Письма в ЭЧАЯ. 2008. Т. 5, №4(146). С. 675–687

ФИЗИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА И КОНДЕНСИРОВАННЫХ СРЕД

ТОЧКИ БИФУРКАЦИИ ВРАЩАЮЩИХСЯ НАМАГНИЧЕННЫХ НЬЮТОНОВСКИХ ПОЛИТРОП С ПОКАЗАТЕЛЕМ, БЛИЗКИМ К ЕДИНИЦЕ

С. А. Михеев, В. П. Цветков

Тверской государственный университет, Тверь, Россия

Впервые доказано существование точек бифуркации ньютоновских вращающихся политроп в интервале значений показателя политропы $0{,}9989 < n \leqslant 1{,}0795$, в которых ответвляются асимметричные относительно оси вращения решения, описывающие распределение плотности. Показано, что в этом интервале значений n параметр быстроты вращения в критических точках ε_k принимает значения $0{,}0442 > \varepsilon_k \geqslant 0$.

This investigation has proved for the first time that there are bifurcations of Newtonian rotating polytropic curves over the range of the polytropic coefficient $0.9989 < n \leqslant 1.0795$, where the solutions asymmetric with respect to the rotation axis, which describe a density distribution, are derived. It has been shown that within this interval, the n parameter of the rotation rapidity takes the values $0.0442 > \varepsilon_k \geqslant 0$ in critical points ε_k.

PACS: 97.10.Kc

ВВЕДЕНИЕ

Конфигурация однородной несжимаемой вращающейся гравитирующей жидкости зависит от одного параметра, определяющего быстроту вращения $\varepsilon = \dfrac{\omega^2}{4\pi G\rho_0}$ (ω — угловая скорость вращения конфигурации, G — гравитационная постоянная, ρ_0 — плотность конфигурации), и точные аналитические решения известны только для эллипсоидальных фигур равновесия [1–3].

Конфигурация сжимаемой вращающейся гравитирующей жидкости уже зависит не только от параметра ε, но и от параметров уравнения состояния гравитирующей материи. Задача об ответвлении асимметричных относительно оси вращения решений уравнения, описывающего вращающиеся гравитирующие конфигурации, при этом существенно усложняется. Возможности найти точные аналитические решения в этом случае нет. Дать ответ о существовании точек бифуркации можно только приближенными методами, и оценку точности вычислений провести достаточно сложно. Поэтому вопрос о точках бифуркации в данном случае открыт.

Порядок асимметрии распределения вещества относительно оси вращения конфигурации удобно определять параметром X. Для несжимаемой гравитирующей вращающейся жидкости X зависит только от параметра быстроты вращения ε, $X = X(\varepsilon)$.

Для намагниченных же конфигураций интенсивность влияния магнитного поля на параметр асимметрии X определяется величиной $\eta_m = \dfrac{B_0^2 \sin^2\alpha}{8\pi^2 G \rho_0^2 a_1^2}$ (B_0 — характерное значение магнитной индукции в центре конфигурации, a_1, a_3 — длины большой и малой полуосей эллипсоида вращения, аппроксимирующего реальную поверхность конфигурации, α — угол наклона магнитной оси к оси вращения). Физически это отношение плотностей магнитной и гравитационной энергии в центре конфигурации. Асимметрия X в этом случае будет зависеть уже от двух параметров ε и η_m.

Впервые уравнение для параметра X в случае намагниченных вращающихся однородных конфигураций получено в [4], где показана важная роль параметра η_m вблизи точек бифуркации в этом уравнении, представляющем кубическую по X параболу.

Намного усложняется ситуация по исследованию поведения параметра асимметрии X для сжимаемых гравитирующих вращающихся намагниченных конфигураций. Параметр X уже зависит от ε, η_m и параметров уравнения состояния $P = P(\rho)$, описывающего зависимость давления от плотности. В самом простом случае политропы с индексом n $X = X(\varepsilon, \eta_m, n)$.

Наиболее известны работы Джинса [5] и Джеймса [6] по исследованию точек бифуркации вращающихся ньютоновских гравитирующих политроп при $\eta_m = 0$. В них проведены оценки максимального значения индекса политропы n_k, выше которого точек бифуркации нет, $n < n_k$. Джинс дает оценку $n_k = 0{,}83$, а Джеймс — $n_k = 0{,}808$. Физической причиной этого в работах [5,6] названо истечение вещества с экватора конфигурации, возникающего при той степени сплюснутости конфигурации, которая необходима для достижения точки бифуркации. Ускорение свободного падения на экваторе g_e будет равно нулю. При большем значении быстроты вращения g_e становится отрицательным, с экватора конфигурации возникает истечение вещества и стационарная конфигурация невозможна. Такой подход восходит к работе Джинса [5].

Аналитического исследования политропных конфигураций вблизи точек бифуркации в этих работах не проводилось, так как при этом нужно проводить вычисления до членов порядка X^3. Исследования проводились на основании лишь линейного приближения.

