Письма в ЭЧАЯ. 2006. Т. 3, № 3(132). С. 7–23

УДК 530.12: 531.18+538.3

СТО ЛЕТ СТО

Н. А. Черников

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Специальная теория относительности рассматривается здесь как эпизод неевклидовой геометрии. Обращается внимание на то, что замена пятого постулата Евклида на постулат Лобачевского о параллельных прямых в пространстве скоростей материальной точки приводит к замене постулата об одинаковом ходе времени на постулат об одинаковой скорости света во всех инерциальных системах отсчета.

Special theory of relativity is considered here as an episode from non-Euclidean geometry. Special attention is drawn to the fact that the replacement of the fifth Euclidean postulate with the Lobachevsky postulate about the parallel straight lines in the velocity space of a material point leads to the replacement of the postulate about one and the same time rate with the postulate about one and the same light velocity in all inertial reference systems.

1. ОТКРЫТИЕ НОВОЙ СТО

Прошло сто лет с тех пор как *«в трех работах, Лоренца* [1], *Пуанкаре* [2] *и Эйнштейна* [3], *были установлены положения и развиты соображения, образующие фундамент теории относительности»* [4, с. 15]. Следуя Эйнштейну, ее называют специальной теорией относительности и обозначают через аббревиатуру СТО, чтобы отличать ее от созданной Эйнштейном и Гильбертом теории, называемой общей теорией относительности и обозначаемой через ОТО.

В основу СТО были положены два принципа: постулат относительности [4, с. 17] и постулат постоянства скорости света [4, с. 19]. Постулат относительности уже тогда был далеко не нов: он принадлежит Галилею. Постулат же постоянства (абсолютности — *авт.*) скорости света был выдвинут вместо ньютоновского постулата абсолютности времени.

Всякую теорию, основанную на постулате абсолютности скорости света, обычно называют релятивистской, а теорию, основанную на постулате абсолютности времени, называют нерелятивистской. Это нелогично, так как слово «релятивизм» связано с постулатом относительности Галилея, но никак не связано ни с постулатом абсолютности скорости света, ни с постулатом абсолютности времени.

Поэтому:

1. Теорию, основанную на постулате Галилея и постулате абсолютности скорости света, будем называть новой СТО.

2. Теорию, основанную на постулате Галилея и постулате абсолютности времени, будем называть старой СТО.

3. Общая часть этих двух теорий основана на постулате Галилея. Будем называть ее основной, или абсолютной, частью СТО.

Тем самым мы учтем существующую аналогию между структурой СТО и структурой метрической доримановой геометрии, состоящей из геометрии Евклида и геометрии Лобачевского. Общая часть этих двух геометрий основана на четырех постулатах Евклида. Ее называют абсолютной геометрией.

Так вот, старая СТО соответствует геометрии Евклида, новая СТО — геометрии Лобачевского, основная часть СТО — абсолютной геометрии.

2. ПОСТУЛАТ ГАЛИЛЕЯ

Согласно постулату Галилея предполагается, что существует множество инерциальных систем отсчета, одинаково пригодных для описания законов природы. Наблюдатель может выбрать любую из них в качестве покоящейся системы. Всякая другая инерциальная система отсчета движется прямолинейно и равномерно относительно инерциальной системы отсчета, выбранной наблюдателем в качестве покоящейся.

Выделенность покоящейся системы отсчета среди прочих инерциальных систем отсчета субъективна, но в той мере, в какой ее выбор зависит от воли наблюдающего физика.

3. ЧЕТВЕРКА АТРИБУТОВ ИСО

Каждая инерциальная система отсчета (ИСО) наделяется четверкой своих атрибутов: временем t, абсциссой x, ординатой y и аппликатой z. Все эти атрибуты (при условии, что уже выбраны единицы времени и длины) независимо пробегают все вещественные значения от минус до плюс бесконечности. Тем самым каждая ИСО наделяется четырехмерным арифметическим пространством.

4. ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ В СТО КАК ПРОСТОЕ МНОГООБРАЗИЕ

В СТО предполагается, что пространство-время является простым многообразием и что это многообразие ставится в биективное соответствие с вышеуказанным арифметическим пространством. Последнее, таким образом, выступает в роли координатной карты (короче — просто *карты*), покрывающей все пространство-время. Такая карта выделена, она, так сказать, привилегирована, ибо составлена из одних только атрибутов некоторой ИСО, к тому же взятых в порядке t, x, y, z. Наоборот, карту будем называть привилегированной, если она составлена из атрибутов некоторой ИСО, взятых в порядке t, x, y, z. Есть, конечно, много других, так сказать, непривилегированных карт, например, четверка всяких криволинейных координат или четверка прямолинейных координат m, n, y, z, где $m = x+ct,\ n = x-ct$, а через c обозначена скорость света. Последняя четверка является картой не только в новой СТО, в которой она, кстати сказать, очень полезна, но и в старой СТО. Тем не менее, эта карта непривилегирована, ибо составлена не только из атрибутов ИСО.

Заметим, что пользоваться картографической терминологией и говорить, например, *координатная карта* вместо того, чтобы говорить *координатная система*, полезно уже потому, что это помогает избегать путаницы, возможной при частом употреблении слова *система*, предостерегает, например, от того, чтобы *систему координат* путать с *системой отсчета*. Так, если четверка t, x, y, z является картой, то и четверка

$$\acute{t} = t, \quad \acute{x} = x - vt, \quad \acute{y} = y, \quad \acute{z} = z, \tag{1}$$

где v — вещественное число, является картой и в старой, и в новой СТО, но атрибутами двух инерциальных систем отсчета эти четверки вместе могут быть только в старой СТО. Напротив, если четверка t, x, y, z является картой, то и четверка

$$c\acute{t} = \frac{ct - \beta x}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \acute{x} = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \acute{y} = y, \quad \acute{z} = z, \tag{2}$$

где $-c < v < c$, $\beta = v/c$, является картой и в старой, и в новой СТО, но атрибутами двух инерциальных систем отсчета эти четверки вместе могут быть только в новой СТО.

5. ИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

Разобьем все множество ИСО на (не пересекающиеся друг с другом) классы эквивалентности. К одному и тому же классу отнесем всякие две ИСО, если они не движутся друг относительно друга. Их атрибуты $\hat{t}, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ и t, x, y, z связаны равенствами

$$\begin{aligned} \hat{t} &= t_0 + t, \\ \hat{x} &= x_0 + E^1_1 x + E^1_2 y + E^1_3 z, \\ \hat{y} &= y_0 + E^2_1 x + E^2_2 y + E^2_3 z, \\ \hat{z} &= z_0 + E^3_1 x + E^3_2 y + E^3_3 z, \end{aligned} \tag{3}$$

где t_0, x_0, y_0, z_0 и E^a_b — вещественные числа, причем числа E^a_b составляют ортогональную унимодулярную матрицу (E^a_b).

Определенный таким образом класс эквивалентности мы будем называть *инерциальной системой* просто (не добавляя слова *отсчета*).

6. ГЕОМЕТРИЯ МИРА С ВЫДЕЛЕННОЙ СИСТЕМОЙ ОТСЧЕТА

Следуя Минковскому, пространство-время мы будем называть *миром,* а элементы пространства-времени — *мировыми точками.*

Равенства (3) задают фундаментальную группу мира с выделенной инерциальной системой. Геометрические свойства мира, не изменяющиеся при преобразованиях этой группы, и инварианты этой группы (в соответствии с эрлангенской программой Клейна) составляют предмет геометрии мира с выделенной инерциальной системой.

Инвариантами этой группы являются дифференциальные формы

$$dt, \quad dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad dx \wedge dy \wedge dz, \quad dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz. \tag{4}$$

Как видно, мир с выделенной инерциальной системой выступает в виде прямого произведения $T \times E$ ориентированной евклидовой прямой T на ориентированное евклидово пространство E.

Точками одномерного пространства T являются мировые гиперплоскости $t = t_0$. Такие мировые гиперплоскости называются пространственноподобными.

Точками пространства E являются мировые линии $x = x_0$, $y = y_0, z = z_0$ частиц, покоящихся в рассматриваемой инерциальной системе. Такие мировые прямые линии называются времениподобными.

Плоскостями пространства E являются времениподобные мировые гиперплоскости типа $z = z_0$.

Прямыми пространства E являются времениподобные мировые плоскости типа $y = y_0$, $z = z_0$.

Пространственноподобные мировые прямые типа $t = t_0$, $x = x_0, y = y_0$ являются мировыми линиями не частиц, а фантомов — спорных объектов, удачно называемых *тахионами.* Впрочем, вполне реален отрезок такой прямой, выходящий из той мировой точки, где и когда случается абсолютно упругое столкновение частицы с какой-нибудь другой частицей, выступая в роли ударной силы, подействовавшей на частицу.

Длина отрезка в пространстве E, соединяющего точки $x = x_1, y = y_1, z = z_1$ и $x = x_2, y = y_2, z = z_2$, равна $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Элемент объема в пространстве E равен $dx \wedge dy \wedge dz$.

Длина направленного в *будущее* отрезка прямой T, выходящего из точки $t = t_1$ и приходящего в точку $t = t_2$, равна $t_2 - t_1$.

Элемент мирового объема равен

$$d\hat{t} \wedge d\hat{x} \wedge d\hat{y} \wedge d\hat{z} = dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz. \tag{5}$$

7. ЭКВИАФФИННЫЙ МИР

Говорить о равномерном и *прямолинейном* движении системы отсчета, о мировых прямых линиях, о мировых плоскостях и о мировых гиперплоскостях можно, но если ввести в пространство-время примитивную аффинную связность, все компоненты Γ^a_{mn} которой равны нулю в привилегированной карте t, x, y, z. В мире с такой связностью все компоненты Γ^a_{mn} равны нулю не только в привилегированной карте, но и во всякой карте вида

$$x^a = \Phi^a + \Phi^a_0 t + \Phi^a_1 x + \Phi^a_2 y + \Phi^a_3 z, \quad a = 0, 1, 2, 3, \tag{6}$$

где Φ^a и Φ^a_b — вещественные числа, причем обязательно $\mathrm{Det}\,(\Phi^a_b) \neq 0$.

Все карты вида (6) называются аффинными. Внешнее произведение дифференциалов аффинных координат равняется

$$dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \mathrm{Det}\,(\Phi^a_b)\; dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz. \tag{7}$$

Принимая дополнительно условие унимодулярности $\mathrm{Det}\,(\Phi^a_b) = 1$, мы приходим к понятию четырехмерного эквиаффинного мира с его эквиаффинными картами. Например, эквиаффинными являются карты (1), (2) и (3).

Внешнее произведение дифференциалов эквиаффинных координат равняется

$$dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz. \tag{8}$$

Из (5) и (8) следует, что во всех инерциальных системах в эквиаффинном мире элемент мирового объема равняется

$$dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz. \tag{9}$$

Мировые прямые, мировые плоскости и мировые гиперплоскости в эквиаффинном мире называются пространственноподобными или времениподобными, если таковыми они являются в одной из инерциальных систем, а как распознавать эти образы в инерциальной системе, сказано в разд. 6.

8. ПРОЕКТИВНОЕ ПРОСТРАНСТВО МИРОВЫХ СКОРОСТЕЙ

Мировой скоростью свободно движущегося материального объекта, будь то частица, фотон или тахион, называем семейство параллельных прямых линий в эквиаффинном мире:

$$x^a = x^a_0 + \xi^a \tau, \qquad a = 0, 1, 2, 3. \tag{10}$$

По существу, именно так в знаменитой работе [5] А. П. Котельников ввел в теоретическую физику понятие пространства мировых скоростей. Эту работу хорошо знали геометры, но физики-теоретики совсем ее не знали вплоть до 1956 г., хотя П. А. Широков цитировал ее в замечательном обзоре [6], опубликованном в военном 1943 г. в популярном журнале «Природа».

