

МОДЕЛЬНАЯ ОЦЕНКА ПОСТОЯННОЙ ТОНКОЙ СТРУКТУРЫ

Л. И. Меньшиков

Российский научный центр «Курчатовский институт», Москва

Рассмотрена модель, дающая для постоянной тонкой структуры оценку снизу, которая согласуется с экспериментальным значением этой постоянной.

The model which provides the fine structure constant of order of the observable value is considered.

PACS: 04.20.-q, 04.70.-s, 98.80.-k

1. Расчет величины постоянной тонкой структуры $\alpha = e^2/\hbar c \approx 1/137$ неизменно привлекает внимание исследователей. Прочитав в этой связи М. Борна [1]: «... Едва ли можно сомневаться в том, что существование этой безразмерной величины, единственной, которую можно получить из величин e , c и \hbar , олицетворяет более глубокую связь между электродинамикой и квантовой теорией, чем это представляется с точки зрения современной науки. Поэтому физики понимают необходимость чисто теоретического определения ее численного значения. Вероятно, решение этой проблемы тесно связано с будущей единой теорией элементарных частиц. До сих пор попытки оставались безуспешными...». Обзор таких попыток без детального их анализа дан в [2]. В данной краткой статье нет возможности для подробного обсуждения работ по этой теме. Они очень разнообразны, но имеют общий признак: в каждой из них присутствует набор параметров, подходящий выбор которых позволяет получить близкое к эксперименту значение α . В [3–6] α выражается через отношение массы протона к массе электрона m_p/m_e . Согласно современным представлениям масса протона должна выражаться через массы кварков и энергию глюонного поля, удерживающего их. Поэтому результаты [3–6] для α следует рассматривать как случайное совпадение (даже если не учитывать отказ от принципа относительности, принятый в [4]). В [7] электрон рассмотрен как заряженная черная дыра с массой m_e и зарядом e . Мюон представлен как электрон, вокруг которого по круговой орбите, являющейся нулевой геодезической траекторией, обращается безмассовая частица. Принято, что орбитальный момент количества движения равен \hbar , и получено соотношение $m_\mu/m_e = 1 + 3/(2\alpha) = 206,554$, что близко к экспериментальному значению 206,767. Несмотря на привлекательность модели, укажем, что в [7] неверно рассчитана полная энергия частицы в гравитационном поле (в [7] она обозначена через E). Кроме того, частица добавляет к массе электрона гораздо большую массу $m_\mu - m_e$, поэтому электрон нельзя считать неподвижным. В [8] из геометрических соображений получено значение $\alpha = (9/8\pi^4)(\pi^5/2^4 5!)^{1/4}$, имеющее относительное отклонение от экспериментального на $1,5 \cdot 10^{-6}$. В [9, 10] расчет [8] проверен и получена величина

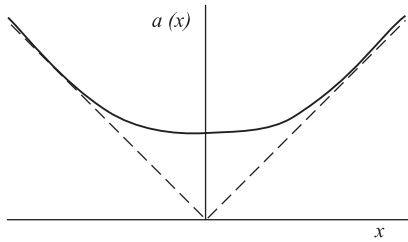
$\alpha = (9/8\pi^4)(\pi^5/2^45!)^{1/4}r^{-13/2}$, где r — радиус «сферы» в пятимерном псевдоевклидовом пространстве, введенном в [8]. В [8] без обоснования принято $r = 1$. Кроме того, автору неясно, как можно получить α без какой-либо процедуры квантования. В [11] обращается внимание на близкое совпадение двух больших чисел: отношения электрической и гравитационной сил взаимодействия протона с электроном $F_e/F_G \approx 2,3 \cdot 10^{39}$ и безразмерной энтропии Вселенной в период $10^{-23} < t < 10^{-7}$ с, когда в ней происходит фазовый переход и температура задерживается на величине $m_{\pi^\pm}c^2$. Считая, что такое совпадение не случайно, и приравнивая эти две величины, автор [11] нашел: $\alpha = 3\pi m_e m_p / (32m_{\pi^\pm}^2) = 1/137,94 \pm 0,01$. Наконец, отметим работу [12], в которой ковариантным образом вводится фундаментальная длина, через которую выражается α .