Необходимо отметить, что в работе Джеймса [6] сделано много приближений и предположений, и, на наш взгляд, точность ее результатов автором сильно завышена. Особенно это касается вычисления g_e, так как эта величина вычисляется на границе конфигурации, а используемые в работе биноминальные степенные ряды вблизи границы сходятся очень медленно. После операции дифференцирования, необходимой для вычисления g_e, точность оценок g_e уже существенно уменьшается. Пренебрегается влиянием границы конфигурации на решение уравнений конфигурации. Достаточно грубым приближением для оценки осенесимметричных членов в уравнениях вращающейся гравитирующей политропы является сделанное в [6] предположение о доминировании в них второй гармоники.

Уравнение гравитирующей вращающейся конфигурации существенно нелинейно зависит от показателя политропы n, и утверждение об отсутствии точек бифуркации при $n > n_k$ по крайней мере безосновательно.

Цель нашей работы — показать, вопреки имеющемуся мнению [3,6], существование точек бифуркации ньютоновских гравитирующих вращающихся политроп со значениями показателя, незначительно превышающими единицу.

В этой области параметр сплюснутости $e = a_3/a_1$ в точках бифуркации уже достаточно близок к единице, а параметр быстроты вращения ε может принимать сколь угодно малые значения. При этом значения g_e с большим запасом становятся отличными от нуля и положительными, что гарантирует стабильность конфигурации.

Этот эффект может значительно влиять на эволюцию угловой скорости медленных пульсаров (ε меньше или порядка 10^{-4}) с уравнением состояния, близким к политропе с показателем $1 < n < 1{,}08$. Из реалистических уравнений состояния к ним наиболее близко уравнение состояния ядерной материи Рейда.

Рассматриваемая задача очень важна для астрофизических приложений. Вращающаяся намагниченная ньютоновская политропа, если пренебрегать релятивистскими эффектами порядка $20\,\%$, может служить хорошей моделью пульсаров, описывающей их основные свойства. Величина параметра асимметрии X определяет интенсивность гравитационного излучения пульсаров [4], поиски которого активно ведутся в настоящее время [7]. Вблизи точек бифуркации значения параметра X и, следовательно, интенсивность гравитационного излучения возрастают на много порядков [4], что существенно сказывается на эволюции периода T. Величина производной периода пульсара $\dot{T}$ в настоящее время у ряда пульсаров измеряется с точностью порядка 10^{-20} и по ней можно судить о вкладе гравитационного излучения, пропорционального значению X^2, в эволюцию периода.

1. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В основу развиваемой нами математической модели вращающихся намагниченных политроп положим, как и в [8], уравнение

$$\frac{1}{2\pi a_1^2}\int\limits_D \tilde{\rho}(\mathbf{r}')\left(\frac{1}{\mathbf{r}'}-\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)dV' - K_0\int\limits_{p(\mathbf{r})}^{1}\frac{dp}{\tilde{\rho}(p)} - \varepsilon\frac{\mathbf{r}_\perp^2}{a_1^2} = \Pi_{(m)}(\mathbf{r}), \tag{1}$$

где $\Pi_{(m)}$ — вклад магнитных натяжений; $\tilde{\rho} = \rho/\rho_0$; ρ — плотность конфигурации; ρ_0 — плотность в центре конфигурации; a_1, a_3 — полуоси сфероида, аппроксимирующего поверхность конфигурации; $p = P/P_0$ — отношение давления к центральному значению давления; $K_0 = \dfrac{P_0}{2\pi G\rho_0^2 a_1^2}$; $\mathbf{r}_\perp = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$; $x_1 = x/a_1$; $x_2 = y/a_1$; $x_3 = x/a_3$; D — область R^3, в которой $\tilde{\rho} \geqslant 0$.

Параметр K_0 является важной характеристикой конфигурации и по порядку величины равен отношению давления к плотности гравитационной энергии в ее центре.

Уравнение (1) при $\Pi_{(m)} = 0$ в литературе [9] часто называют уравнением Ляпунова, который получил выдающиеся результаты при его исследовании.

Уравнение (1) представляет собой интегральное уравнение с подвижной границей в R^3. Эту границу δD будем искать в виде возмущенной эллипсоидальной поверхности [8]:

$$\delta D: \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \sum_{i,j,k}^{L} Z_{ijk}x_1^i x_2^j x_3^k = 1. \tag{2}$$

Полуоси аппроксимирующего сфероида a_1, a_3 и коэффициенты Z_{ijk} находятся из условия минимизации функционала [8]

$$\Lambda = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\delta D} \tilde{\rho}^2 d\Omega, \tag{3}$$

что приводит к системе уравнений

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial Z_{ijk}} = 0, \quad a_1 \frac{\partial \Lambda}{\partial a_1} = 0, \quad a_3 \frac{\partial \Lambda}{\partial a_3} = 0. \tag{4}$$

Система уравнений (1), (4) представляет собой замкнутую систему для нахождения a_1, a_3, Z_{ijk}, $\tilde{\rho}$.

Представим плотность конфигурации $\tilde{\rho}$ в виде полинома степени P

$$\tilde{\rho} = \sum_{a,b,c}^{P} \rho_{abc}\, x_1^a x_2^b x_3^c. \tag{5}$$

Если выбрать P достаточно большим, то с любой степенью точности согласно теореме Стоуна–Вейерштрасса выражение (5) аппроксимирует плотность реальной конфигурации.