Автор настоящего обзора узнал о работе [5] в 1956 г., познакомившись с историко-математическим исследованием [7] Б. А. Розенфельда, опубликованным вслед за только что вышедшей книгой [8] В. А. Фока. Так вот, пространство мировых скоростей Котельникова является трехмерным проективным пространством.

На важность проективной геометрии для математического обоснования СТО обратил внимание В. Паули в превосходной монографии [4], впервые вышедшей в свет в 1921 г.: *«Связь геометрии Лобачевского–Бойя, о которой идет речь, может быть кратко охарактеризована следующим образом: если рассматривать dx^1, dx^2, dx^3, dx^4 как однородные координаты в проективном трехмерном пространстве, то инвариантность уравнения*

$$(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 - (dx^4)^2 = 0$$

означает введение метрики Кэли и при этом в основу кладется действительное сечение» [4, с. 108].

Эта мысль нескоро получила должный резонанс, однако восторжествовала. Об этом я рассказал в 1976 г. в Казани в докладе на Всесоюзной конференции, посвященной 150-летию геометрии Лобачевского. Доклад опубликован в сборнике [9] пленарных докладов.

В кратком обзоре нет места для пространных разъяснений, и я ограничусь необходимыми.

В одних, как (4), формулах дифференциалы dx^a играют роль линейных дифференциальных форм, а символы частных производных по x^a играют роль векторных полей $\partial/\partial x^a$. В таких формулах

$$dx^a dx^b = \frac{1}{2}(dx^a \otimes dx^b + dx^b \otimes dx^a), \quad dx^a \wedge dx^b = \frac{1}{2}(dx^a \otimes dx^b - dx^b \otimes dx^a), \quad (11)$$

где $\otimes$ — символ тензорного умножения.

В других формулах, как в приведенной выше цитате из книги [4], дифференциалы dx^a играют роль однородных координат в проективном пространстве и тогда, как в (10), $dx^a = \xi^a d\tau$. В проективной геометрии трех измерений переменные $\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3$ и $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ являются однородными координатами точек и плоскостей и, следовательно, определенными лишь с точностью до общего ненулевого множителя.

Метрика Кэли основывается на понятии Абсолюта — проективной поверхности, задаваемой с помощью квадратичных форм от однородных координат проективной точки и проективной поверхности.

А. П. Котельников, опираясь на результаты исследований Кэли, ввел в проективное пространство скоростей геометрию Лобачевского в новой СТО, и сначала аффинную, а затем и евклидову геометрию в старой СТО.

9. АНГАРМОНИЧЕСКОЕ ОТНОШЕНИЕ МИРОВЫХ СКОРОСТЕЙ

Семейство (10) параллельных мировых прямых представляет собой проективную точку $\mathbf{a}$. В атрибутах ИСО это же семейство записывается в виде

$$t = t_0 + u^0\tau, \; x = x_0 + u^1\tau, \quad y = y_0 + u^2\tau, \quad z = z_0 + u^3\tau. \quad (12)$$

Однородными координатами проективной точки в аффинных и эквиаффинных картах являются производные $dx^a/d\tau = \xi^a$, а в привилегированной карте — производные

$$\frac{dt}{d\tau} = u^0, \quad \frac{dx}{d\tau} = u^1, \quad \frac{dy}{d\tau} = u^2, \quad \frac{dz}{d\tau} = u^3. \quad (13)$$

Подставляя (10) и (12) в (6) и дифференцируя затем по τ, находим преобразование

$$\xi^a = \Phi^a_b u^b, \quad a = 0, 1, 2, 3. \quad (14)$$

однородных координат точки $\mathbf{a}$.

Группа преобразований (14) называется проективной. Она определяет геометрию проективного пространства мировых скоростей.

Через две проективные точки $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ проходит единственная проективная прямая. В аффинной и эквиаффинной картах она задается уравнениями

$$\xi^a = \lambda\xi^a_1 + \mu\xi^a_2, \quad a = 0, 1, 2, 3, \quad (15)$$

где λ и μ — однородные параметры точки, лежащей на этой прямой. В привилегированной карте эта же прямая задается уравнениями

$$u^a = \lambda u^a_1 + \mu u^a_2, \quad a = 0, 1, 2, 3. \quad (16)$$

Возьмем еще две точки $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_2$ на этой прямой. Их однородные координаты в аффинной и эквиаффинной картах таковы:

$$\mathbf{b}_1 : \lambda_1 \xi_1^a + \mu_1 \xi_2^a; \qquad \mathbf{b}_2 : \lambda_2 \xi_1^a + \mu_2 \xi_2^a. \tag{17}$$

Их однородные координаты в привилегированной карте аналогичны:

$$\mathbf{b}_1 : \lambda_1 u_1^a + \mu_1 u_2^a; \qquad \mathbf{b}_2 : \lambda_2 u_1^a + \mu_2 u_2^a. \tag{18}$$

Ангармоническим отношением четырех точек, лежащих на одной проективной прямой, называется отношение

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) = \frac{\mu_1}{\lambda_1} : \frac{\mu_2}{\lambda_2}. \tag{19}$$

Точки образуют гармоническую четверку, если их ангармоническое отношение равно -1. Проективное отношение сохраняется при замене (14) u^a на ξ^a. Это основной инвариант группы проективных преобразований (14). Все проективные инварианты выражаются через проективное отношение.

10. ПЕРЕХОД ОТ ОДНОЙ ИСО К ДРУГОЙ

Для установления связи атрибутов движущейся ИСО с атрибутами покоящейся ИСО необходим постулат абсолютности времени, приводящий к старой СТО, или постулат абсолютности скорости света, приводящий к новой СТО.

Постулат абсолютности времени, а точнее, постулат об одинаковом ходе времени во всех инерциальных системах равносилен равенству

$$d\acute{t} = dt \tag{20}$$

дифференциалов атрибутов времени любых двух инерциальных систем. На основании этого постулата переход от покоящейся ИСО (нештрихованной) к движущейся относительно нее вдоль оси X с постоянной скоростью v (штрихованной) ИСО в старой СТО представлен вышеприведенными формулами (1). *«Эти формулы, следуя Ф. Франку, называют теперь преобразованиями Галилея»* [4, с. 27].

