах стабильных лептонов. В этом их отличие от групп стабильных лептонов, что позволяет интерпретировать их как нестабильные в том случае, если масса частицы окажется больше суммы масс составляющих частиц.

Так расширение группы $\gamma$-матриц Дирака ($D_\gamma(\mathrm{II})$) с помощью одного антикоммутирующего генератора $\Gamma_5$ такого, что $\Gamma_5^2 = I$, приводит к группе $\Delta_1$ со структурным инвариантом $\mathrm{In}[\Delta_1] = -1$. Расширение той же группы с помощью генератора такого, что $\Gamma'^2_5 = -1$, доставляет $\Delta_3$ со структурным инвариантом $\mathrm{In}[\Delta_3] = 0$. Наконец, расширение группы $\gamma$-матриц дублетного нейтрино ($D_\gamma(\mathrm{I})$) с помощью $\Gamma''^2_5 = -1$ приводит к группе $\Delta_2$ с инвариантом $\mathrm{In}[\Delta_2] = 1$.

Все три группы имеют ряд общих свойств. Порядок групп равен 64, центр каждой группы содержит четыре элемента, элементы групп имеют порядок 2 или 4, и каждая из групп имеет 34 сопряженных класса. Как следствие, группы имеют по 32 одномерных неприводимых представления и по два неэквивалентных четырехмерных. Кроме того, каждая группа имеет в своем составе по три и только три подгруппы 32-го порядка, которые изоморфны одному из пяти перечисленных вариантов уравнений для стабильных лептонов. Но состав подгрупп 32-го порядка в каждом случае свой, неповторяющийся.

**Группа** $\Delta_1$ имеет следующие определяющие соотношения

$$\Gamma_\mu\Gamma_\nu + \Gamma_\nu\Gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu} \quad (\mu,\nu = 1,2,3,4,5). \tag{51}$$

Из них вытекает, что

$$\Gamma_6\Gamma_\mu = \Gamma_\mu\Gamma_6, \quad \Gamma_6^2 = I \quad (\mu = 1,2,3,4,5), \tag{52}$$

где $\Gamma_6 \equiv \Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3\Gamma_4\Gamma_5$.

Это означает, что $\Gamma_6$ является центром группы и что при переходе к неприводимому матричному представлению можно записать $\Gamma_6 = \pm 1$.

Очевидно, что когда $\mu$ и $\nu$ пробегают значения $1,2,3,4$, мы получаем группу Дирака. Можно показать на основе (51), что $\Delta_1$ помимо подгруппы Дирака содержит две и только две подгруппы 32-го порядка. В результате мы получаем такой состав:

$$\Delta_1\{D_\gamma(\mathrm{II}), \quad D_\gamma(\mathrm{III}), \quad D_\gamma(\mathrm{IV})\}. \tag{53}$$

Выражение (53) вместе со структурным инвариантом $\mathrm{In}[\Delta_1] = -1$ идентифицируют группу $\Delta_1$, т. е. делают ее физическое содержание отличным от остальных.

Волновое уравнение формулируется в полной аналогии с уравнением Дирака при условии надлежащего выбора явного вида $\gamma$-матриц:

$$\left[i\sum_{a=1}^{4}(\Gamma_a p_a) + \Gamma_6 m_1\right]\psi = 0, \quad \Gamma_6 = \pm 1, \tag{54}$$

где $p_a (a = 1,2,3,4)$ и $m$ — четырехимпульс и масса нестабильной частицы. Запись уравнения в виде (54) оказалась возможной благодаря удачному стечению обстоятельств, в силу которых размерность неприводимого представления для группы $\Delta_1$ совпала с размерностью представления для подгруппы Дирака — $D_\gamma(\mathrm{II})$. При этом два знака при $\Gamma_6 = \pm 1$, связанные с двумя неэквивалентными представлениями, ассоциируются с частицей и античастицей. Как показал анализ уравнений для стабильных лептонов, необходимым условием описания дублета частица–античастица является наличие в уравнении $T$-сопряженных компонентов связности представлений группы Лоренца. Данное требование выполняется для всех трех перечисленных групп.

Наличие в составе $\Delta_1$ в формуле (53) подгруппы Дирака является прямой предпосылкой для описания заряженного дублета, на роль которого может претендовать $\mu^\pm$. При этом естественно возникают не только сходство с дублетом $e^\pm$, но и различия, связанные со структурой. Можно надеяться, что различия структуры послужат основой для решения застарелой проблемы $(\mu - e)$-универсальности [22].

