

О МЕХАНИЗМЕ ФОРМИРОВАНИЯ ЭКЗОТИЧЕСКОГО АТОМА ЛЕГКИХ ЯДЕР

М. Динейхан^а, С. А. Жаугашева^а, З. Бектасова^б

^аОбъединенный институт ядерных исследований, Дубна

^бКазахский национальный университет им. аль-Фараби, Алма-Ата, Казахстан

В предположении, что экзотическая система, состоящая из адрона, ядра и электрона, которые взаимодействуют между собой кулоновскими парными силами, образует квантово-механическую систему, аналитически определили потенциал взаимодействия между адроном и ядром. Показали, что структура добавочного потенциала зависит как от зарядовой, так и от изотопической структур трехтельной системы. Именно асимметрия как в электрических зарядах, так и в массах составляющих частиц обеспечивает долгое время жизни экзотических систем.

Starting from the supposition that an exotic system is comprised of a hadron, a nucleus and an electron, which interact between each other by Coulomb pair forces, and forms a quantum-mechanical system, the interaction potential between a hadron and a nucleus in an exotic atom is analytically derived. It is shown that the structure of the additional potential depends on the three-body system charge structure as well as on the isotopic one. Just this asymmetry in electric charges and in masses of the particles is responsible for the long lifetime of the exotic systems.

PACS: 11.30Er, 25.43-t, 36.30.10-k, 67.40.kh

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время интенсивно ведутся как экспериментальные, так и теоретические исследования по изучению структуры и механизма формирования экзотических атомов. Впервые был экспериментально обнаружен мюонный экзотический атом [1], а в дальнейшем мюоны стали хорошим средством для изучения свойств ядер, о чем убедительно свидетельствуют обзоры [2] и труды многочисленных конференций [3]. Было достоверно подтверждено существование экзотических атомов с мезонами (μ , π , k , ...) и другими отрицательными барионами. Таким образом, физика экзотических атомов весьма обширна и разнообразна. Данная работа посвящена изучению механизма формирования экзотических атомов, состоящих из ядер легких атомов, электрона e^- и адронов, в частности, антипротона \bar{p} . В последнее время ведутся исследования экзотического атома гелия $He\bar{p}e^-$, состоящего из ядра гелия He^{++} , электрона e^- и антипротона \bar{p} . Это экзотическое состояние было впервые экспериментально обнаружено в лаборатории КЕК [4] и, позднее, в эксперименте ЦЕРН [5].

В теоретических работах, посвященных изучению экзотического атома гелия, с большой точностью, в основном с помощью численных расчетов, были определены энергетический спектр и переходные матричные элементы [6, 7] в рамках модели Кондо [8].

В настоящее время известно, что антипротонный ион гелия является долгоживущим, а антипротонный ион водорода нет. Возникают естественные вопросы: какие механизмы обеспечивают условия существования долгоживущего антипротонного гелия, почему антипротонный ион водорода не является долгоживущим, существуют ли долгоживущие антипротонные атомы других легких ядер. По нашему мнению, в ответах на подобные вопросы существенную роль играют аналитические методы вычисления, т. е. аналитическое определение потенциала взаимодействия между ядрами и адронами, в частности, антипротоном в экзотическом атоме. Мы также считаем, что атомы и экзотические атомы (ЭА) являются квантово-механическими системами, которые взаимодействуют между собой посредством кулоновских сил. Поэтому механизмы формирования этих систем — как атома, так и ЭА — должны определяться единым образом в рамках квантово-механического формализма, а стабильность и метастабильность данной системы определяется соотношениями внутренних параметров как массы, так и зарядов составляющих частиц. Другими словами, из антипротонного гелия при уменьшении массы антипротона до массы электрона должно получиться стабильное состояние атома гелия. В системе $p\bar{p}e^-$ при уменьшении массы антипротона до массы электрона мы должны получить отрицательный ион водорода H^- , а при замене знака электрического заряда антипротона — ион молекулы водорода H_2^+ . Эти стабильные и метастабильные трехтельные кулоновские системы должны описываться единым образом в рамках квантово-механического подхода, а переход от одной системы к другой осуществляется простой заменой внутреннего параметра данной системы.

Целью данной работы является объяснение механизма формирования экзотических атомов и аналитическое определение потенциала взаимодействия между адроном (антипротоном) и легкими ядрами, а также вычисление энергетического спектра ЭА легких ядер в рамках метода осцилляторного представления (ОП) [9].

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕРМА ДВУХ КУЛОНОВСКИХ ЦЕНТРОВ В ОСЦИЛЛЯТОРНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

1.1. Гамильтониан взаимодействия. Рассмотрим трехтельную систему с кулоновским взаимодействием. Пусть m_1, m_2, m_3 — массы, а $Z_1e, -Z_2e, -Z_3e$ — заряды частиц соответственно. Гамильтониан системы записывается в стандартном виде

$$H = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \frac{1}{m_j} \mathbf{P}_j^2 - \frac{Z_1 Z_2 e^2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} - \frac{Z_1 Z_3 e^2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|} + \frac{Z_3 Z_2 e^2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|}. \quad (1.1)$$

Выбирая систему центра масс \mathbf{z} и координаты Якоби $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{x} + \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3} \mathbf{y} + \mathbf{z}; \\ \mathbf{r}_2 &= -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{x} + \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3} \mathbf{y} + \mathbf{z}; \\ \mathbf{r}_3 &= -\frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2 + m_3} \mathbf{y} + \mathbf{z}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

а также проводя некоторые упрощения, из (1.1) для гамильтониана системы получаем

$$H = \frac{1}{2M} \mathbf{P}_x^2 + \frac{1}{2\mu} \mathbf{P}_y^2 - \frac{Z_1 Z_2 e^2}{x} - \frac{Z_1 Z_3 e^2}{|\mathbf{x}M/m_1 + \mathbf{y}|} + \frac{Z_3 Z_2 e^2}{|\mathbf{x}M/m_2 - \mathbf{y}|}. \quad (1.3)$$

Здесь кинетическая энергия полной системы опущена и введены следующие обозначения:

$$M = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}; \quad \mu = \frac{(m_1 + m_2) m_3}{m_1 + m_2 + m_3}. \quad (1.4)$$

Для удобства в дальнейших вычислениях переходим к безразмерным переменным \mathbf{R}, \mathbf{r} :

$$\mathbf{x} = \frac{1}{M e^2} \mathbf{R}; \quad \mathbf{y} = \frac{1}{\sqrt{M\mu} e^2} \mathbf{r}. \quad (1.5)$$

Тогда уравнение Шредингера (УШ) записывается

$$\left[\frac{1}{2} \mathbf{P}_r^2 + \frac{1}{2} \mathbf{P}_R^2 - \frac{Z_1 Z_2}{R} - \frac{Z_1 Z_3 \lambda}{|\mathbf{r} + c_1 \mathbf{R}|} + \frac{Z_3 Z_2 \lambda}{|\mathbf{r} - c_2 \mathbf{R}|} + \frac{U}{2} \right] \Psi(\mathbf{R}, \mathbf{r}) = 0. \quad (1.6)$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\lambda = c_1 + c_2; \quad c_j = \frac{1}{m_j} \sqrt{\frac{m_1 m_2 m_3}{m_1 + m_2 + m_3}}; \quad j = 1, 2. \quad (1.7)$$

Энергия E трехтельной системы параметризована следующим образом:

$$E = -\frac{e^4}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} U, \quad (1.8)$$

где U — безразмерный параметр, определяющий энергию системы.