Постулат абсолютности скорости света, а точнее, постулат об одинаковой скорости света во всех инерциальных системах равносилен равенствам

$$\frac{\acute{x}^2 + d\acute{y}^2 + d\acute{z}^2}{d\acute{t}^2} = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = c^2, \tag{21}$$

связывающим дифференциалы атрибутов любых двух инерциальных систем. На основании этого постулата переход от покоящейся ИСО (нештрихованной) к движущейся относительно нее вдоль оси X с постоянной скоростью v (штрихованной) ИСО в новой СТО представлен вышеприведенными формулами (2). Следуя А. Пуанкаре, эти формулы называют преобразованиями Лоренца. *«Названия “преобразования Лоренца” и “группа Лоренца” впервые фигурируют именно в этой работе Пуанкаре»* [4, с. 16]. (Здесь Паули ссылается на работу [2] — *авт.*)

В силу линейной однородности преобразований Галилея (1) и Лоренца (2) дифференциалы атрибутов при переходе от покоящейся системы отсчета к движущейся системе преобразуются так же, как и сами атрибуты систем отсчета, т. е. по правилу Галилея

$$d\acute{t} = dt, \quad d\acute{x} = dx - vdt, \quad d\acute{y} = dy, \quad d\acute{z} = dz \tag{22}$$

в старой СТО и по правилу Лоренца

$$cd\acute{t} = \frac{cdt - \beta dx}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad d\acute{x} = \frac{dx - vdt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad d\acute{y} = dy, \quad d\acute{z} = dz \tag{23}$$

в новой СТО.

Пуанкаре указал предельно простой вывод формул преобразования компонент скорости материальной точки при переходе от покоящейся системы отсчета к движущейся. Согласно этому указанию, надо найти отношения дифференциалов атрибутов, входящих в состав формул (22) и (23). В результате получается

$$\begin{aligned} \acute{v}_1 &= \frac{d\acute{x}}{d\acute{t}} = \frac{dx - vdt}{dt} = v_1 - v, \\ \acute{v}_2 &= \frac{d\acute{y}}{d\acute{t}} = \frac{dy}{dt} = v_2, \\ \acute{v}_3 &= \frac{d\acute{z}}{d\acute{t}} = \frac{dz}{dt} = v_3 \end{aligned} \tag{24}$$

в старой СТО и

$$\begin{aligned} \acute{v}_1 &= \frac{d\acute{x}}{d\acute{t}} = \frac{cdx - cvdt}{cdt - \beta dx} = \frac{v_1 - v}{1 - \beta\beta_1}, \\ \acute{v}_2 &= \frac{d\acute{y}}{d\acute{t}} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}\, cdy}{cdt - \beta dx} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}\, v_2}{1 - \beta\beta_1}, \\ \acute{v}_3 &= \frac{d\acute{z}}{d\acute{t}} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}\, cdz}{cdt - \beta dx} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}\, v_3}{1 - \beta\beta_1}, \end{aligned} \tag{25}$$

где $\beta = v/c$, $\beta_1 = v_1/c$, в новой СТО.

11. ОТНОСИТЕЛЬНАЯ СКОРОСТЬ ДВУХ ЧАСТИЦ

На основании преобразований Галилея (24) в старой СТО и преобразований Лоренца (25) в новой СТО решается задача: две частицы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ летят в ИСО со скоростями $\mathbf{v_a}$ и $\mathbf{v_b}$; требуется найти их относительную скорость v_{ab}.

В старой СТО ответ очевиден: согласно (24),

$$v_{ab}^2 = (\mathbf{v_b} - \mathbf{v_a})^2. \tag{26}$$

Это значит, что в старой СТО пространство скоростей евклидово: расстояние s_{ab} между концами векторов $\mathbf{v_a}$ и $\mathbf{v_b}$ равно v_{ab}.

Понятие пространства скоростей Евклида впервые ввел в механику Ньютона Гамильтон в 1846 г. в работе [10].

В новой СТО решение поставленной выше задачи получается на основании (25) в результате ряда вычислений, выполненных в книге [8, с. 65–68]:

$$\frac{v_{ab}^2}{c^2} = \frac{c^2(\mathbf{v_b} - \mathbf{v_a})^2 - [\mathbf{v_a} \times \mathbf{v_b}]^2}{(c^2 - \mathbf{v_a}\mathbf{v_b})^2}. \tag{27}$$

В. А. Фок заметил там, что подстановка $v/c = \tanh s/c$ в формулу (27) определяет расстояние между точками в пространстве Лобачевского в бельтрамиевых координатах, а это и есть то самое пространство скоростей Лобачевского, которое ввел в новую СТО А. П. Котельников в работе [5].

Расстояние s в пространстве скоростей теперь принято называть быстротой.

В 1868 г. Э. Бельтрами в работе [11] ввел на плоскости Лобачевского координаты u, v, принимающие значения из области $u^2 + v^2 < c^2$, где c — константа Лобачевского, в которых расстояние s между точками на плоскости Лобачевского с координатами u_0, v_0 и u, v определяется по формуле

$$\tanh^2 \frac{s}{c} = \frac{c^2[(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2] - (u_0 v - u v_0)^2}{(c^2 - u u_0 - v v_0)^2}. \tag{28}$$

Формула Фока совпадает с формулой Бельтрами, если

$$v_a^1 = u_0, \quad v_a^2 = v_0, \quad v_a^3 = 0; \quad v_b^1 = u, \quad v_b^2 = v, \quad v_b^3 = 0.$$

Наряду с (28), Бельтрами вывел и другую важную формулу:

$$\cosh \frac{s}{c} = \frac{c^2 - u u_0 - v v_0}{\sqrt{(c^2 - u_0 u_0 - v_0 v_0)(c^2 - u u - v v)}}. \tag{29}$$

Если положить

$$\frac{v_{ab}}{c} = \tanh \frac{s}{c}, \quad \frac{v_a}{c} = \tanh \frac{s_1}{c}, \quad \frac{v_b}{c} = \tanh \frac{s_2}{c}, \quad \mathbf{v_a}\mathbf{v_b} = v_a v_b \cos\gamma,$$

то из формулы (27) последует тригонометрическая формула Лобачевского:

$$\cosh \frac{s}{c} = \cosh \frac{s_1}{c} \cosh \frac{s_2}{c} - \sinh \frac{s_1}{c} \sinh \frac{s_2}{c} \cos\gamma. \tag{30}$$

Но проще она следует из формулы (29).