Вычисление неприводимых представлений для группы $\Delta_1$ дает явный вид $\Gamma$-матриц:

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Группа** $\Delta_3$ получается при расширении группы Дирака с помощью похожих определяющих соотношений. Отличие лишь в порядке пятого генератора $\Gamma_5$,

$$\begin{aligned} &\Gamma_s\Gamma_t + \Gamma_t\Gamma_s = 2\delta_{st} \quad (s,t = 1,2,3,4), \\ &\Gamma_s\Gamma_5 + \Gamma_5\Gamma_s = 0 \qquad (s = 1,2,3,4), \\ &\Gamma_5^2 = -1. \end{aligned} \tag{55}$$

Отсюда вытекает, что

$$\Gamma_6 \equiv \Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3\Gamma_4\Gamma_5, \quad \Gamma_6\Gamma_\mu = \Gamma_\mu\Gamma_6 \quad (\mu = 1,2,3,4,5). \tag{56}$$

По-прежнему $\Gamma_6$ является центром группы и $\Gamma_6^2 = -I$. В данном случае матричная реализация представления ведет к $\Gamma_6 = \pm i1$.

Состав группы изменился следующим образом:

$$\Delta_3\{D_\gamma(\mathrm{II}), \quad D_\gamma(\mathrm{I}), \quad D_\gamma(\mathrm{III})\}, \tag{57}$$

что соответствует структурному инварианту $\mathrm{In}[\Delta_3] = 0$. Подгруппа Дирака по-прежнему имеется в составе, но в целом он усложнился. В составе $\Delta_3$ имеется две массивных составляющих, что делает различными массы $\Delta_1$ и $\Delta_3$, и потому частицу, связанную с $\Delta_3$, можно считать более массивной. Кроме того, эти массивные составляющие $D_\gamma(\mathrm{II})$,

$D_\gamma(\mathrm{I})$ выступают на равных правах в том смысле, что имеют размерность неприводимых представлений, совпадающую с размерностью $\Delta_3$. Возможным последствием такого обстоятельства может являться большее число каналов для распадов. Это создает предпосылки связывать $\Delta_3$ с дублетом $\tau^\pm$.

Все замечания, высказанные для предыдущего волнового уравнения, остаются в силе и в данном случае:

$$\left[\sum_{a=1}^{4}(\Gamma_a p_a) \pm m_3\right]\psi = 0, \quad \Gamma_6 = \pm i.$$

Здесь опять $p_a$ и $m_3$ — четырехимпульс и масса нестабильной, но уже другой частицы.

Четырехмерное неприводимое матричное представление для группы $\Delta_3$ имеет вид

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Группа** $\Delta_2$ определена с помощью соотношений

$$\begin{aligned} \Gamma_s\Gamma_t + \Gamma_t\Gamma_s &= 2\delta_{st} \qquad (s,t = 1,2,3), \\ \Gamma_s\Gamma_4 + \Gamma_4\Gamma_s &= 0 \qquad (s = 1,2,3), \\ \Gamma_4^2 &= -1. \\ \Gamma_u\Gamma_5 + \Gamma_5\Gamma_u &= 0 \qquad (u = 1,2,3,4), \\ \Gamma_5^2 &= -1. \end{aligned} \tag{58}$$

Отсюда следует, что

$$\Gamma_6 \equiv \Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3\Gamma_4\Gamma_5, \quad \Gamma_6\Gamma_\mu = \Gamma_\mu\Gamma_6 \quad (\mu = 1,2,3,4,5), \tag{59}$$

т. е. $\Gamma_6$ входит в центр группы и является элементом второго порядка $\Gamma_6^2 = I$. В матричной реализации он принимает вид $\Gamma_6 = \pm 1$.

Состав группы отличается от двух предыдущих:

$$\Delta_2\{D_\gamma(\mathrm{I}), \quad D_\gamma(\mathrm{III}), \quad D_\gamma(\mathrm{V})\}, \tag{60}$$

так же как и структурный инвариант $\mathrm{In}[\Delta_2] = 1$. Сравнение состава $\Delta_2$ с пятью приведенными ранее уравнениями для стабильных лептонов показывает, что выражение (60) содержит только нейтринные составляющие, включая массивную. Поэтому $\Delta_2$ можно связывать с массивным нестабильным нейтрино.

Волновое уравнение для данного случая при соответствующем выборе явного вида Г-матриц внешне совпадает с уравнением (54). Различия между ними полностью определяются соотношениями (51) и (58):

$$\left[i\sum_{a=1}^{4}(\Gamma_a p_a) + \Gamma_6 m_2\right]\psi = 0, \quad \Gamma_6 = \pm 1.$$

Смысл обозначений прежний.