Задача состоит в определении из УШ (1.6) параметра U и волновой функции (ВФ) системы в рамках метода ОП [9].

1.2. Двухцентровое адиабатическое приближение. Адиабатическое приближение является одним из самых распространенных методов в физике и заключается в приближенном разделении «быстрых» и «медленных» переменных динамической системы. В квантовой механике (КМ) основы адиабатического приближения были заложены Борном и Опенгеймером [10], а затем Борном и Фоком [11] для решения УШ. В данном пункте изложим детали применения двухцентрового приближения для решения УШ в кулоновской трехтельной системе в рамках ОП.

Будем рассматривать трехтельную кулоновскую систему, состоящую из ядра, адрона и электрона. Ядро, антипротон и мезоны являются довольно тяжелыми частицами по сравнению с электроном. Поэтому при определении энергетического спектра и волновой функции данной системы вполне возможно применение двухцентрового адиабатического приближения [12]. В двухцентровом приближении ВФ системы представляется в виде

$$\Psi(\mathbf{R}, \mathbf{r}) = \chi(\mathbf{R}) \Phi(R, \mathbf{r}), \quad (1.9)$$

где $\Phi(R, \mathbf{r})$ — волновая функция внутренней системы, которая обычно определяется как

$$\Phi(R, \mathbf{r}) = \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \tilde{\Phi}_m(R; \rho, z). \quad (1.10)$$

Здесь φ — азимутальный угол, а m — азимутальное квантовое число. С учетом (1.9) и (1.10) в цилиндрической системе координат после некоторых упрощений записывается

$$\left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{m^2}{\rho^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] - \frac{Z_1 Z_3 \lambda}{\sqrt{\rho^2 + z^2 + 2c_1 R z + c_1^2 R^2}} + \frac{Z_2 Z_3 \lambda}{\sqrt{\rho^2 + z^2 - 2c_2 R z + c_2^2 R^2}} \right\} \tilde{\Phi}_m(R; \rho, z) = E_r(R) \tilde{\Phi}_m(R; \rho, z), \quad (1.11)$$

где $E_r(R)$ является собственным значением гамильтониана внутренней системы. В (1.11) переменная R рассматривается как внешний параметр. Стандартное вычисление обычно приводит к вытянутым сфероидальным координатам [13], при этом параметр R определяет фокусное расстояние, а $E_r(R)$ называется термом энергетических уровней. В вытянутых сфероидальных системах координат УШ, представленное в (1.11), допускает разделение переменных и получается два уравнения, которые решаются только численными методами (подробно см. в [13, 14]). В данной работе для определения энергетического термина $E_r(R)$ применим метод ОП.

2. ДВУХЦЕНТРОВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ В ОП

Теперь приступим к вычислению энергетического термина $E_r(R)$ внутренней системы в рамках метода ОП. Для этого проведем замену переменных

$$\rho = 2\sqrt{\rho_1 \rho_2}, \quad z = (\rho_1 - \rho_2) \quad (2.1)$$

и перейдем к параболической системе координат. После необходимых вычислений из (1.11) имеем

$$\left\{ -\frac{1}{2} \left[\rho_1 \frac{\partial^2}{\partial \rho_1^2} + \frac{\partial}{\partial \rho_1} + \rho_2 \frac{\partial^2}{\partial \rho_2^2} + \frac{\partial}{\partial \rho_2} - \frac{m^2}{4\rho_1} - \frac{m^2}{4\rho_2} \right] - (\rho_1 + \rho_2) E_r - \frac{Z_1 Z_3 \lambda (\rho_1 + \rho_2)}{\sqrt{(\rho_1 + \rho_2)^2 + 2c_1 R (\rho_1 - \rho_2) + c_1^2 R^2}} + \frac{Z_2 Z_3 \lambda (\rho_1 + \rho_2)}{\sqrt{(\rho_1 + \rho_2)^2 - 2c_2 R (\rho_1 - \rho_2) + c_2^2 R^2}} \right\} \tilde{\Phi}_m(r; \rho_1, \rho_2) = 0. \quad (2.2)$$

Для определения энергетического термина $E_r(R)$ из (2.1) применим метод ОП. Перед тем как определить энергетический спектр и волновую функцию из УШ (2.1) с помощью метода ОП [9], уместно напомнить, что этот метод основан на идеях и методах квантовой теории скалярного поля. Одним из существенных отличий квантовой теории поля (КТП) от КМ является то, что квантованные поля, представляющие набор бесконечного числа осцилляторов для основного состояния или вакуума, при квантово-полевым взаимодействии сохраняют свою осцилляторную природу. В КМ собственные функции для большинства потенциалов, как правило, отличаются от гауссового поведения осцилляторной волновой функции. Поэтому для применения методов и идеи КТП к решению

квантово-механических задач следует в исходном радиальном УШ провести замену переменных таким образом, чтобы искомая волновая функция на больших расстояниях обладала гауссовым поведением. Затем преобразованное уравнение идентифицируется с радиальным УШ в пространстве с большой размерностью [9]. Отметим, что впервые похожая идея выдвигалась Фоком при решении задачи о спектре атома водорода с помощью трансформации в четырехмерном пространстве импульсов [15].