Коэффициенты ρ_{abc} и Z_{ijk}, определяющие структуру конфигурации, разобьем на симметричные $\rho_{(ab)c}$, $Z_{(ij)k}$ и антисимметричные $\rho_{[ab]c}$, $Z_{[ij]k}$ части относительно оси вращения и будем искать в виде разложения по малому параметру асимметрии X, подлежащему в дальнейшем определению:

$$\begin{aligned} \rho_{abc} &= \frac{\left(\dfrac{a+b}{2}\right)!}{\left(\dfrac{a}{2}\right)!\left(\dfrac{b}{2}\right)!}\rho_{a+b,c} + \rho_{[ab]c}X + \rho_{1(ab)c}X^2, \\ Z_{ijk} &= \frac{\left(\dfrac{i+j}{2}\right)!}{\left(\dfrac{i}{2}\right)!\left(\dfrac{j}{2}\right)!}Z_{i+j,k} + Z_{[ij]k}X + Z_{1(ij)k}X^2. \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь и далее a, b, c и i, j, k являются четными, а вводимые вновь величины удовлетворяют соотношениям симметрии $\rho_{1(ab)c} = \rho_{1(ba)c}$, $\rho_{[ab]c} = -\rho_{[ba]c}$, $Z_{1(ij)k} = Z_{1(ji)k}$, $Z_{[ij]k} = -Z_{[ji]k}$, а $\rho_{[20]0}$ нормируем на единицу.

Для имеющихся к настоящему времени оценок магнитного поля пульсаров по замедлению периода имеет место оценка $B_0 \sim 10^{10}$–10^{12} Гс. В этом случае $|\Pi_{(m)}| \sim 10^{-12}$–$10^{-9}$ при $\rho_0 = 4 \cdot 10^{14}$ г/см^3. Поэтому имеет смысл учитывать $\Pi_{(m)}$ только при нахождении асимметричных коэффициентов $\rho_{[ab]c}$, $Z_{[ij]k}$.

Аналитическое выражение $\Pi_{(m)}$ выберем в самом простом виде:

$$\Pi_{(m)} = \frac{k}{2}\eta_m(x_1^2 - x_2^2), \tag{7}$$

где k — показатель скорости убывания магнитного поля при удалении от магнитной оси. Для определенности положим $k = 2$.

Для решения уравнения (1) мы должны знать конкретный вид уравнения состояния $P = P(\rho)$. В нашем случае оно предположительно имеет вид политропы с показателем n, близким к единице, $|n-1| \ll 1$. Именно для этих значений n у нас имеют место наиболее интересные результаты по исследованию точек бифуркации ньютоновских вращающихся политроп.

В случае политропы имеем

$$\int\limits_p^1 \frac{dp}{\tilde{\rho}} = (1+n)\tilde{\rho}^{\frac{1}{n}}. \tag{8}$$

Аппроксимируем правую часть (8) многочленом второй степени:

$$(1+n)\tilde{\rho}^{\frac{1}{n}} \cong \delta_0 + \delta_1(\tilde{\rho}-1) + \delta_2(\tilde{\rho}-1)^2. \tag{9}$$

Коэффициенты δ_0, δ_1, δ_2 находятся минимизацией уклонения правой и левой частей (9) в метрике L_2. При этом

$$\begin{aligned} \delta_0 &= \frac{4n(n+1)(n+2)}{(2n+1)(3n+1)}, \\ \delta_1 &= -\frac{4n(n+1)(4n-7)}{(2n+1)(3n+1)}, \\ \delta_2 &= -\frac{20n(n^2-1)}{(2n+1)(3n+1)}. \end{aligned} \tag{10}$$

Погрешность аппроксимации $n = 1{,}04$ составила $4 \cdot 10^{-3}$. Положим $h = n - 1$ и в случае $|h| \ll 1$ из (10) имеем $\delta_0 \cong \delta_1 \cong 2$, $\delta_2 \cong \dfrac{10}{3}h$. Отсюда следует возможность качественного изменения характера решения уравнения (1) справа и слева от точки $n = 1$, так как знак квадратичной по $\tilde{\rho} - 1$ части в (9) при этом изменяется, коэффициент при h в δ_2 будет больше $10/3$.

Представление (9) можно использовать и для реалистических уравнений состояния, учитывающих наличие сильных взаимодействий между нуклонами в нейтронных звездах, выбрав соответствующим образом коэффициенты δ_0, δ_1, δ_2.

2. КРИТЕРИЙ ДЛЯ ТОЧЕК БИФУРКАЦИИ

В нашей работе [8] создан комплекс символьно-численных программ, использование которого для решения (1), (4) позволяет свести задачу вычисления основного параметра X к решению кубического уравнения для X:

$$A(e,n)X + B(e,n)X^3 = \eta_m, \tag{11}$$

где $e = a_3/a_1$, и этот параметр является основной характеристикой сплюснутости поверхности конфигурации вдоль оси вращения и, также как ε, характеризует степень быстроты вращения. У нас e является свободным параметром, а ε вычисляемым: $\varepsilon = \varepsilon(e)$. В работе Джеймса [6], наоборот, значения ε задаются.

Кубический член в (11) существенен вблизи кривой $A(e,n) = 0$, которая определяет множество точек бифуркации $e_k = e_k(n)$ и ее можно назвать уже бифуркационной кривой. Поэтому $B(e,n)$ нам нужно знать лишь в точках $e_k(n)$, т. е. $B_k(n) = B(e_k(n), n)$, что значительно упрощает вычисления.