В старой СТО скорость v совпадает с быстротой s, и из формулы (26) следует формула

$$(s)^2 = (s_1)^2 + (s_2)^2 - 2 s_1 s_2 \cos\gamma \tag{31}$$

евклидовой планиметрии.

12. АБСОЛЮТ И МЕТРИКА КЭЛИ

В 1859 г. в работе [12] А. Кэли ввел в проективную геометрию понятие Абсолюта. Абсолют Кэли — это проективная поверхность, на которой заранее выбранная инвариантная квадратичная форма

$$T = \theta_{ab}\xi^a\xi^b \tag{32}$$

от однородных координат проективной точки обращается в нуль. Условие инвариантности

$$\theta_{ab} = \Psi_a^p\theta_{pq}\Psi_b^q \tag{33}$$

этой формы выделяет подгруппу Ψ_a^p в проективной группе Φ_a^p.

Квадратичная форма (32) приводима к каноническому виду

$$T = u^0u^0 + \sum_{a=1}^{n}\epsilon_a u^a u^a, \tag{34}$$

где числа ϵ_a принимают одно из трех значений 1, 0, –1.

С помощью Абсолюта и ангармонического отношения определяется метрика Кэли. Именно об этом говорится в приведенной выше цитате из книги [4].

В 1872 г. Ф. Клейн, опираясь на результаты исследований Кэли, пришел к геометрической так называемой эрлангенской программе в работе [13].

В 1887 г. А. Пуанкаре, опираясь на результаты исследований Кэли, пришел к идее о квадратичных геометриях в работе [14].

13. ПРИНЦИП ДВОЙСТВЕННОСТИ

Уравнение проективной плоскости, проходящей через проективную точку с однородными координатами $\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3$, имеет вид

$$\xi_a\xi^a = 0, \tag{35}$$

где $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ — однородные координаты проективной плоскости.

Уравнение (35) можно прочитать двояко:

1) это есть уравнение множества плоскостей, проходящих через точку с однородными координатами $\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3$;

2) это есть уравнение множества точек, лежащих на плоскости с однородными координатами $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$.

Если сделать пару преобразований

$$\eta_s = \xi_b\tilde{\Phi}_s^b, \quad \eta^s = \Phi_a^s\xi^a \tag{36}$$

и положить

$$\tilde{\Phi}_s^b\Phi_a^s = \delta_a^b, \tag{37}$$

то получится равенство $\eta_s\eta^s = \xi_a\xi^a$, и уравнение (35) сохранится.

Этот результат истолковывается следующим образом: плоскости проективного пространства точек сами образуют проективное пространство и оба эти пространства равноправны. Точки одного пространства являются плоскостями другого. Все теоремы проективной геометрии сохраняются при замене (точка $\Leftrightarrow$ плоскость). В этом суть принципа двойственности в проективной геометрии.

14. АБСОЛЮТНЫЙ ПОЛЯРИТЕТ, ПОЛЮС И ПОЛЯРА

Квадратичная форма (32) задает Абсолют Кэли $T = 0$. Точке с координатами ξ^b Абсолют ставит в соответствие плоскость с координатами

$$\xi_a = \theta_{ab}\xi^b, \tag{38}$$

если только не все суммы (38) вместе равны нулю. Такое соответствие называют абсолютным поляритетом, а пару (точку и плоскость), поставленную в такое соответствие, называют полюсом и полярой.

Подробней с понятиями проективной геометрии можно познакомиться по книге [15].

15. АФФИННОЕ ПРОСТРАНСТВО МИРОВЫХ СКОРОСТЕЙ

Постулат (20) абсолютности времени означает, что линейная форма

$$\Theta = \theta_a\xi^a = u^0 \tag{39}$$

инвариантна. Условие инвариантности

$$\theta_a = \Psi_a^p\theta_a \tag{40}$$

линейной формы (39) задает в проективной группе Φ_a^p подгруппу Ψ_a^p преобразований

$$\acute{u}^0 = u^0, \quad \acute{\xi}^a = \Psi_0^\alpha u^0 + \Psi_\beta^\alpha\xi^\beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3. \tag{41}$$

В данном случае квадратичная форма (32) факторизуется:

$$T = \Theta\Theta, \qquad \theta_{ab} = \theta_a\theta_b. \tag{42}$$

Следовательно, в старой СТО уравнение $T = 0$ сводится к уравнению

$$\Theta = \theta_a\xi^a = u^0 = 0, \tag{43}$$

и Абсолют Кэли является проективной плоскостью. На этой плоскости лежат мировые скорости тахионов. В старой СТО тахионы это, так сказать, частицы с нулевой массой.

Мировые скорости обыкновенных частиц, т. е. частиц с массой $m > 0$, в старой СТО удовлетворяют неравенству $\Theta \neq 0$. Для них в старой СТО можно положить

$$\Theta = \theta_a\xi^a = u^0 = 1, \tag{44}$$

что мы и сделаем.

