Письма в ЭЧАЯ. 2008. Т. 5, №4(146). С. 573–578

НОВЫЙ СПОСОБ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ СТАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

В. И. Журавлев, В. А. Мещеряков

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Предложен способ решения двумерных статических моделей. В отличие от известных способов он явно использует процедуру аналитического продолжения S-матрицы на нефизические листы римановой поверхности.

The method of solution of the two-dimensional static models is suggested. Unlike known methods it obviously uses procedure of analytical continuation of S-matrix to unphysical sheets of the Riemann surface.

PACS: 11.55.FV

ВВЕДЕНИЕ

Доказательство Н. Н. Боголюбовым дисперсионных соотношений для πN-рассеяния на ненулевой угол [1] подвело прочный фундамент под статические модели. Ниже мы будем изучать статические дисперсионные соотношения, сводя их к нелинейной (за счет упругого условия унитарности) краевой задаче. Она состоит из ряда условий на матричные элементы S-матрицы:

$$\begin{aligned}
&\text{а) } S_i \text{ — мероморфные функции в комплексной плоскости } z \\
&\quad\ \text{с разрезами } (-\infty,-1],\ [+1,+\infty),\ i \leqslant N; \\
&\text{б) } S_i^*(z) = S_i(z^*); \\
&\text{в) } |\, S_i(\omega+i0)\,|^2 = 1 \text{ при } \omega \geqslant 1,\ S_i(\omega+i0) = \lim_{\varepsilon\to+0} S_i(\omega+i\varepsilon); \\
&\text{г) } S_i(-z) = \sum_{j=1}^{N} A_{ij} S_j(z).
\end{aligned} \tag{1}$$

Действительные значения переменной z равны ω — полной энергии релятивистской частицы, рассеивающейся на фиксированном центре. Мероморфность функций $S_i(z)$ есть следствие статического предела задачи рассеяния [2]. Упругое условие унитарности (1в) справедливо на правом разрезе плоскости z. На левом разрезе функции $S_i(z)$ определяются условием перекрестной симметрии (1г). Вид матрицы перекрестной симметрии задается группой, относительно которой S-матрица инвариантна.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ S-МАТРИЦЫ НА НЕФИЗИЧЕСКИЕ ЛИСТЫ

Перепишем условия (1) в операторной форме. Для этого определим столбец функций

$$S^0(z) = [S_1(z), S_2(z), \ldots, S_N(z)],$$

где верхний индекс обозначает физический лист римановой поверхности S-матрицы, а квадратные скобки — столбец функций $S_i(z)$. Условия (1а, б, г) относятся к физическому листу, а условие унитарности (1в) может быть продолжено на комплексные значения ω и в покомпонентной форме $S_i^0(z)S_i^1(z) = 1$ определяет значения $S_i^1(z)$ на первом нефизическом листе. Операторная форма условия унитарности (1в) задается нелинейным оператором I по формуле

$$IS(z) = \left[\frac{1}{S_1(z)}, \frac{1}{S_2(z)}, \ldots, \frac{1}{S_N(z)}\right].$$

В результате условия (1) принимают вид

$$\begin{aligned}
&\text{а) } S^0(z) \text{ — столбец мероморфных функций в комплексной плоскости } z \\
&\quad\ \text{с разрезами } (-\infty, -1],\ [+1, +\infty); \\
&\text{б) } S^{0*}(z) = S^0(z^*); \\
&\text{в) } S^1(z) = IS^0(z); \\
&\text{г) } S^0(-z) = AS^0(z).
\end{aligned} \qquad (2)$$

Операторы A и I не коммутируют, и аналитическое продолжение на нефизические листы определим формулой

$$S^p(z) = (IA)^p S^0((-1)^p z), \qquad (3)$$

где p — номер листа римановой поверхности. С помощью определения (3) условия унитарности и перекрестной симметрии продолжаются на нефизические листы

$$IS^p(z) = S^{1-p}(z),\ AS^p(z) = S^{-p}(-z). \qquad (4)$$

Сложность решения задачи (2) определяется размерностью столбца $S^0(z)$ и видом линейного оператора A — матрицы перекрестной симметрии.