Получен следующий вид Г-матриц:

$$\Gamma'_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma'_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma'_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma'_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma'_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что здесь все пять матриц приведены к действительной форме, что в данном случае возможно в соответствии с теоремой (30) о неприводимых матричных группах, когда их структурный инвариант равен $\mathrm{In}[D_\gamma] = 1$.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Существенной характеристикой предложенного метода является разработка алгоритма построения уравнений типа Дирака, т. е. волновых уравнений, линейных по производным, без применения лагранжевой методики. Теоретико-групповые методы сделали вполне обозримой задачу перечисления всех типов лептонных уравнений в рамках немногих исходных положений. Общность метода позволила в едином подходе охватить как стабильные, так и нестабильные лептоны. Такая методика становится особенно востребованной в свете поиска ответов на вопросы, поставленные перед физикой микромира, астрофизикой и другими смежными областями знаний. Выполненный анализ позволяет более обоснованно оценить возможности и ограниченность однородной группы Лоренца, одним из очевидных следствий которой является точечность объектов, отсутствие у них пространственно-временной структуры.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вейль Г.* Теория групп и квантовая механика. М., 1986. С. 16.
2. *Lee T. D., Yang C. N.* Parity Nonconservation and a Two-Component Theory of the Neutrino // Phys. Rev. 1957. V. 105, No. 5. P. 1671–1675.
3. *Pauli W.* Handbuch der Physik. Berlin, 1933. V. 24. P. 226–227 (см. также *Паули В.* Общие принципы волновой механики. М., 1947. С. 254).
4. *Majorana E.* Teoria simmetrica dell' ellettrone e del positrone // Nuovo Cim. 1937. V. 14. P. 171.
5. *Космачев О. С.* Ковариантная формулировка волнового уравнения для дублета массивных нейтральных лептонов. Препринт ОИЯИ Р4-2003-127. Дубна, 2003.
6. *Feynman R. P., Gell-Mann M.* Theory of the Fermi Interaction // Phys. Rev. 1958. V. 109, No. 1. P. 193–198.
7. *Окунь Л. Б.* // УФН. 2007. Т. 177. С. 397.

8. *Космачев О. С.* Представления группы Лоренца и классификация стабильных лептонов. Препринт ОИЯИ Р2-2006-6. Дубна, 2003.
9. *Гусев А. А., Космачев О. С.* Структурные квантовые числа и нестабильные лептоны // Письма в ЭЧАЯ. 2008. Т. 5, № 2. С. 126–133.
10. *Wigner E.* On Unitary Representations of the Inhomogeneous Lorentz Group // Ann. Math. 1939. V. 40, No. 1. P. 149–204.
11. *Lomont J. S.* Applications of Finite Groups. N. Y.; London, 1959. P. 41; 51.
12. *Ван дер Верден Б. Л.* Метод теории групп в квантовой механике. М., 2004. С. 93.
13. *Наймарк М. А.* Линейные представления группы Лоренца. М., 1958. С. 88; 93; 104.
14. *Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я.* Представления группы вращений и группы Лоренца, их применения. М., 1958. С. 166.
15. *Dirac P. A. M.* The Quantum Theory of the Electron // Proc. Roy. Soc. A. 1928. V. 117. P. 610–624.
16. *Громов Н. А.* Контракции и аналитические продолжения классических групп. Единый подход. Сыктывкар: Коми науч. центр, 1990.
17. *Космачев О. С.* Об инвариантах уравнений типа Дирака. Препринт ОИЯИ Р2-2002-217. Дубна, 2002.
18. *Космачев О. С.* Волновое уравнение для квартета нейтрино // Письма в ЭЧАЯ. 2004. Т. 1, № 5(122). С. 58–65.
19. *Космачев О. С.* Спин как кинематическое проявление релятивизма. Препринт ОИЯИ Р2-2005-6. Дубна, 2005.
20. *Паули В.* Труды по квантовой теории. М., 1975. С. 544.
21. *Космачев О. С., Гусев А. А.* О возможных типах майорановских частиц // Вестн. РУДН. Сер. «Математика. Информатика. Физика». 2008. № 2. С. 91–99.
22. *Комар А. А.* $(\mu - e)$-универсальность и слабые взаимодействия // Тр. семинара по $(\mu - e)$-проблеме. М., 1974. С. 53–70.

Получено 25 февраля 2009 г.