Согласно (41), в старой СТО плоскость мировых скоростей тахионов проективная. В ней действует группа преобразований

$$\acute{\xi}^\alpha = \Psi_\beta^\alpha\xi^\beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3. \tag{45}$$

Пространство же мировых скоростей обыкновенных частиц аффинное. В нем действует группа преобразований

$$\acute{v}^\alpha = \Psi_0^\alpha + \Psi_\beta^\alpha v^\beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3. \tag{46}$$

Отвлечемся от спорных объектов — тахионов и сосредоточимся на обыкновенных частицах с массой $m > 0$. Мировая скорость частицы $\mathbf{a}$ представляется 4-вектором $(1, v_a^1, v_a^2, v_a^3)$, где v_a^1, v_a^2, v_a^3 — аффинные координаты скорости частицы. Относительная скорость частиц $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ равна

$$(1, v_b^1, v_b^2, v_b^3) - (1, v_a^1, v_a^2, v_a^3) = (0, v_b^1 - v_a^1, v_b^2 - v_a^2, v_b^3 - v_a^3). \tag{47}$$

Скорость частицы $\mathbf{a}$ в ИСО с мировой скоростью $\mathbf{o}$ равна 4-вектору

$$(1, v_a^1, v_a^2, v_a^3) - (1, v_o^1, v_o^2, v_o^3) = (0, v_a^1 - v_o^1, v_a^2 - v_o^2, v_a^3 - v_o^3). \tag{48}$$

Эта разность представляет вектор $\mathbf{v}_{oa}$ скорости частицы $\mathbf{a}$ в указанной ИСО.

4-импульс частицы равен $\mathbf{p} = m(1, v_a^1, v_a^2, v_a^3)$. Согласно законам механики Ньютона, масса частицы не зависит от времени и первая производная по времени от импульса частицы равна приложенной к частице силе, так что

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt} m(1, v^1, v^2, v^3) = m\mathbf{j} = m(0, j^1, j^2, j^3) = \mathbf{f} = (0, f^1, f^2, f^3), \tag{49}$$

где $\mathbf{j}$ — 4-вектор ускорения, $\mathbf{f}$ — 4-вектор силы.

16. ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО МИРОВЫХ СКОРОСТЕЙ

В аффинное пространство проективным путем можно ввести группу подобных преобразований, а в эквиаффинное пространство таким же путем можно ввести ортогональную группу. Аффинное пространство становится эквиаффинным, если на матрицу преобразований Ψ_α^β наложить условие $\mathrm{Det}\,(\Psi_\alpha^\beta) = 1$.

Чтобы в эквиаффинном пространстве мировых скоростей обыкновенных частиц в старой СТО задать квадрат v_{oa}^2 длины относительной скорости $\mathbf{v}_{oa}$, необходимо и достаточно задать инвариантную квадратичную форму

$$H = h^{ab}\xi_a\xi_b = h^{\alpha\beta}u_\alpha u_\beta, \tag{50}$$

удовлетворяющую условию

$$h^{ab}\theta_b = 0 \tag{51}$$

и приводящуюся к каноническому виду

$$H = h^{ab} = h^{\alpha\beta}u_\alpha u_\beta = (u_1)^2 + (u_2)^2 + (u_3)^2. \tag{52}$$

Уравнение $H = 0$ задает Абсолют Кэли второго рода. В результате в проективную плоскость $\Theta = 0$ вводится геометрия Римана (в узком смысле), а в мир событий, наряду с метрикой (20), вводится сопряженная с ней кометрика

$$\partial_{\acute{x}}\partial_{\acute{x}} + \partial_{\acute{y}}\partial_{\acute{y}} + \partial_{\acute{z}}\partial_{\acute{z}} = \partial_x\partial_x + \partial_y\partial_y + \partial_z\partial_z, \tag{53}$$

где $\partial_x = \dfrac{\partial}{\partial x}$ и т. д., а стало быть, и геометрия Галилея. Геометрические объекты (20) и (53) рассмотрены в работе [16].

17. ПРОСТРАНСТВО СКОРОСТЕЙ ЛОБАЧЕВСКОГО

Принимая во внимание (13) и (21), постулат абсолютности скорости света запишем в виде равенства

$$u^1u^1 + u^2u^2 + u^3u^3 - c^2u^0u^0 = 0. \tag{54}$$

В результате этого получилось уравнение $T = 0$ Абсолюта Кэли в проективном пространстве мировых скоростей, задаваемого квадратичной формой

$$T = u^0u^0 - \frac{u^1u^1 + u^2u^2 + u^3u^3}{c^2}. \tag{55}$$

Эта форма инвариантна относительно той проективной подгруппы, которая изоморфна группе линейных однородных преобразований Лоренца.

Абсолют (54) овальный. Он разбивает мировые скорости на три класса: лежащих внутри Абсолюта (для них $T > 0$), лежащих на Абсолюте (для них $T = 0$) и лежащих вне абсолюта (для них $T < 0$). Первые относятся к обыкновенным частицам с массой $m > 0$, вторые — к частицам с массой $m = 0$ (например, к фотонам), третьи — к тахионам. Масса тахиона в новой СТО мнимая.

Если $T > 0$, то мировая скорость $\mathbf{o}$ представляется аналитически 4-скоростью $U = (u^0, u^1, u^2, u^3)$, где

$$u^0 = \sqrt{1 + \frac{u^1u^1 + u^2u^2 + u^3u^3}{c^2}}. \tag{56}$$

В частности, мировая скорость $\mathbf{o}_0$ покоящейся инерциальной системы представляется 4-скоростью $U_0 = (1, 0, 0, 0)$, а компоненты 4-скорости движущейся инерциальной системы представляются в виде

$$u^0 = \cosh\frac{s}{c},\ \frac{u^1}{c} = \sinh\frac{s}{c}\sin\theta\cos\varphi,\ \frac{u^2}{c} = \sinh\frac{s}{c}\sin\theta\sin\varphi,\ \frac{u^3}{c} = \sinh\frac{s}{c}\cos\theta. \tag{57}$$

В работе [17] Ф. Клейн, опираясь на работу Кэли [12], доказал, что группа Лоренца изоморфна группе изометрий пространства Лобачевского.

Однако в то время еще не было ясно, *«где же именно находится то пространство Лобачевского, которое играет такую выдающуюся роль в принципе относительности?»* [5, с. 40]. Котельников ответил на это тем, что ввел в теоретическую физику понятие проективного пространства мировых скоростей и доказал: именно та часть этого пространства, которая находится внутри Абсолюта (54), и есть то самое пространство Лобачевского, что лежит в основаниях новой СТО. Этот ответ может быть сформулирован кратко как следующая

Теорема. *Пространство инерциальных систем в новой СТО есть пространство Лобачевского с характерной константой, равной скорости света с.*

Доказательство. *Докажем теорему, следуя алгоритму Кэли.*

В новой СТО инерциальная система геометрически представляется своей мировой скоростью — точкой $\mathbf{o}$, лежащей внутри Абсолюта (54), и аналитически представляется своей 4-скоростью U, для которой верны равенства (56) и (57).