Решение уравнения (11), переходящее при $\eta_m = 0$ в симметричное решение $X = 0$, может быть представлено с помощью функции $f_M(\lambda) = \left(108 + 12\sqrt{-12\lambda^3 + 81}\right)^{1/3}$, найденной нами в системе символьной математики MAPLE, в виде

$$X(\lambda) = \left(\frac{1}{6} f_M(\lambda) + 2\lambda f_M^{-1}(\lambda)\right) X_k,$$
$$\lambda = -\frac{A(e,n)}{B_k(n) X_k^2}, \quad X_k = \left(\frac{\eta_m}{B_k(n)}\right)^{1/3}. \tag{11а}$$

Вблизи точки бифуркации коэффициент $A(e,n)$ по определению является малым параметром, по степеням которого можно представить разложение решения (11а). В линейном по $A(e,n)$ приближении имеем

$$X = X_k \left(1 - \frac{1}{3}\frac{A(e,n)}{B_k(n) X_k^2}\right). \tag{11б}$$

Отметим, что выражение (11б) справедливо только при $|A(e,n)| \ll \eta_m^{2/3}$.

Как нами уже отмечено, во всех случаях (за исключением $\rho = \rho_0 = \mathrm{const}$) задача о гравитирующих конфигурациях решается приближенно. Проверить выполнение условия гидростатического равновесия во всех точках гравитирующей конфигурации невозможно. Поэтому Джинс [5] ввел условие стабильности конфигурации как неотрицательность радиальной компоненты ускорения свободного падения на экваторе $g_e > 0$. В плоскости экватора имеем

$$g(r, x_3 = 0) = \frac{\partial \Phi(r, x_3 = 0)}{\partial r} - 2\varepsilon r > 0, \tag{12}$$

где $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $\Phi = -\dfrac{1}{2\pi a_1^2} \displaystyle\int_D \frac{\tilde{\rho}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$.

На экваторе $r = r_e$, $\tilde{\rho}(r_e, x_3 = 0) = 0$. Тогда

$$g_e = g(r_e, x_3 = 0) = \frac{\partial \Phi(r_e, x_3 = 0)}{\partial r_e} - 2\varepsilon r_e.$$

Функция $\Phi(r, x_3 = 0)$ определяется нами внутри аппроксимирующего эллипсоида, вне его мы будем использовать ее аналитическое продолжение. При этом пренебрежение гравитационным влиянием масс за пределами аппроксимирующего эллипсоида дает погрешность $\sqrt{\Lambda}(r_e - 1)$.

Из вышеизложенного следует критерий для точек бифуркации равновесных конфигураций:

$$A(e_k, n) = 0, \quad g_e(e_k, n) > 0. \tag{13}$$

3. ОБСУЖДЕНИЕ ЧИСЛЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Дальнейшей нашей основной задачей будет тщательное исследование условий (13) для значений показателя политропы n, близких к единице.

Проведенные нами символьно-численные вычисления функции $A(e, n)$ представлены на рис. 1, 2.

Из рис. 1 видно, что семейство кривых $A(e, n = \mathrm{const})$, $1 \leqslant n \leqslant 1{,}0795$, пересекает ось абсцисс в интервале значений $0{,}575 \leqslant e \leqslant 1$ и определяет множество точек бифуркации по параметру e, в которых $A(e_k, n) = 0$.

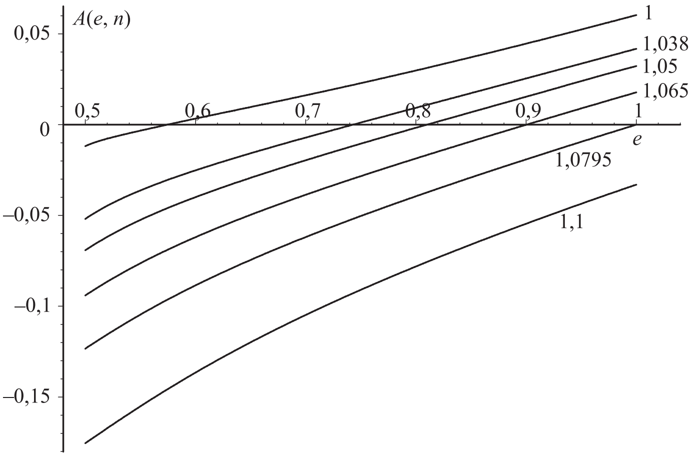

Рис. 1. Зависимость функции $A(e, n)$ от параметра e при фиксированных значениях показателя политропы n