Условие унитарности по переменной p — простейшее функциональное уравнение, решение которого можно представить двумя формулами

$$S^p(z) = \mathrm{e}^{g_i(p-1/2,z)} = \frac{G_i(p,z)}{G_i(1-p,z)}, \quad \text{где } g_i(q,z) = -g_i(-q,z), \qquad (5)$$

а $G_i(p,z)$ — целая функция. Целые функции определяются своими нулями, поэтому рассмотрим этот вопрос на примере решаемой модели с двухрядной матрицей перекрестной симметрии.

РАССЕЯНИЕ ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ 1/2 НА ФИКСИРОВАННОМ ЦЕНТРЕ

Пусть фиксированный центр имеет угловой момент l, тогда матрица перекрестной симметрии A равна [3]

$$A = \frac{1}{2l+1}\begin{pmatrix} -1 & 2l+2 \\ 2l & 1 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Условие перекрестной симметрии (2г) позволяет выразить $S^0(z)$ через симметричную $s(z)$ и антисимметричную $a(z)$ функции. Будем рассматривать уравнение (3) на проективной прямой. Тогда можно определить значение аффинной координаты $X^0 = \dfrac{S_1}{S_2} = -\dfrac{l+1}{l}$ и при $z = 0$ вычислить ее значение на p-м листе с помощью уравнения (3):

$$X^p = \frac{p-(l+1)}{p+l}. \tag{7}$$

При получении (7) не было использовано одно из условий унитарности (4). С помощью него определим функцию $S_2 = \varphi_l(p)$, которая, с учетом перекрестной симметрии, определяется из уравнений

$$\frac{\varphi_l(p)}{1+p/l} = -\frac{\varphi_l(-p)}{1-p/l}, \quad \varphi_l(p)\varphi_l(1-p) = 1. \tag{8}$$

Решение уравнений (8) может быть получено с использованием функции G из соотношений (5) и имеет вид

$$\varphi_l(p) = \prod_{n=1}^{l}\frac{p-l/2-(-1)^n[1/2+(l-n)]}{p-l/2+(-1)^n[1/2+(l-n)]}, \tag{9}$$

а уравнения на функцию $g_l(p)$ таковы:

$$g_l(p+1)+g_l(p) = \ln\frac{p+1/2+l}{p+l/2-l}, \quad g_l(p) = -g_l(-p). \tag{10}$$

Задача (10) решалась путем последовательных замен функции $g_l(p)$, уменьшающих значение l и приводящих уравнение на $g_l(p)$ к однородному. Интересно отметить, что она допускает сведение к классической задаче о суммировании функций[1]. Проиллюстрируем этот прием на примере $l = 1$. Проведем замену переменной $g_l(p) = (-1)^p f(p)$. Тогда уравнениями на $f(p)$ будут

$$f(p+1)-f(p) = (-1)^p\ln\frac{p+3/2}{p-1/2}, \quad f(p) = -f(-p). \tag{11}$$

Вычисление $f(p)$ сводится к суммированию функции в правой части разностного уравнения

$$f(p)-f(0) = \sum_{n=1}^{p-1}(-1)^n\ln\frac{n-1/2}{n+3/2}, \quad f(p) = -f(-p). \tag{12}$$

---

[1]На это обратил наше внимание В. И. Иноземцев.

Сумма в формуле для $f(p)$ вычисляется. Разность знаменателя и числителя дроби под знаком логарифма равна 2. Это приводит к тому, что дроби в сумме, отстоящие на два номера, имеют одинаковые знаменатель и числитель, которые в сумме сокращаются. Сокращения имеют место для четных и нечетных n независимо. Поэтому искомая сумма равна

$$\sum_{n=1}^{p-1}(-1)^n \ln\frac{n-1/2}{n+3/2} = \ln\frac{p+1/2}{p-1/2}(-1). \tag{13}$$

Полагая $f(0)=\ln(-1)$, получим результат, следующий из формулы (9) при $l=1$. Для произвольных l действует аналогичный механизм сокращения дробей, отстоящих на $2l$, который и приводит к формуле (9).