Следуя алгоритму Кэли, положим, что относительная быстрота s_{12} двух инерциальных систем, представленных мировыми скоростями $\mathbf{o}_1$ и $\mathbf{o}_2$, равна длине

$$s_{12} = \frac{c}{2}\ln(\mathbf{o}_1, \mathbf{o}_2, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) \tag{58}$$

отрезка $\mathbf{o}_1\mathbf{o}_2$. Здесь в ангармоническое отношение $(\mathbf{o}_1, \mathbf{o}_2, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ входят точки $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$, по которым проективная прямая $U = \lambda U_1 + \mu U_2$, проходящая через точки $\mathbf{o}_1$ и $\mathbf{o}_2$, пересекает Абсолют (54). Точки $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ определяются по корням квадратного уравнения

$$T = (\lambda U_1 + \mu U_2)^2 = \lambda^2 + 2\lambda\mu T_{12} + \mu^2 = 0, \tag{59}$$

где $T_{12} = (U_1, U_2)$ есть скалярное произведение 4-векторов U_1 и U_2. По определению (19) отсюда находим входящее в (58) ангармоническое отношение

$$(\mathbf{o}_1, \mathbf{o}_2, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \frac{T_{12} + \sqrt{(T_{12})^2 - 1}}{T_{12} - \sqrt{(T_{12})^2 - 1}} = (T_{12} + \sqrt{(T_{12})^2 - 1}\,)^2. \tag{60}$$

Следовательно,

$$\exp\frac{s_{12}}{c} = T_{12} + \sqrt{(T_{12})^2 - 1}\,, \tag{61}$$

$$\cosh\frac{s_{12}}{c} = T_{12} = (U_1, U_2) = u_1^0 u_2^0 - \frac{u_a^1 u_2^1 + u_1^2 u_2^2 + u_1^3 u_2^3}{c^2}\,. \tag{62}$$

Подставляя (57) в (62), получаем формулу

$$\cosh\frac{s_{12}}{c} = \cosh\frac{s_{12}}{c}\cosh\frac{s_{12}}{c} - \sinh\frac{s_{12}}{c}\sinh\frac{s_{12}}{c}\cos\Gamma_{102} \tag{63}$$

$$\cos\Gamma_{102} = \cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

для треугольника $\mathbf{o}_1\mathbf{o}_0\mathbf{o}_2$ в пространстве инерциальных систем. Но это есть тригонометрическая формула Лобачевского. Следовательно, теорема доказана.

Заодно доказано, что и пространство скоростей частицы с массой $m > 0$ есть пространство Лобачевского с характерной константой, равной скорости света.

Примечание. В конце 60-х гг. XIX в. Карл Вейерштрасс вел в Берлинском университете семинар по геометрии Лобачевского. Тогда он предложил однородные координаты в пространстве Лобачевского, связанные условием (56), а также и представленные через сферические координаты s, θ, φ в виде (57). Их называют *вейерштрассовыми координатами* [15, с. 88; 28, с. 213].

18. ГЛАВНЫЕ ВЫВОДЫ ИЗ НАСТОЯЩЕГО ОБЗОРА

В старой СТО пространство инерциальных систем является пространством Евклида.

В новой СТО пространство инерциальных систем является пространством Лобачевского.

В абсолютной части СТО в пространстве инерциальных систем справедлива абсолютная геометрия.

Инерциальная система как элемент множества, называемого пространством инерциальных систем, представляется своей мировой скоростью $\mathbf{o}$. ИСО представляется ортонормированным репером $\mathbf{o}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ в том же пространстве.

Мировая скорость $\mathbf{o}$ инерциальной системы лежит вне плоского Абсолюта $\Theta = 0$ в старой СТО и внутри овального Абсолюта $T = 0$ в новой СТО.

Теперь о терминологии.

Термин *«неевклидова геометрия»* впервые появился в письме [18] Гаусса к Тауринусу от 8 ноября 1824 г. Он означал (неевклидова геометрия) = (абсолютная геометрия + отрицание пятого постулата Евклида), а не просто *неевклидова геометрия.* Например, сферическую геометрию Гаусс не называл неевклидовой, а принимал ее за частный случай планиметрии переменной кривизны, над созданием которой он в то время работал, исследуя геометрию кривых поверхностей в евклидовом пространстве. См. об этом [19, 20].

Вскоре после того, как Лобачевский создал неевклидову (в смысле Гаусса) геометрию, было сделано и разработано много выдающихся геометрических открытий. Назову из них некоторые.

Гауссом была создана планиметрия произвольной кривизны.

Трудом многих геометров была создана проективная геометрия. На проективной прямой каждая из тройки точек лежит между двумя другими.

Кэли ввел понятие Абсолюта и определил расстояние через ангармоническое отношение четырех точек, из которых две лежат на Абсолюте. Особое внимание он обратил на метрику положительной постоянной кривизны, регулярную всюду на проективной плоскости.

Независимо от Кэли Риман построил на проективной плоскости геометрию с такой метрикой. Ее называют римановой геометрией в узком смысле.

Риманом была создана геометрия n-мерного пространства произвольной кривизны, совпадающая с планиметрией Гаусса при $n = 2$.

Финслером была разработана геометрия, намеченная Риманом.

Трудом многих геометров была разработана геометрия аффинной связности.

Клейном была открыта геометрия группы преобразований множества точек.

Вагнером была открыта геометрия пространства с ареальной метрикой.

В n-мерном проективном пространстве было открыто 3^n геометрий, каждая из которых задается Абсолютом Кэли.

Из всех этих неевклидовых (в общем смысле) геометрий неевклидовыми были названы только кэлеровы геометрии, что нелогично.