Следуя Фоку [16], будем считать асимптотическое поведение волновой функции внутренней системы кулоновским. В соответствии с изложенным выше проведем замену переменных следующим образом (детали см. в [9]):

$$\rho_k = q_k^2 \quad \text{и} \quad \tilde{\Phi}_m = q_1^{|m|} q_2^{|m|} \Psi_m(q_1^2, q_2^2), \quad k = 1, 2. \quad (2.3)$$

Используя атомную систему единиц ($\hbar = 1$, $e = 1$, $c = 1$), получим из (2.1) для УШ

$$\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial q_j^2} + \frac{d-1}{q_j} \frac{\partial}{\partial q_j} \right] - \frac{4Z_1 Z_3 \lambda (q_1^2 + q_2^2)}{\sqrt{(q_1^2 + q_2^2)^2 + 2c_1 R (q_1^2 - q_2^2) + c_1^2 R^2}} - \right. \\ \left. - 4E_r (q_1^2 + q_2^2) + \frac{4Z_2 Z_3 \lambda (q_1^2 + q_2^2)}{\sqrt{(q_1^2 + q_2^2)^2 - 2c_2 R (q_1^2 - q_2^2) + c_2^2 R^2}} \right\} \Psi_m(q_1^2, q_2^2) = 0, \quad (2.4)$$

где d — размерность вспомогательного пространства:

$$d = 2 + 2|m|. \quad (2.5)$$

В результате замены переменных мы получили модифицированное уравнение Шредингера в d -мерном вспомогательном пространстве R^d . Из (2.4) и (2.5) следует, что азимутальное квантовое число m вошло в определение размерности пространства d . Данный прием позволяет определить все интересующие нас характеристики, а именно, спектр и волновую функцию, решая модифицированное УШ только для основного состояния в d -мерном вспомогательном пространстве R^d . Волновая функция $\Psi_m(q_1^2, q_2^2)$ основного состояния в R^d зависит только от переменных q_1^2, q_2^2 . Поэтому оператор

$$\frac{\partial^2}{\partial q_k^2} + \frac{d-1}{q_k} \frac{\partial}{\partial q_k} \equiv \Delta_{q_k}, \quad k = 1, 2, \quad (2.6)$$

отождествим с лапласианом Δ_{q_k} во вспомогательном пространстве R^d , который действует на волновую функцию основного состояния, зависящую только от радиуса q_k . Собственное значение гамильтониана модифицированного УШ

$$H \Psi_m(q_1, q_2) = \varepsilon(E_r) \Psi_m(q_1, q_2) \quad (2.7)$$

равно нулю. Поэтому искомое значение энергии определяется уравнением

$$\varepsilon(E_r) = 0. \quad (2.8)$$

Будем рассматривать это соотношение как условие определения энергетического спектра E_r гамильтониана (1.11). Следуя методу ОП [9], представим канонические переменные

через операторы рождения и уничтожения в пространстве R^d :

$$q_j^{(k)} = \frac{a_j^k + a_j^{k+}}{\sqrt{2\omega_k}}; \quad P_j^{(k)} = \sqrt{\frac{\omega_k}{2}} \frac{a_j^k - a_j^{k+}}{i}; \quad (2.9)$$

$$k = 1, 2; \quad j = 1, \dots, d, \quad [a_i^k, a_j^{k+}] = \delta_{i,j},$$

где ω_k — частота осциллятора, которая пока неизвестна. Подставляя (2.9) в (2.4) и упорядочивая по операторам рождения и уничтожения, получаем

$$H = H_0 + \varepsilon_0(E_r) + H_I. \quad (2.10)$$

Здесь H_0 является гамильтонианом двух несвязанных осцилляторов

$$H_0 = \omega_1(a_j^+(1)a_j(1)) + \omega_2(a_j^+(2)a_j(2)), \quad (2.11)$$

а $\varepsilon_0(E_r)$ — энергия основного состояния в нулевом приближении ОП [9], которая имеет вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_0(E_r) = & \frac{d}{4}\omega_1 + \frac{d}{4}\omega_2 - 2\frac{dE_r}{\omega_1} - 2\frac{dE_r}{\omega_2} - 4(\omega_1\omega_2)^{d/2} \times \\ & \times \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{d\beta_1 d\beta_2}{\Gamma^2(d/2)} \left[\frac{Z_1 Z_3 \lambda(\beta_1 \beta_2)^{d/2-1} (\beta_1 + \beta_2)}{\sqrt{(\beta_1 + \beta_2)^2 + 2c_1 R (\beta_1 - \beta_2) + c_1^2 R^2}} - \right. \\ & \left. - \frac{Z_2 Z_3 \lambda(\beta_1 \beta_2)^{d/2-1} (\beta_1 + \beta_2)}{\sqrt{(\beta_1 + \beta_2)^2 - 2c_2 R (\beta_1 - \beta_2) + c_2^2 R^2}} \right] \exp\{-\omega_1 \beta_1 - \omega_2 \beta_2\}. \quad (2.12) \end{aligned}$$

Гамильтониан взаимодействия H_I также представляется в нормальной форме по операторам рождения и уничтожения, причем он не содержит квадратичных слагаемых по каноническим переменным:

$$\begin{aligned} H_I = & -\frac{\partial}{\partial \beta} \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^\infty \frac{d\tau}{\sqrt{\pi}} e^{-\tau^2} \int \left(\frac{d\eta_1}{\sqrt{\pi}}\right)^d \int \left(\frac{d\eta_2}{\sqrt{\pi}}\right)^d e^{-\eta_1^2 - \eta_2^2} 4Z_3 \lambda \times \\ & \times \left[Z_1 \exp\left\{-(c_1 R)^2 t - \eta_1^2 \frac{\mu_1^+}{\omega} - \eta_2^2 \frac{\mu_1^-}{\omega}\right\} F\left(2i\sqrt{\mu_1^+}(\eta_1 q_1); 2i\sqrt{\mu_1^-}(\eta_2 q_2)\right) - \right. \\ & \left. - Z_2 \exp\left\{-(c_2 R)^2 t - \eta_1^2 \frac{\mu_2^-}{\omega} - \eta_2^2 \frac{\mu_2^+}{\omega}\right\} F\left(2i\sqrt{\mu_2^-}(\eta_1 q_1); 2i\sqrt{\mu_2^+}(\eta_2 q_2)\right) \right] \Big|_{\beta=0}, \quad (2.13) \end{aligned}$$

где введены обозначения

$$F(y_1; y_2) =: e_2^{-y_1} :: e_2^{-y_2} : + : e_2^{-y_2} : \left(1 + \frac{1}{2} : y_1^2 : \right) + : e_2^{-y_1} : \left(1 + \frac{1}{2} : y_2^2 : \right);$$

$$\mu_1^\pm = \beta \pm 2Rc_1 t + 2i\sqrt{t}\tau;$$

$$\mu_2^\pm = \beta \pm 2Rc_2 t + 2i\sqrt{t}\tau.$$

Здесь $*$: $*$ является символом нормального упорядочения и мы использовали обозначение $e_2^x = e^x - 1 - x - x^2/2$. Некоторые детали представления гамильтониана в нормальной форме приведены в приложении А.