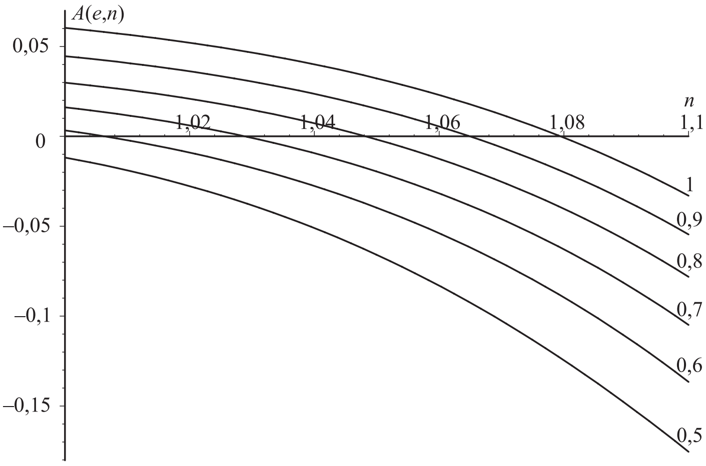

Рис. 2. Зависимость функции $A(e, n)$ от показателя политропы n при фиксированных значениях параметра e

Из рис. 2 следует, что семейство кривых $A(e = \mathrm{const}, n)$, $0{,}575 \leqslant e \leqslant 1$, пересекает ось абсцисс в интервале значений n $1 \leqslant n \leqslant 1{,}0795$ и определяет множество точек бифуркации по параметру n, в которых $A(e_k, n(e_k)) = 0$.

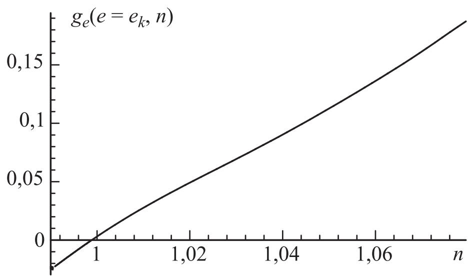

Рис. 3. Зависимость функции $g_e(e = e_k)$ от показателя политропы n

Зависимость $g_e(e_k, n)$ в диапазоне значений n $0{,}99 \leqslant n \leqslant 1{,}0795$ приводится на рис. 3, из которого следует, что $g_e(e_k, n = 0{,}9989) = 0$, $g_e(e_k, n = 1) = 3{,}07 \cdot 10^{-3}$, $g_e(e_k, n = 1{,}0795) = 0{,}187$.

Из проведенных нами оценок видно, что точки бифуркации существуют в интервале значений показателя политропы $0{,}9989 < n \leqslant 1{,}0795$, для которых $A(e_k, n) = 0$ и $g_e(e_k, n) > 0$.

Оцениваемая нами точность выполнения граничного условия в точках бифуркации как $\sqrt{\Lambda}$ при $n = 1$ $(e_k = 0{,}575)$ равна $1{,}17 \cdot 10^{-2}$, расстояние от точек экватора конфигурации до центра в этом случае $r_e = 1{,}0661$, а погрешность аппроксимации в геометрическом подходе оценки погрешности выполнения граничного условия соответственно будет $r_e - 1 = 6{,}61 \cdot 10^{-2}$. В этом случае погрешность выполнения граничного условия будет приводить к погрешности в уравнениях порядка $\sqrt{\Lambda}(r_e - 1) = 7{,}73 \cdot 10^{-4}$. При $n = 1{,}04$ $(e_k = 0{,}756)$ $\sqrt{\Lambda} = 2{,}42 \cdot 10^{-3}$, а $r_e = 1{,}00457$, $\sqrt{\Lambda}(r_e - 1) = 1{,}11 \cdot 10^{-5}$, что указывает на высокую точность аппроксимации поверхности $\tilde{\rho} = 0$, возмущенной эллипсоидальной поверхностью δD, для значений показателя политропы из рассматриваемого промежутка $0{,}9989 < n \leqslant 1{,}0795$.

Наш результат, доказывающий существование точки бифуркации при $n = 1$, на первый взгляд противоречит работе [6]. Но точка $n = 1$ уклоняется от конца интервала $n = 0{,}9989$ на $1{,}1 \cdot 10^{-3}$, и с учетом погрешности вычислений противоречие снимается.

На рис. 4, 5 приведены сечения плоскостью $x_2 = 0$ аппроксимирующих сфероидов δD и найденных поверхностей $\tilde{\rho}(x_1^2 + x_2^2, x_3^2) = 0$ для значений $n = 1$ и $n = 1{,}04$ в точках бифуркации.

Погрешность метода решения уравнения (1) при $n = 1{,}04$ у нас составила $2{,}53 \cdot 10^{-4}$. Левее точки $n = 1{,}04$ погрешность немного убывает, а правее возрастает, но остается такого же порядка.

С такой же степенью точности $\sim 10^{-4}$ функция $e_k(n)$ может быть аппроксимирована многочленом

$$e_k(n) = -190{,}616(n - 1{,}04)^4 + 81{,}611(n - 1{,}04)^3 + 20{,}784(n - 1{,}04)^2 + \\ + 5{,}227(n - 1{,}04) + 0{,}757. \quad (14)$$

Аналогичное представление имеет место и для $\varepsilon_k(n)$:

$$\varepsilon_k(n) = 21{,}727(n - 1{,}04)^4 - 12{,}041(n - 1{,}04)^3 - 4{,}071(n - 1{,}04)^2 - \\ - 0{,}535(n - 1{,}04) + 0{,}0282. \quad (15)$$