ПОЛЮСА МАТРИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ S-МАТРИЦЫ

Формулы (7) и (9) справедливы для $p\in\mathbb{Z}$ и определяют полюса и нули S_1 и S_2. Однако они не являются решением (1), так как в этих условиях S_i — комплексные. При их выводе были использованы все условия (1), кроме одного условия унитарности (1в). В качестве его выберем условие унитарности для X, которое налагает на $p(\omega)$ дополнительное ограничение

$$p(\omega)+p^*(\omega)=\pm 1;\quad \begin{matrix}\omega>+1,\\ \omega<-1.\end{matrix} \tag{14}$$

Линейная неоднородная краевая задача имеет решение [4]

$$p(z)=\frac{1}{\pi}\arcsin z, \tag{15}$$

которое позволяет продолжить формулы (7) и (9) на комплексные значения p, т. е. $p\in\mathbb{C}$.

Представим функцию $\varphi_l(p)$ в виде

$$\varphi_l(p)=\frac{N_l(p)}{D_l(p)}, \tag{16}$$

где $N_l(p)$, $D_l(p)$ — полиномы

$$\begin{aligned} N_l(p) &= \prod_{n=1}^{l}\left(p-\frac{1}{2}-(-1)^n\left[\frac{1}{2}+(l-n)\right]\right),\\ D_l(p) &= \prod_{n=1}^{l}\left(p-\frac{1}{2}+(-1)^n\left[\frac{1}{2}+(l-n)\right]\right). \end{aligned} \tag{17}$$

Будем вычислять $N_l(p)$ для $l\equiv 0(2)$, начиная с $n=l$. Первым сомножителем в $N_l(p)$ будет $p-1$, т. е. $N_l(p)$ всегда имеет корень $+1$. Для следующего значения $n=l-1$ $N_l(p)$ имеет сомножитель $p+1$, т. е. корень -1, расположенный симметрично к первому корню относительно нуля. Для последующей пары значений $n=l-2$, $l-3$ корни

$N_l(p)$ сдвинуты на ± 2 по отношению к предыдущей, т. е. в точках ± 3. Продолжая этот процесс далее, получим, что все корни $N_l(p)$ для $l \equiv 0(2)$ выбираются из множества $\{n_i \in \mathbb{Z} \mid n_i \equiv 1(2), |\, n_i \,|< l\}$. Аналогичные вычисления для $l \equiv 1(2)$ приводят к множеству $\{n_i \in \mathbb{Z} \mid n_i \equiv 0(2), |\, n_i \,|< l\}$. Оба результата могут быть объединены в формуле

$$N_l(p) = \prod_{n_i \in M_l} (p - n_i), \quad M_l = \{n_i \in \mathbb{Z} \mid n_i \equiv (l+1)(2), |\, n_i \,|< l\}. \tag{18}$$

Для вычисления $D_l = \prod\limits_{d_i \in M_l} (p - d_i)$ заметим, что $n_i + d_i = 1$. Отсюда ввиду симметрии множества M_l имеем

$$D_l(p) = \prod_{d_i \in M_l} (p - 1 + n_i) = \prod_{d_i \in M_l} (p - 1 - n_i) = N_l(p-1). \tag{19}$$

Из симметрии множества M_l следуют свойства симметрии полиномов $N_l(p)$, а именно

$$N_l(p) = N_l(-p) \text{ при } l \equiv 0(2), \quad N_l(p) = -N_l(-p) \text{ для } l \equiv 1(2). \tag{20}$$

Действительно множество $M_{l\equiv 0(2)}$ состоит из всех нечетных элементов $\mathbb{Z}$, а множество $M_{l\equiv 1(2)}$ — из всех четных элементов $\mathbb{Z}$, т. е. включает и элемент $p = 0$, который и обеспечивает нечетность полиномов в формулах (20).

Исключая из функций $S_1(p)$, $S_2(p)$ переменную p, легко получить полином, инвариантный относительно операций A и I. Он имеет вид

$$S_2 \prod_{n_i \in M_l} [(S_1(l+1) + lS_2) - (S_2 - S_1)n_i] = \prod_{n_i \in M_l} [(S_2(l+1) + lS_1) - (S_2 - S_1)n_i], \tag{21}$$

степень его на единицу больше мощности множества M_l, $\operatorname{Card} M_{l\equiv 0(1)} = l$, $\operatorname{Card} M_{l\equiv 1(2)} = l + 1$.