Вклад гамильтониана взаимодействия H_I рассматривается как малое возмущение. В квантовой теории поля после представления гамильтониана взаимодействия в нормальной форме требование отсутствия в нем полевых операторов второй степени по существу эквивалентно перенормировкам массы и волновой функции [17]. Такая процедура позволяет учесть основной квантовый вклад через перенормировку масс и энергии вакуума. Другими словами, все квадратичные формы полностью включены в гамильтониан свободного осциллятора. Данное требование позволяет сформулировать согласно осцилляторному представлению условия [9]

$$\frac{\partial \varepsilon_0(E)}{\partial \omega_1} = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon_0(E)}{\partial \omega_2} = 0 \quad (2.14)$$

для нахождения частоты ω_1 и ω_2 несвязанных осцилляторов, которые определяют основной квантовый вклад. Таким образом, учитывая (2.12), из уравнений (2.8) и (2.14) мы можем определить энергию E_r внутренней системы как функцию от параметра R .

В ОП первая поправка по гамильтониану взаимодействия тождественно равна нулю, в то время как вторая поправка составляет менее одного процента, и ряд теории возмущений быстро сходится. Эти результаты были проверены для различных видов потенциалов [18, 19], и показана высокая точность нулевого приближения ОП. Поэтому при дальнейших вычислениях мы будем ограничиваться рассмотрением только нулевого приближения ОП.

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАВИСИМОСТИ ТЕРМОВ ДВУХ КУЛОНОВСКИХ ЦЕНТРОВ ОТ R

Приступим к определению зависимости терма двух кулоновских центров от параметра R в нулевом приближении ОП. Учитывая (2.12), из системы уравнений (2.8) и (2.14) определим частоту осциллятора ω_1 и ω_2 , а также энергетический спектр внутренней системы $E_r(R)$ как функцию параметра R . Конечно, в общем случае эти системы аналитически не решаются, поэтому рассмотрим частный случай, когда $R = 0$. Тогда из (2.12) имеем

$$\varepsilon_0(E_r) = \frac{d\omega_1}{4} + \frac{d\omega_2}{4} - \frac{2dE_r}{\omega_1} - \frac{2dE_r}{\omega_2} + 4Z_3\lambda(Z_1 - Z_2). \quad (3.1)$$

В этом случае из (2.14) получаем

$$\omega_1 = \omega_2 = \sqrt{-8E_r}. \quad (3.2)$$

Частоты осцилляторов одинаковы. Рассмотрим другой предельный случай, когда $R = \infty$. Тогда из (2.12) имеем

$$\varepsilon_0(E_r) = \frac{d\omega_1}{4} + \frac{d\omega_2}{4} - \frac{2dE_r}{\omega_1} - \frac{2dE_r}{\omega_2}. \quad (3.3)$$

Таким образом, в пределах $R = 0$ или $R = \infty$ частоты осцилляторов равны, а термы определяются аналитически. Теперь приступим к определению частоты осцилляторов и термов двух кулоновских центров при следующем значении параметра R : $0 < R < \infty$. Вводим новые параметры

$$\omega_+ = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \quad \omega_- = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}, \quad (3.4)$$

и эти параметры также зависят от R . Согласно (3.2) при $R = 0$ и $R = \infty$ параметр ω_- равен нулю, т. е. параметр определяет дипольный характер взаимодействия.

В этих параметрах (3.4) энергетический спектр модифицированного УШ в нулевом приближении для основного состояния ($m = 0$) выражается в следующем виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0(E_r) = \omega_+ - \frac{8E_r\omega_+}{\omega_+^2 - \omega_-^2} - 4(\omega_+^2 - \omega_-^2) \int_0^\infty \int_0^\infty d\beta_1 d\beta_2 \exp\{-\omega_+(\beta_1 + \beta_2) - \\ - \omega_-(\beta_1 - \beta_2)\} \left[\frac{Z_1 Z_3 \lambda (\beta_1 + \beta_2)}{\sqrt{(\beta_1 + \beta_2)^2 + 2c_1 R (\beta_1 - \beta_2) + c_1^2 R^2}} - \right. \\ \left. - \frac{Z_2 Z_3 \lambda (\beta_1 + \beta_2)}{\sqrt{(\beta_1 + \beta_2)^2 - 2c_2 R (\beta_1 - \beta_2) + c_2^2 R^2}} \right]. \quad (3.5) \end{aligned}$$

Для дальнейших вычислений проводим замену переменных

$$\beta_1 = \frac{s+t}{\sqrt{2}}; \quad \beta_2 = \frac{t-s}{\sqrt{2}}; \quad s = xt; \quad (3.6)$$

$$\omega = \omega_+; \quad \gamma = \frac{\omega_-}{\omega_+}; \quad b_j = c_j R; \quad j = 1, 2,$$

и после некоторых упрощений из (3.5) имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon_0(E_r) = \omega - \frac{8E_r}{\omega} \frac{1}{1-\gamma^2} - 2\omega^2 (1-\gamma^2) \times \\ \times \int_0^\infty dt t^2 \int_{-1}^1 dx \left\{ Z_1 b_1^2 e^{-b_1 t \omega (1+x\gamma)} - Z_2 b_2^2 e^{-b_2 t \omega (1-x\gamma)} \right\} \frac{Z_3 \lambda}{\sqrt{1+2xt+t^2}}. \quad (3.7) \end{aligned}$$

Тогда согласно (2.8), (2.14) и (3.7) термы двух кулоновских центров определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} E_r = \min_{\omega, \gamma} \left\{ \frac{\omega^2 (1-\gamma^2)}{8} - \frac{\omega^3 (1-\gamma^2)^2}{4} \times \right. \\ \left. \times \int_0^\infty dt t^2 \int_{-1}^1 dx \left[Z_1 b_1^2 e^{-b_1 t \omega (1+x\gamma)} - Z_2 b_2^2 e^{-b_2 t \omega (1-x\gamma)} \right] \frac{Z_3 \lambda}{\sqrt{1+2xt+t^2}} \right\}. \quad (3.8) \end{aligned}$$

Интеграл в (3.8) находится численно. Однако при $\gamma \ll 1$ его можно вычислить аналитически, проводя разложение по степеням γ . Детали вычисления интегралов в этом приближении представлены в приложении Б. В этом случае для терма E_r из (3.8) получаем

$$E_r = \frac{\omega^2}{8} - \frac{Z_3\omega\lambda}{8} \left[Z_1 J_1^{(0)}(R) - Z_2 J_2^{(0)}(R) \right] - \frac{1}{2} \frac{Z_3\lambda\omega \left[Z_1 J_1^{(1)}(R) + Z_2 J_2^{(1)}(R) \right]}{4 \left[Z_1 J_1^{(0)}(R) - Z_2 J_2^{(0)}(R) \right] - \left[Z_1 J_1^{(2)}(R) - Z_2 J_2^{(2)}(R) \right]}, \quad (3.9)$$