Это нелогично, с одной стороны, потому, что нельзя исключать некэлеровы геометрии из числа неевклидовых. Это нелогично, с другой стороны, потому, что нельзя включать геометрию Евклида в число неевклидовых, хотя она и принадлежит к числу кэлеровых.

Следовательно, термин *«неевклидовы геометрии»* устарел, и для кэлеровых геометрий надо подобрать более подходящее название. По существу, их надо называть *субпроективными*. Действительно, всякая кэлерова геометрия принадлежит к числу клейновых геометрий, так как задается подгруппой проективных преобразований, сохраняющих Абсолют.

Принимая этот термин, сформулируем общий результат настоящего обзора следующим образом.

В старой СТО в мире событий действует субпроективная геометрия Галилея, а в пространстве инерциальных систем действует субпроективная геометрия Евклида.

В новой СТО в мире событий действует субпроективная геометрия Минковского, а в пространстве инерциальных систем действует субпроективная геометрия Лобачевского.

Этот краткий обзор написан на основе одиннадцати работ [21–25, 9, 26, 16, 19, 20, 27] автора. В этой ссылке работы упорядочены хронологически.

В заключение автор выражает глубокую благодарность доктору физико-математических наук Н. С. Шавохиной за обсуждение работы и ряд ценных замечаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lorenz H. A.* Electromagnetic Phenomena in System Moving with any Velocity Smaller that of Light // Amst. Proc. 1904. V. 6. P. 809; V. 12. P. 986.

2. *Poincare H.* Sur la dynamique de l'electron // Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris). 1905. V. 140. P. 1504; Sur la dynamique de l'electron // Rend. Pal. 1906. V. 21. P. 129.

3. *Einstein A.* Zur Elektrodynamik bewegter Korper // Ann. Phys. 1905. Bd. 17. S. 891.

4. *Паули В.* Теория относительности. М.: Наука, 1991. 328 с.

5. *Котельников А. П.* Принцип относительности и геометрия Лобачевского (Москва, 1923) // In memoriam N. I. Lobachevskii: Сб. Казань, 1927. Т. 2. С. 37–66.

6. *Широков П. А.* Н. И. Лобачевский как творец новой геометрической системы (К 150-летию со дня его рождения) // Природа. 1943. № 6. С. 51–59; Избранные работы по геометрии. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1966. С. 419–428.

7. *Розенфельд Б. А.* Александр Петрович Котельников // Историко-математические исследования. М.: ГИТТЛ, 1956. Вып. IX. С. 317.

8. *Фок В. А.* Теория пространства, времени и тяготения. М.: ГИТТЛ, 1955. 505 с.

9. *Черников Н. А.* Геометрия Лобачевского как физическая наука // Сб. пленарных докладов на Всесоюзн. научн. конф. по неевклидовой геометрии «150 лет геометрии Лобачевского». М.: ВИНИТИ, 1977. С. 146–153.

10. *Hamilton W. R.* The hodograph body. The Newtonian law of attraction may be characterized as being the Law of the Circular Hodograph (Dec. 14, 1846) // Proc. Irish Acad. 1847. V. 3. P. 344–353.

11. *Бельтрами Э.* Опыт интерпретации неевклидовой геометрии // Основания геометрии: Сб. классических работ по геометрии Лобачевского и развитие ее идей. М.: ГИТТЛ, 1956. С. 180–212.

12. *Кэли А.* Шестой мемуар о формах (1859) // Основания геометрии: Сб. классических работ по геометрии Лобачевского и развитию ее идей. М.: ГИТТЛ, 1956. С. 222–252.

13. *Клейн Ф.* Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований («Эрлагенская программа») (1872) // Сб. [12]. С. 399–434.

14. *Пуанкаре А.* Об основных гипотезах геометрии (1887) // Сб. [12]. С. 388–398.

15. *Норден А. П.* Пространства аффинной связности. М.: Наука, 1976. 432 с.

16. *Черников Н. А.* Трудные вопросы теории относительности // ЭЧАЯ. 1987. Т. 18, вып. 5. С. 1000–1034.

17. *Гаусс К. Ф.* Отрывки из писем // Сб. [12]. С. 105–106.

18. *Клейн Ф.* О геометрических основаниях лоренцовой группы // Новые идеи в математике: Сб. СПб., 1914. № 5, вып. 5. С. 144.

19. *Черников Н. А.* Введение геометрии Лобачевского в теорию гравитации // ЭЧАЯ. 1992. Т. 18, вып. 5. С. 1155–1191.

20. *Черников Н. А.* К истории открытия Лобачевским неевклидовой геометрии // Письма в ЭЧАЯ. 2002. № 3[112]. С. 5–18.

21. *Черников Н. А.* Распад частицы и столкновение частиц в образах пространства скоростей // Научн. докл. высш. шк. 1958. № 2. С. 158–161.

22. *Chernikov N. A.* The relativistic gas in the gravitational field // Acta Phys. Polonica. 1963. V. XXIII, No. 5. P. 629–645.

23. *Chernikov N. A.* Equilibrium distribution of the relativistic gas // Acta Phys. Polonica. 1964. V. XXVI, No. 5. P. 1069–1092.

24. *Черников Н. А.* Связь теории относительности с геометрией Лобачевского // Гравитация и теория относительности. Казань, 1965. Вып. 2. С. 9–22.

25. *Черников Н. А.* Геометрия Лобачевского и релятивистская механика // ЭЧАЯ. 1973. Т. 4, вып. 5. С. 773–810.

26. *Черников Н. А.* Введение геометрии Лобачевского в пространство инерциальных систем // Сб. научно-методических статей по теоретической механике. М., 1981. Вып. 11. С. 39–45.

27. *Черников Н. А.* Геометрия Лобачевского объясняет дефект массы, наблюдаемый при распаде частицы // Применение и развитие идей Лобачевского в современной физике: Сб. Дубна: ОИЯИ, 2004. С. 15–26.

28. *Розенфельд Б. А.* История неевклидовой геометрии. М.: Наука, 1976. 414 с.

Получено 12 сентября 2005 г.