Функция $\varphi_l(p)$ (формула (9)) определяется арифметической природой $l \in N$. Последовательные замены $g_l(p)$ в формуле (10) приводят к уменьшению значений l в правой части (10) так, что после l шагов уравнение превращается в однородное, частное решение которого приводит к множителю 1 в (9), а число замен определяет верхний предел в произведении. Формула (5) справедлива и для $l \in R \setminus \{-1/2\}$. В этом случае механизм получения аналога формулы (9) изменяется: верхний предел заменяется на ∞. При этом функция $g_\infty(p)$ удовлетворяет уравнениям

$$g_\infty(p+1) + g_\infty(p) = \ln(-1), \quad g_\infty(p) = -g_\infty(-p). \tag{22}$$

Вместо формулы (9) имеем

$$\begin{gathered} \varphi(p) = \frac{\Gamma\left(-\dfrac{p+l}{2} + 1\right)\Gamma\left(\dfrac{p-l}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{p-1-l}{2} + 1\right)\Gamma\left(-\dfrac{p-1+l}{2}\right)} \psi(p), \\ \psi(p+1)\psi(p) = -1, \quad \psi(1-p)\psi(p) = 1. \end{gathered} \tag{23}$$

Ясно, что в отличие от $\varphi_l(p)$ функция $\varphi(p)$ содержит бесконечное число нулей и полюсов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Двумерные статические модели решались в ряде работ (см. обзор [3]). В отличие от них изложенный способ явно использует процедуру аналитического продолжения функций $S_i(z)$ на нефизические листы римановой поверхности (формула (3)). Другая его особенность состоит в том, что одновременное использование условий (2а, б, г) дает возможность вычислить аффинную координату X при $z = 0$ на проективной прямой (S_1, S_2) и с помощью формулы (7) продолжить ее значение на все листы римановой поверхности. Тем самым строится счетное множество M_l с предельной точкой $X = 1$, которая суть неподвижная точка преобразования (3) при $z = 0$. С помощью M_l можно построить систему окрестностей точки $X = 1$, каждая из которых содержит по крайней мере одну точку M_l, т. е. оно позволяет изучать преобразование (3) в окрестности точки $X = 1$.

Явная зависимость X от номера листа p оправдывает следующую цепочку вложений: $p \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Условие унитарности $X(z)$ определяет вид функции $p(z)$, завершая решение задачи (1).

Проведенный выше анализ матричных элементов S_1 и S_2 S-матрицы двумерной статической модели позволяет прояснить механизм одновременного выполнения унитарности и перекрестной симметрии S-матрицы. Нагляднее всего он демонстрируется таблицей

φ_i	s	a	s/a
$\dfrac{p}{p-1}$	$\dfrac{p^2}{p^2-1}$	$\dfrac{p}{p^2-1}$	$\dfrac{p}{1}$
$\dfrac{p^2-1}{p(p-2)}$	$\dfrac{p^2-1}{p^2-4}$	$\dfrac{(p^2-1)2}{(p^2-4)p}$	$\dfrac{p}{2}$
$\dfrac{(p^2-4)p}{(p^2-1)(p-3)}$	$\dfrac{(p^2-4)p^2}{(p^2-1)(p^2-9)}$	$\dfrac{(p^2-4)3p}{(p^2-1)(p^2-9)}$	$\dfrac{p}{3}$
$\dfrac{(p^2-1)(p^2-9)}{p(p^2-4)(p^2-16)}$	$\dfrac{(p^2-1)(p^2-9)}{(p^2-4)(p^2-16)}$	$\dfrac{(p^2-1)(p^2-9)4}{(p^2-4)(p^2-16)p}$	$\dfrac{p}{4}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dfrac{p}{l}$

Для решения с бесконечным числом нулей (23) $\dfrac{s}{a} = \dfrac{p}{l}$, что является отражением другого механизма решения уравнений (10) в этом случае.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bogoliubov N. N., Medvedev B. V., Polivanov M. K.* Lectures on «Problems of the Theory of Dispersion Relations», reproduced by the Institute of Advanced Study. 1956. Unpublished;
   Боголюбов Н. Н., Медведев Б. В., Поливанов М. К. Вопросы теории дисперсионных соотношений. М.: ГИФМЛ, 1958.
2. *Мещеряков В. А.* // ЖЭТФ. 1966. Т. 51. С. 648.
3. *Журавлев В. И., Мещеряков В. А.* // ЭЧАЯ. 1974. Т. 5. С. 172.
4. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. 3-е изд. М.: Наука, 1977.

Получено 19 июня 2007 г.