и, как обычно, частота осциллятора определяется из уравнения

$$\omega - 2Z_1 Z_3 \lambda (1 + \omega c_1 R) e^{-\omega c_1 R} + 2Z_2 Z_3 \lambda (1 + \omega c_2 R) e^{-\omega c_2 R} = 0. \quad (3.10)$$

В (3.9) использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned} J_j^{(0)}(R) &= 2 \frac{1 - e^{-\omega b_j}}{\omega b_j} - e^{-\omega b_j}; \quad j = 1, 2; \\ J_j^{(1)}(R) &= 8 \frac{1 - e^{-\omega b_j}}{\omega^2 b_j^2} - 8 \frac{e^{-\omega b_j}}{\omega b_j} - 4 e^{-\omega b_j} - \omega b_j e^{-\omega b_j}; \\ J_j^{(2)}(R) &= 96 \frac{1 - e^{-\omega b_j}}{\omega^3 b_j^3} - 96 \frac{e^{-\omega b_j}}{\omega^2 b_j^2} - 48 \frac{e^{-\omega b_j}}{\omega b_j} + \\ &\quad + 8 \frac{1 - e^{-\omega b_j}}{\omega b_j} - 22 e^{-\omega b_j} - 6 \omega b_j e^{-\omega b_j} - \omega^2 b_j^2 e^{-\omega b_j}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Мы получили аналитические выражения терма двух кулоновских систем. Из выражения (3.11) можно легко установить, что в пределе $R \rightarrow 0$ $J_j^{(0)}$ и $J_j^{(2)}$ стремятся к постоянным, а $J_j^{(1)}(R)$ становится пропорциональным $J_j^{(1)} \sim R$.

Таким образом, вклад последнего слагаемого в (3.9) при $R = 0$ и $R = \infty$ равен нулю, т. е. именно это слагаемое определяет дипольное взаимодействие двух кулоновских систем при данном значении параметра R : $0 < R < \infty$.

Обычно в двухэлектронном атоме дипольное взаимодействие является квадратично-пропорциональным напряженности внешнего поля. Однако из (3.8) и (3.9) видно, что различие масс электрона и адрона (антипротона) в ЭА приводит к дипольному взаимодействию не квадратично-пропорциональному, а линейному, как в атоме водорода. Поэтому радиационные переходы в этих ЭА, связанные с дипольным взаимодействием, более интенсивны, чем в аналогичных атомах.

4. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СПЕКТР СИСТЕМЫ

Учитывая (1.9) и (1.11) и проводя усреднение полного гамильтониана (1.6) по $\Phi(R, \mathbf{r})$ — волновой функции внутренней системы, после простых преобразований имеем

$$\left[\frac{1}{2} \mathbf{P}_R^2 - \frac{Z_1 Z_2}{R} + V(R) + \frac{1}{2} U \right] \chi(R) = 0, \quad (4.1)$$

где использовано обозначение

$$V(R) = E_r(R) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial R} \right)^2. \quad (4.2)$$

Первое слагаемое в (4.2) $E_r(R)$ — потенциал, созданный электрическим полем заряда Z_3 , а второе слагаемое связано с относительным движением частиц 1 и 2. В работе [20] показано, что вклад второго слагаемого по сравнению с первым является на порядок меньше. Таким образом, определение энергетического спектра и ВФ трехтельной системы с кулоновским взаимодействием сводится к вычислению энергетического спектра двухтельной системы с добавочным потенциалом взаимодействия.

Теперь приступим к определению энергетического спектра системы с помощью метода ОП. Проводим замену переменных следующим образом (см. детали в [9]):

$$R = q^{2\alpha}; \quad \chi(R) \Rightarrow q^{2\alpha} \Psi(q^2), \quad (4.3)$$

где параметр α связан с асимптотическим поведением ВФ для данного потенциала. Из (4.1) для модифицированного УШ имеем

$$\left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2}{\partial q^2} + \frac{d-1}{q} \frac{\partial}{\partial q} \right] - 4Z_1 Z_2 \alpha^2 q^{2(\alpha-1)} + \right. \\ \left. + 4\alpha^2 q^{2(2\alpha-1)} V(q^{2\alpha}) + 2U\alpha^2 q^{2(2\alpha-1)} \right\} \Psi(q^2) = 0, \quad (4.4)$$

где d — размерность вспомогательного пространства [9]:

$$d = 2 + 2\alpha + 4\alpha\ell. \quad (4.5)$$

В нулевом приближении ОП параметр U равен

$$U = \max_{\alpha} \left(2Z_1 Z_2 \sigma \frac{\Gamma(2\alpha + 2\alpha\ell)}{\Gamma(3\alpha + 2\alpha\ell)} - \frac{\sigma^2}{4\alpha^2} \frac{\Gamma(2 + \alpha + 2\alpha\ell)}{\Gamma(3\alpha + 2\alpha\ell)} - \right. \\ \left. - \frac{2\sigma^{3+2\ell}}{\alpha} \int_0^{\infty} \frac{dt t^{2+2\ell}}{\Gamma(3\alpha + 2\alpha\ell)} \exp \left\{ -(\sigma t)^{1/\alpha} \right\} w(t) \right), \quad (4.6)$$

где σ определяется из уравнения

$$\sigma - 4\alpha^2 \frac{Z_1 Z_2}{\lambda} \frac{\Gamma(2\alpha + 2\alpha\ell)}{\Gamma(2 + \alpha + 2\alpha\ell)} + 4\sigma^{2+2\ell} \int_0^{\infty} \frac{dt t^{2+2\ell}}{\Gamma(3\alpha + 2\alpha\ell)} \times \\ \times \exp \left\{ -(\sigma t)^{1/\alpha} \right\} \left[3\alpha + 2\alpha\ell - (\sigma t)^{1/\alpha} \right] w(t) = 0. \quad (4.7)$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$w(t) = \frac{\tau^2}{8} - \frac{\tau Z_3}{4} \left[Z_1 \left(2 \frac{1 - e^{-c_1 t \tau}}{c_1 t \tau} - e^{-c_1 t \tau} \right) - Z_2 \left(2 \frac{1 - e^{-c_2 t \tau}}{c_2 t \tau} - e^{-c_2 t \tau} \right) \right], \quad (4.8)$$

а параметр τ определяется из уравнения как функция от t :

$$\tau - 2Z_1Z_3(1 + c_1t\tau)e^{-c_1t\tau} + 2Z_2Z_3(1 + c_2t\tau)e^{-c_2t\tau} = 0. \quad (4.9)$$

Учитывая (4.6)–(4.9), из (1.8) определяем энергетический спектр трехтельной кулоновской системы с орбитальным возбуждением. При вычислении энергетического спектра антипротонного гелия используем следующие значения для массы:

$$m_p = 1836,15m_e; \quad m_{^3\text{He}} = 5495,881m_e; \quad m_{^4\text{He}} = 7294,295m_e;$$

и для зарядов

$$Z_p = -1; \quad Z_{\text{He}} = 2; \quad Z_e = -1.$$

Полученные численные результаты представлены в таблице. В ней также приведены результаты численных вычислений, которые получены в работах [6, 7]. Видно, что наши результаты хорошо согласуются с существующими.