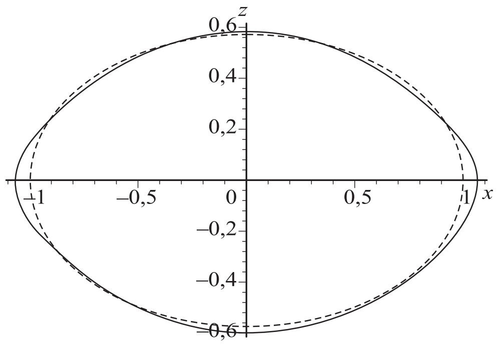

Рис. 4. Расчетная (сплошная линия) и аппроксимирующая (пунктирная линия) эллипсоидальные конфигурации при значениях $n = 1$, $e_k = 0{,}575$. На рисунке $x = x_1$, $z = \dfrac{1}{e_k} x_3$

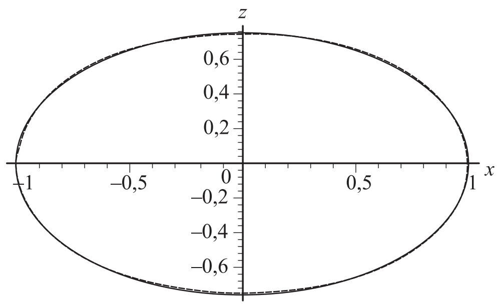

Рис. 5. Расчетная (сплошная линия) и аппроксимирующая (пунктирная линия) эллипсоидальные конфигурации при значениях $n = 1{,}04$, $e_k = 0{,}756$. На рисунке $x = x_1$, $z = \dfrac{1}{e_k} x_3$

Согласно (14) функция $e_k(n)$ монотонно возрастает от $e_k = 0{,}571$ до 1 в интервале $0{,}9989 < n \leqslant 1{,}0795$. В этом интервале значений n $\varepsilon_k(n)$ монотонно убывает от $\varepsilon_k = 0{,}0442$ до 0.

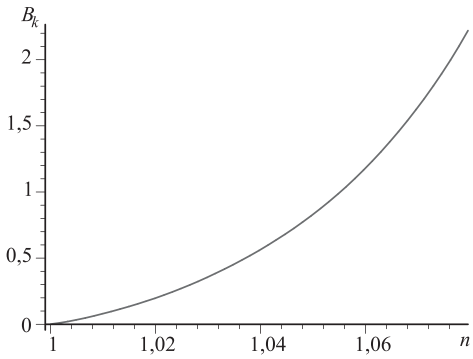

Рис. 6. Зависимость функции B_k от показателя политропы n

Этот результат очень важен для медленно вращающихся ньютоновских политроп. Для любого малого значения угловой скорости ω найдется значение n из интервала $0{,}9989 < n \leqslant 1{,}0795$, для которого $\varepsilon = \varepsilon_k(n)$, $A(e_k, n) = 0$. При этом $X_k(n) = \left(\dfrac{\eta_m}{B(e_k, n)}\right)^{1/3}$. График функции $B_k(n) = B(e_k, n)$ представлен на рис. 6. Функция B_k монотонно растет от $1{,}1057 \cdot 10^{-3}$ $(n = 1)$ до $2{,}2199$ $(n = 1{,}0795)$. Значение параметра асимметрии в точке бифуркации наоборот будет в этом интервале примерно на два порядка уменьшаться. Переход $B_k(n)$ в отрицательную область значений происходит за пределами интересующего нас интервала значений $n < 0{,}9989$.

Из рис. 1 видно, что кривые $A(e, n = \mathrm{const})$, $0{,}9989 < n \leqslant 1{,}0795$, опускаются в сторону отрицательных значений с ростом показателя политропы n. Причем, если при $n = 1$ кривая $A(e, n)$ пересекает ось абсцисс в точке $e_k = 0{,}575$, то при $n = 1{,}0795$ точка пересечения будет в $e_k = 1$. Это соответствует $\varepsilon_k = 0$, т. е. отсутствию вращения в этой точке. В этой же точке $X = \left(\dfrac{\eta_m}{B(e = 1, n = 1{,}0795)}\right)^{1/3}$, т. е. так же, как и вблизи других точек бифуркации e_k, параметр асимметрии X будет иметь аномально большие значения с учетом малости $\eta_m \sim 10^{-9}$–10^{-12}.

При $n > n_k = 1{,}0795$ ни для каких значений e $A(e,n)$ в нуль не обращается, оно уже для $e = 1$ отрицательно, и более того, с уменьшением e будет уменьшаться, удаляясь все больше от точки бифуркации $A(e,n) = 0$.

В области значений e, близких к единице, имеет место следующее аналитическое представление $A(e,n)$:

$$A(e,n) = 0{,}1872(e-1) + 1{,}3560(1{,}0795 - n) = -1{,}4872\varepsilon + 1{,}3560(1{,}0795 - n),$$

которое удобно использовать при описании эволюции конфигурации. Тогда с высокой степенью точности $\sim 2 \cdot 10^{-3}$ из (11б) вблизи точки бифуркации имеет место следующее представление параметра асимметрии X:

$$X = X_k \left(1 + 0{,}2233 \frac{\varepsilon - \varepsilon_k}{X_k^2}\right), \quad \varepsilon_k = \varepsilon(e_k).$$

4. СЛУЧАЙ МЕДЛЕННОГО ВРАЩЕНИЯ

Остановимся более подробно на исследовании ньютоновской политропы в отсутствие магнитных натяжений ($\eta_m = 0$). Уравнение (11) будет в этом случае иметь три решения в интервале $0{,}9989 < n \leqslant 1{,}0795$, $X = 0$ и $X = \pm\sqrt{-\dfrac{A(e,n)}{B(e_k,n)}}$. Наиболее интересной для нас является точка $e_k = 1$ ($\varepsilon = 0$), в которой вращение отсутствует или очень медленное. В этой точке, $|n - 1{,}0795| \ll 1$, уравнение для параметра X будет иметь три решения $X = 0$ и $X = \pm 0{,}7816\sqrt{n - 1{,}0795}$.