Энергетический уровень антипротонного гелия (в атомных единицах)

ℓ	α	^4He		^3He	
		$-E_{\text{our}}$	$-E_{\text{num}}$	$-E_{\text{our}}$	$-E_{\text{num}}$
31	1,020	3,505	3,50763495	3,343	3,34883211
32	1,025	3,350	3,3537754	3,187	3,207672
33	1,030	3,205	3,2162444	3,046	3,082114
34	1,035	3,078	3,09346687	2,918	2,970
35	1,040	2,955	2,98402099	2,801	
36	1,045	2,843		2,695	
37	1,050	2,742		2,598	
38	1,055	2,6495		2,509	

5. МЕХАНИЗМ ФОРМИРОВАНИЯ ЭА ЛЕГКИХ ЯДЕР

Мы предполагаем, что все характеристики данной системы описываются решением УШ. Если это действительно так, то динамика и свойства системы определяются потенциалом взаимодействия. Поэтому мы изучаем потенциал взаимодействия ЭА легких ядер.

Согласно (4.1) полный потенциал взаимодействия между антипротоном и ядром равен

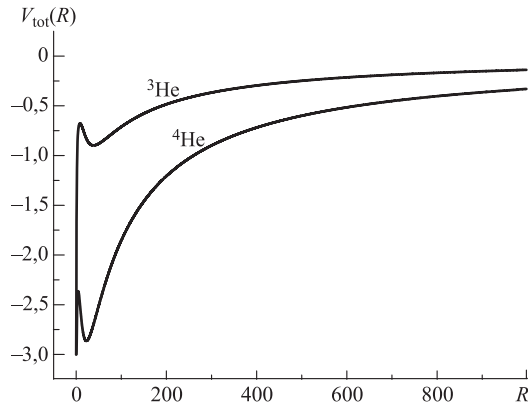
$$V_{\text{tot}}(R) = -\frac{Z_1Z_2}{R} + E_r(R) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial R} \right)^2. \quad (5.1)$$

При дальнейших вычислениях не будем учитывать вклад, связанный с относительным движением частиц. Согласно (3.1) и (3.3) вклад дипольного взаимодействия при $R = 0$ и $R = \infty$ равен нулю, а при значениях $0 < R < \infty$ по сравнению со сферически-симметричными частями потенциала на порядок меньше, поэтому наш полный потенциал

в этом приближении равен

$$V_{\text{tot}}(R) = -\frac{Z_1 Z_2}{R} + \frac{\omega^2}{8} - \frac{Z_3 \omega \lambda}{8} \left[Z_1 \left(2 \frac{1 - e^{-\omega c_1 R}}{\omega c_1 R} - e^{-\omega c_1 R} \right) - Z_2 \left(2 \frac{1 - e^{-\omega c_2 R}}{\omega c_2 R} - e^{-\omega c_2 R} \right) \right], \quad (5.2)$$

а параметр ω определяется из уравнения (3.10) как функция от R . Наш потенциал, представленный в (5.2), описывает трехтелную кулоновскую систему, состоящую из двух тяжелых и одной легкой заряженных частиц. В частности, такими системами являются H_2^+ , $p\bar{p}e^-$. Потенциал V_{tot} описывает как зарядовую, так и изотопическую структуры трехтелной системы. Изотопические зависимости системы в потенциале учтены через параметры c_1 и c_2 , которые представлены в (1.7), а зарядовая зависимость учтена через



Зависимость полного потенциала взаимодействия между антипротоном и ядром гелия от R

параметры Z_j . На рисунке показана зависимость полного потенциала (5.2) между антипротонами и ядром радиуса R для изотопов гелия. Прежде всего изучим зарядовую зависимость потенциала V_{tot} . Для этого рассмотрим системы H_2^+ , $p\bar{p}e^-$, которые различаются только знаками заряда антипротона и протона. Для этих систем $c_1 = c_2$ и $|Z_1| = |Z_2|$. Для системы $p\bar{p}e^-$ добавочные слагаемые полного потенциала (5.2) взаимно уничтожаются, а из (3.10) видно, что частота осциллятора равна нулю: $\omega = 0$. В этом случае потенциал становится чисто кулоновским, а для системы H_2^+ знаки заряда Z_2 изменяются противоположно, поэтому добавочные слагаемые полного потенциала (5.2) суммируются, и в этом случае полученный потенциал становится шире, чем чисто кулоновский. Таким образом, мы получаем два потенциала, различающиеся между собой шириной потенциальной ямы. Ширина этих потенциалов качественно соответствует ширине потенциала, изображенного на рисунке. Поэтому ширина потенциальной ямы для системы $p\bar{p}e^-$ меньше, чем для аналогичных структур ppe^- , и происходит эффект падения на центр [21], поэтому система $p\bar{p}e^-$ становится не (устойчивой) долгоживущей.

Теперь перейдем к изучению изотопической структуры потенциала взаимодействия, представленной в (5.2). Зависимость этого потенциала от радиуса R для изотопов гелия показана на рисунке. Видно, что в результате добавочного потенциала взаимодействия для антипротона появляется ловушка (trap). Когда частицы находятся в ловушке, система, как правило, становится более устойчивой. Потенциал ловушки имеет минимум и максимум, поэтому совокупность спектров связанных состояний является устойчивой, в частности, для антипротонного гелия. Также из рисунка видно, что с возрастанием массы ядра положение минимума потенциала ловушки понижается, т. е., если масса ядра возрастает бесконечно, то минимум потенциала также понижается бесконечно. В этом пределе наша экзотическая система становится как атом, для которого низколежащие энергетиче-

ческие уровни более устойчивы. Обычно низколежащие уровни атома гелия являются стабильными. Положение минимума потенциала ловушки определяется соотношением массы антипротона и ядра.

Теперь оценим, какие энергетические уровни устойчивы. Для этого рассмотрим предельный случай $R \ll 1$. В этом пределе из (5.2) и (3.10) имеем

$$E_r(R) = -\frac{\omega_0^2}{8} + \frac{\omega_0\omega_1}{12}R^2 - \frac{\omega_0\omega_2}{16}R^3, \quad (5.3)$$

где использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \omega_0 &= 2Z_3\lambda(Z_1 - Z_2); \\ \omega_1 &= Z_3\lambda\omega_0^2(Z_1c_1^2 - Z_2c_2^2); \\ \omega_2 &= \frac{2}{3}Z_3\lambda\omega_0^3(Z_1c_1^3 - Z_2c_2^3). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Из (5.3) определяем значения R , соответствующие минимуму потенциала ловушки:

$$R_0 = \frac{8}{9} \frac{\omega_1}{\omega_2}. \quad (5.5)$$

Определим значение потенциальной энергии, соответствующее минимуму:

$$E_r(R_0) = -\frac{\omega_0^2}{8} + 2 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \frac{\omega_0\omega_1^3}{\omega_2^3}. \quad (5.6)$$

Рассмотрим изотоп гелия ${}^3\text{He}\bar{p}e^-$. В этом случае из (5.6) имеем

$$E_r(R_0) = -\frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{7} \left(\frac{14}{15}\right)^4 \right] \frac{4}{3} \frac{m_e}{m_p}. \quad (5.7)$$

Если уровни энергии в этой системе единиц параметризуются стандартным образом:

$$E = -\frac{1}{2} \frac{1}{n^2}, \quad (5.8)$$

то для главного квантового числа n получаем

$$n = \sqrt{\frac{7}{8} \frac{m_p}{m_e}}. \quad (5.9)$$

Таким образом, только высоковозбужденные состояния могут находиться в ловушке.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В предположении, что экзотическая система, состоящая из антипротона, ядра и электрона, которые взаимодействуют между собой кулоновскими парными силами, образует квантово-механическую систему, определили потенциал взаимодействия между антипротоном и ядром.

Показано, что структура добавочного потенциала зависит как от зарядовой, так и от изотопической структур трехтельной системы. Именно асимметрия как в электрических зарядах, так и в массах составляющих частиц обеспечивает долгое время жизни экзотических систем.

На рисунке представлена зависимость полного потенциала взаимодействия между антипротоном и ядром гелия от R . Видно, что потенциал состоит из двух ям, которые различаются между собой по ширине, а переход от одной к другой яме происходит через ловушку.

Узкая часть ямы соответствует двухчастичному кулоновскому потенциалу, а широкая — трехтельному кулоновскому взаимодействию. Из квантово-механического формализма известно, что энергетический спектр частиц, находящихся в яме, равен $E \sim 1/a^2$, где a — ширина ямы.

Таким образом, если трехчастичную систему поместить в чисто двухчастичную кулоновскую узкую яму, то энергетический спектр в яме возрастает квадратично, как указано выше, и происходит эффект падения на центр, т. е. трехтельная система в этой яме становится неустойчивой. Именно такие эффекты наблюдаются в системе $p\bar{p}e^-$, в которой нет добавочного потенциала, поэтому эта система является недолгоживущей.

При уменьшении массы антипротона уровень широкой ямы понижается, а узкая яма исчезает, и трехтельная система переходит в обычную устойчивую атомную систему. Если заменить знак заряда антипротона на противоположный в системе $p\bar{p}e^-$, то получим обычный ион молекулы водорода H_2^+ . В результате замены знака заряда антипротона полученные добавочные потенциалы складываются, потенциал становится шире, а система H_2^+ — устойчивой.

Таким образом, потенциал взаимодействия между антипротоном и ядром в ЭА имеет двойную структуру, т. е. нижняя часть узкая, а верхняя часть является более широкой. Если массу адрона уменьшить до массы электрона, то уровень широкой ямы понижается, а узкая часть ямы исчезает. В этом пределе низколежащий энергетический уровень трехтельной системы существует и система становится устойчивой, как обычный атом.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Важным элементом вычислений в ОП [9] является представление канонических переменных в нормальной форме. Поэтому приведем некоторые детали этого представления для различных потенциалов. Рассмотрим выражение

$$I = \frac{q^2}{\sqrt{q^4 + 2\gamma x q^2 + \gamma^2}} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{\pi t}} e^{-\beta q^2 - t(q^4 + 2\gamma x q^2 + \gamma^2)} \Big|_{\beta=0}, \quad (\text{A.1})$$

где q_j является вектором d -мерного вспомогательного пространства R^d . Используя соотношения

$$e^{-tq^4} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau}{\sqrt{\pi}} e^{-\tau^2 - 2i\sqrt{t}\tau q^2}; \quad (\text{A.2})$$

$$e^{-q^2 \kappa} = \int \left(\frac{d\eta}{\sqrt{\pi}} \right)^d e^{-\eta^2 - 2i\sqrt{\kappa}(\eta q)}; \quad q_j, \eta_j \in R^d,$$

а также учитывая представления (2.9) для q_j и упорядочивая по операторам рождения a_j^+ и уничтожения a_j , из (A.1) получаем

$$I = -\frac{\partial}{\partial \beta} \int_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{\pi t}} \exp\{-\gamma^2 t\} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau}{\sqrt{\pi}} e^{-\tau^2} \times \\ \times \int \left(\frac{d\eta}{\sqrt{\pi}} \right)^d \exp\left\{-\eta^2 \left(1 + \frac{\kappa}{\omega}\right)\right\} : e^{-2i\sqrt{\kappa}(q\eta)} : \Big|_{\beta=0}, \quad (\text{A.3})$$

где

$$\kappa = \beta + 2\gamma xt + 2i\sqrt{t}\tau. \quad (\text{A.4})$$

С помощью этого представления получены выражения для энергии основного состояния $\varepsilon_0(E)$ в (2.12) и для гамильтониана взаимодействия H_I в (2.13).