Чтобы ответить на вопрос, какое решение будет физически реализовано, оценим полную энергию конфигурации E при фиксированной массе $m = m_0$ в зависимости от значений параметра X. Вместо E удобно вычислять безразмерную величину $\tilde{E}$:

$$\tilde{E} = \frac{E}{-E_{\text{sp}} e} = \frac{15E}{16\pi^2 G \rho_0^2 a_1^5 e} = \varepsilon \int\limits_D \tilde{\rho}(x_1^2 + x_2^2) d^3x + \frac{1}{2} \int\limits_D \tilde{\rho}\Phi d^3x + nK_0 \int\limits_D \tilde{\rho}^{1+\frac{1}{n}} d^3x,$$
$$m_0 = \rho_0 a_1^3 e \int\limits_D \tilde{\rho} d^3x, \quad d^3x = dx_1 dx_2 dx_3. \qquad (16)$$

Заметим, что $E_{\text{sp}} = -\dfrac{16\pi^2}{15} G \rho_0^2 a_1^5$ — гравитационная энергия однородной сферы радиусом a_1 и плотностью ρ_0. Первый член в (16) — энергия вращения, второй — гравитационная энергия, третий — внутренняя энергия.

При $e = 1$, $\varepsilon = 0$ из (16) имеем

$$\tilde{E}(e=1,n) = \frac{1}{2} \int\limits_D \tilde{\rho}\Phi d^3x + nK_0 \int\limits_D \tilde{\rho}^{1+\frac{1}{n}} d^3x,$$
$$m_0 = \rho_0 a_1^3 \int\limits_D \tilde{\rho} d^3x. \qquad (17)$$

Составленная нами программа по вычислению $\tilde{E}(e = 1, n = 1{,}0795)$ дает следующий результат:

$$\tilde{E}(e = 1, n = 1{,}0795) = -0{,}0642(1 - 4{,}879X^2). \qquad (18)$$

Отсюда следует, что решение с $X = 0$ будет иметь меньшую энергию и, следовательно, являться устойчивым по сравнению с асимметричным решением $X \neq 0$, у которого энергия выше при той же массе.

При меньших значениях n и e вопрос об энергии, а следовательно, устойчивости вращающейся политропы вблизи точек бифуркации при $X = 0$ и $X \neq 0$ остается открытым и требует отдельного рассмотрения.

Проведенное нами изучение вопроса о точках бифуркации вращающихся политроп показало, что точки бифуркации медленно вращающихся политроп $1 - e \ll 1$ возможны только при значениях показателей политроп, меньших и близких к значению $n_k = 1{,}0795$. Для намагниченных политроп в точках бифуркации параметр асимметрии X будет порядка $\eta_m^{1/3}$, что составляет 10^{-3}–10^{-4} при $\eta_m \sim 10^{-9}$–10^{-12} и на шесть-восемь порядков превышает его значение порядка η_m вдали от точек бифуркации.

За счет только одного вращения аксиальная асимметрия в распределении плотности очень медленно вращающихся политроп не может возникнуть, несмотря на то, что точки бифуркации имеют место при определенных значениях показателя политропы n.

Отметим, что для всех пульсаров с периодом $T \geqslant 33$ мс e_k принадлежит узкому интервалу значений $1 < e_k < 0{,}9996$ для значений n тоже из очень узкого интервала $1{,}0795 > n > 1{,}0794$.

При этом роль магнитных натяжений для значения параметра асимметрии X будет определяющей, так как при $\eta_m = 0$ в вышеуказанном интервале значений e и n решение с $X \neq 0$ будет неустойчиво по отношению к переходу в симметричное состояние $X = 0$.

На конце рассматриваемого интервала $n = 1$ нужно уже быстрое вращение, приводящее к существенной деформации конфигурации, для достижения точки бифуркации. В этом случае $e_k = 0{,}575$, $\varepsilon_k = 0{,}0439$ и $T_k = 1{,}637 \cdot 10^{-3}$ с.

Как нами было отмечено, из реалистических уравнений состояния наиболее близко к политропе со значением показателя $1{,}0795$ уравнение состояния Рейда.

Проведенное исследование указывает на возможность интенсивного гравитационного излучения и от достаточно медленных пульсаров, но с сильным внутренним магнитным полем, если уравнение состояния их ядерного вещества будет близко к политропе с показателем $n = n_k = 1{,}0795$.