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

В этом пункте приведем некоторые детали вычисления интегралов:

$$J_j = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{d\beta_1 d\beta_2}{\Gamma^2(d/2)} \frac{(\beta_1 \beta_2)^{d/2-1} (\beta_1 + \beta_2) e^{-\omega_1 \beta_1 - \omega_2 \beta_2}}{\sqrt{b_j^2 - 2b_j(\beta_1 - \beta_2) + (\beta_1 + \beta_2)^2}}. \quad (\text{B.1})$$

Прежде всего проводим замены переменных

$$s = \frac{\beta_1 - \beta_2}{\sqrt{2}}; \quad t = \frac{\beta_1 + \beta_2}{\sqrt{2}}; \quad \beta_1 = \frac{s+t}{\sqrt{2}}; \quad \beta_2 = \frac{t-s}{\sqrt{2}}. \quad (\text{B.2})$$

После этого интеграл (B.1) перепишем в виде

$$J_j = \frac{b_j^d}{2^{d-1}} \int_0^{\infty} dt \int_{-1}^1 dx \frac{(1-x^2)^{d/2-1} t^d e^{-\omega_+ t b_j - \omega_- x t b_j}}{\Gamma^2(d/2) \sqrt{1-2xt+t^2}}, \quad (\text{B.3})$$

где

$$\omega_+ = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}; \quad \omega_- = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}; \quad d = 2 + 2|m|.$$

Рассмотрим простой случай $|m| = 0$. С помощью (3.6) после некоторых простых упрощений имеем

$$J_j = b_j^2 \omega^2 \int_0^{\infty} dt t^2 \int_{-1}^1 dx \frac{e^{-\omega t b_j (1+x\gamma)}}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = b_j^2 \omega^2 \int_0^{\infty} dt t^2 e^{-\omega t b_j} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^k b_j^k \omega^k \gamma^k}{k!} I_k, \quad (\text{B.4})$$

где

$$I_k = \int_{-1}^1 dx \frac{x^k}{\sqrt{1-2xt+t^2}}. \quad (\text{B.5})$$

В низших порядках по параметру γ интегралы (Б.4) вычисляются аналитически:

$$\begin{aligned}
 1 + t - |1 - t| &= \begin{cases} 2t, & |t| \leq 1, \\ 2, & |t| \geq 1; \end{cases} \\
 (1 + t)^3 - |1 - t|^3 &= \begin{cases} 2t(3 + t^2), & |t| \leq 1, \\ 2(1 + 3t^2), & |t| \geq 1; \end{cases} \\
 (1 + t)^5 - |1 - t|^5 &= \begin{cases} 2t(5 + 10t^2 + t^4), & |t| \leq 1, \\ 2(1 + 10t^2 + 5t^4), & |t| \geq 1; \end{cases}
 \end{aligned}$$

и

$$\int_0^1 dt t^n e^{-At} = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial A^n} \int_0^1 dt e^{-At} = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial A^n} \frac{1 - e^{-A}}{A}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (\text{Б.6})$$

С помощью этих соотношений получены выражения (3.9), (3.11) и потенциал взаимодействия (4.2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Conversi N. et al.* // Phys. Rev. 1947. V. 72. P. 399.
2. *Зельдович Я. Б., Герштейн С. С.* // УФН. 1960. Т. 71. С. 581;
Герштейн С. С., Петров Ю. В., Пономарев Л. И. // УФН. 1990. Т. 160. С. 3;
Меньшиков Л. И., Сомов Л. Н. // УФН. 1990. Т. 160. С. 47.
3. Proc. of the Intern. Symp. on Exotic Atoms, Molecules and Muon Catalyzed Fusion (Ascona, Switzerland, July 1998); Hyp. Int. 1999. V. 118/119; Proc. of the Intern. Symp. on Muon Catalyzed Fusion and Physics of Exotic Atoms and Molecules, Dubna, 1995; Hyp. Int. 1996. V. 101/102.
4. *Iwasaki M. et al.* // Phys. Rev. Lett. 1991. V. 67. P. 1246;
Yamazaki T. et al. // Nature. 1993. V. 361. P. 238.
5. *Torii H. A. et al.* // Phys. Rev. A. 1999. V. 59. P. 223.
6. *Korobov V. I.* // Nucl. Phys. A. 2001. V. 689. P. 75, and ref. therein.
7. *Korobov V. I., Shimamura I.* // Phys. Rev. A. 1997. V. 56. P. 4587.
8. *Condo G. T.* // Phys. Lett. 1964. V. 9. P. 65.
9. *Dineykhon M., Efimov G. V.* // Part. Nucl. 1995. V. 26. P. 275;
Dineykhon M. et al. Oscillator Representation in Quantum Physics // Lecture Notes in Physics. V. 26. Berlin: Springer-Verlag, 1995.
10. *Born M., Oppenheimer R.* // Ann. Phys. B. 1927. Bd. 84. S. 457.
11. *Born M., Fock V.* // Z. Phys. B. 1928. Bd. 51. S. 165.
12. *Komarov I. V., Ponomarev L. I., Slavyanov S. Yu.* // Spheroidal and Coulomb Spheroidal Functions. М.: Nauka, 1976;
Vinitiski S. I., Ponomarev L. I. // Sov. J. Part. Nucl. 1982. V. 13. P. 557.

13. *Abramowitz M., Stegun A.* Handbook of Mathematical Functions with Formulas Graphs and Mathematical Tables. Nat. Bureau of Standards Appl. Math. Ser. 1964.
14. *Solov'ev E. A.* // Usp. Fiz. Nauk. 1989. V. 157. P. 437;
Jaffe G. // Z. Phys. 1934. Bd. 87. S. 535;
Beber W. G., Hasse H. R. // Proc. Cambr. Philos. Soc. 1935. V. 31. P. 564;
Bates D. R., Ledsham K., Stewart A. L. // Roy. Soc. London. Ser. A. 1953. V. 246. P. 215.
15. *Fock V. A.* The Principles of Quantum Mechanics. M.: Nauka, 1976; M.: Mir, 1978.
16. *Fok V. A.* // Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Fiz. 1954. V. 18. P. 161.
17. *Fradkin E. S.* // Nucl. Phys. 1963. V. 49. P. 624;
Hayashi K. et al. // Fortschr. Phys. 1967. V. 15. P. 625;
Salam A. Nonpolynomial Lagrangians. Renormalization and Gravity. N. Y.: Gordon and Breach Sci. Publ., 1971.
18. *Dineykhan M.* // Z. Phys. D. 1997. Bd. 41. S. 77;
Dineykhan M., Nazmitdinov R. G. // Yad. Fiz. 1999. V. 62. P. 143.
19. *Dineykhan M., Efimov G. V.* // Rep. Math. Phys. 1995. V. 36. P. 287; Yad. Fiz. 1996. V. 59. P. 862.
20. *Dineykhan M., Zhaugasheva S. A., Nazmitdinov R. G.* // J. Exp. Theor. Phys. 2001. V. 92. P. 1049.
21. *Landau L. D., Lifschitz E. M.* Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory. Oxford: Pergamon, 1977.

Получено 12 октября 2007 г.