Чтобы понять физические причины возникновения точек бифуркации в отсутствие вращения $\varepsilon = 0$, $e = 1$, рассмотрим уравнение для параметра асимметрии X в центральной области политропы $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \ll 1$, в которой доминируют квадратичные по координатам члены. В линейном по X приближении оно будет иметь вид

$$A(e = 1, n)X = \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right) K_0(n) - \frac{1}{5}\right) X = \eta_m. \qquad (19)$$

Из (19) мы видим, что вклады в левую часть этого уравнения от тяготения и давления имеют разные знаки. Как только они будут равны по абсолютной величине, то будет иметь место точка бифуркации. При этом вклад тяготения от n не зависит.

Если уравнение состояния традиционно считается заданным ($n = \mathrm{const}$), а точки бифуркации ищутся по параметрам e и ε, то в (19) у нас $e = \mathrm{const} = 1$, а показатель политропы изменяется. Легко заметить, что при малых значениях n вклад давления в (1) будет доминировать, так как $K_0(n = 0) = 1/3$.

При $n = 1{,}5$ $K_0(n = 1{,}5) = 0{,}0701$ и $(1 + 1/n)K_0(n) = 0{,}1168$, что меньше $1/5$. Следовательно, точка бифуркации $e = 1$ по n удовлетворяет неравенству $n < 1{,}5$. Численные расчеты дают $K_0 = \dfrac{1}{5}\dfrac{n}{1+n}$ в точке $n = 1{,}014$. Полученное значение достаточно близко к $n = 1{,}0795$, но говорит о том, что предположение Джинса о доминировании квадратичных членов в уравнениях, определяющих асимметричную часть конфигурации, не выполняется достаточно хорошо, так как при учете более высоких степеней (до шестой включительно) существенно различие в критическом значении показателя политропы. Оно составляет достаточно заметную величину $0{,}065$, т. е. величину порядка 6–7 %.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенное нами исследование с использованием принципиально новых символьно-численных методов решения уравнения (1) доказало существование точек бифуркации вращающихся политроп в новом диапазоне значений их показателя $0{,}9989 < n \leqslant 1{,}0795$. Возникает, следовательно, вопрос о более тщательном изучении этой задачи для ранее исследованной области значений $n < 0{,}808$. Мы рассмотрели также и эту задачу. Результаты получились следующие: критерий (13) для точек бифуркации вращающихся политроп выполняется для интервалов значений n наряду с рассмотренными в этой работе $0 \leqslant n < 0{,}1161$ и $0{,}5791 < n < 0{,}8012$.

Правая граница второго интервала очень близка к результатам Джеймса [6] $n_k = 0{,}808$. Сравнивая значения $\varepsilon_k(n = 0{,}8012) = 0{,}0522$ нашей работы и $\varepsilon_k(n = 0{,}808) = 0{,}0528$ работы [6], имеем очень хорошее согласие результатов.

Если $0{,}1161 < n < 0{,}5791$ или $0{,}8012 < n < 0{,}9989$, то в точках бифуркации $A(e, n) = 0$, $g_e < 0$, и, следовательно, вблизи экватора конфигурации уравнение гидростатического равновесия (1) не выполняется. Нетривиальная зависимость положения точек бифуркации от показателя политропы n очевидна и связана с сильной нелинейностью уравнения (1) по параметру n.

В случае невращающихся намагниченных политроп подробно исследован вопрос их устойчивости для различных значений параметра асимметрии X.

Подробное рассмотрение полученных в работе результатов для астрофизических приложений, в частности, для исследования гравитационного излучения пульсаров и его влияния на эволюцию периода будет дано в последующих наших работах.

Авторы искренне благодарны А. Н. Сисакяну за поддержку исследований вращающихся сверхплотных гравитирующих конфигураций, Г. С. Бисноватому-Когану, обсуждение с которым вопроса о точках бифуркации вращающихся ньютоновских политроп послужило отправной точкой проведенного нами тщательного исследования этого вопроса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аппель П. Э.* Фигуры равновесия вращающейся однородной жидкости: Пер. с фр. Л., 1936. С. 376.
2. *Чандрасекар С.* Эллипсоидальные фигуры равновесия. М.: Мир, 1982;
Chandrasekhar S. Ellipsoidal Figures of Equilibrium. New Haven: Yale Univ. Press, 1969.

3. *Тассуль Ж. Л.* Теория вращающихся звезд. М.: Мир, 1982. 472 с.;
Tassoul J. L. Theory of Rotating Stars. Princeton: Princeton Univ. Press, 1978.
4. *Tsvetkov V. P.* Gravitational Radiation of Rapidly Rotating Drop of Homogeneous Magnetized Gravitating Liquid near Bifurcation Point // Phys. Lett. A. 1984. V. 105. P. 34–35.
5. *Jeans J. H.* Problems of Cosmogony and Stellar Dynamics. Cambridge Univ. Press, 1919.
6. *James R. A.* The Structure and Stability of Rotating Gas Masses // Astrophys. J. 1964. V. 140. P. 552.
7. *Brady P. R. et al.* Searching for Periodic Sources with LIGO // Phys. Rev. D. V. 57. P. 2101–2116.
8. *Беспалько Е. В. и др.* Гравитирующая быстровращающаяся сверхплотная конфигурация с реалистическими уравнениями состояния // Мат. моделирование. 2006. Т. 118, № 3. С. 103–119.
9. *Фок В. А.* Теория пространства, времени и тяготения. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961.

Получено 9 августа 2007 г.