В кулоновское взаимодействие двух зарядов входит комбинация e^2 , а в энергию Казимира — $\hbar c$ [13], поэтому заманчиво выглядит идея соединить эти два эффекта с целью вычисления постоянной тонкой структуры $\alpha = e^2/\hbar c \approx 1/137$. Казимир предложил модель [14] электрона в виде заряженной, идеально проводящей сферы, в которой, по его предположению, кулоновское отталкивание уравнивается казимировским притяжением, обусловленным вакуумными флуктуациями. Попытка оказалась неудачной, поскольку эффект Казимира в сфере дает отталкивание (см. обзор [15]).

2. В данной работе рассмотрим следующую модель (будем называть ее моделью фотона, следуя идее Гейзенберга о нелинейном фундаментальном спинорном поле [16], согласно которой фотон является составной частицей). Предположим, что имеется кротовая нора [17, 18] с метрикой

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - a^2(x)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2).$$

Здесь x — радиальная координата, соединяющая две вселенные или две части нашей Вселенной. В плоском пространстве $a(x) = x$, $x > 0$. В искривленном пространстве,



Изменение радиуса сферических поверхностей в кротовой норе вдоль радиальной координаты x

которое здесь рассматривается, радиальная координата x изменяется в пределах $-\infty < x < +\infty$. Приближаясь к кротовой норе, мы обнаруживаем, что в системе координат, в которой метрика статична, поверхности с одинаковым ускорением свободного падения являются сферами площадью $S = 4\pi a^2(x)$. Как видно из рисунка, сначала их площади уменьшаются, затем начинают увеличиваться. Глубоко внутри норы, где ее радиус a можно считать постоянным ($a(x) = a = \text{const}$), на расстоянии L друг от друга находятся две заряженные, идеально проводящие сферы («электрон» и «позитрон») с зарядами e и $-e$ (можно сказать, что одна

сфера находится внутри другой). Электрическое поле, созданное первой из них, имеет противоположные знаки по обе ее стороны и по теореме Гаусса равно $E = 2\pi e/S$. Сила кулоновского притяжения сфер определяется потоком продольного электромагнитного поля, не зависит от расстояния L и составляет $F_1 = -eE = -2\pi e^2/S$. Сила казимиров-

ского взаимодействия «электрона» и «позитрона» равна $F_2 = -\partial(\text{reg } E_2)/\partial L$, где

$$E_2 = \hbar \sum_{l=1}^{\infty} (2l+1) \left(\frac{1}{2} \omega_{0l} + \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{nl} \right) \quad (1)$$

— энергия вакуумных колебаний электромагнитного поля; $\text{reg } E_2$ — ее регуляризованное значение; $\omega_{nl} = c \sqrt{\frac{l(l+1)}{a^2} + \left(\frac{\pi n}{L}\right)^2}$ — частоты собственных мод. Проще всего рассчитать эти частоты, рассматривая скалярное безмассовое поле ψ в резонаторе вместо электромагнитного. Для него получаем уравнения:

$$\psi = \frac{1}{a} \exp(-i\omega t) \phi, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{1}{a^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \phi + k^2 \phi = 0, \quad k = \frac{\omega}{c}.$$

Отделяя угловые переменные $\phi = R(x)Y_{lm}(\theta, \varphi)$, где $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ — сферические функции, получаем уравнение для радиальной функции $R(x)$:

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + q^2 R = 0, \quad q^2 = k^2 - \frac{l(l+1)}{a^2}.$$

С учетом нулевых условий на ограничивающих сферах получаем $R = \sin qx$, $q = \pi n/L$, где $n = 0, 1, 2, \dots$. Из-за векторного характера электромагнитного поля моды $l = 0$ невозможны, мода $n = 0$ имеет одну поляризацию (моды E -типа), а моды $n \neq 0$ — две (H - и E -типа), что учтено в (1).

Метод регуляризации выражений, подобных (1), изложен в [19, 20]. Сначала сумму по n преобразуем по формуле Абеля–Плана:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = -\frac{1}{2} f(0) + \int_0^{\infty} f(x) dx + i \int_0^{\infty} dt \frac{f(it) - f(-it)}{\exp(2\pi t) - 1},$$

что дает:

$$\text{reg } E_2 = 2 \sum_{l=1}^{\infty} \left(l + \frac{1}{2} \right) \left[\int_0^A dy \sqrt{\frac{\pi^2}{L^2} y^2 + \frac{l(l+1)}{a^2}} - \frac{2\pi}{L} \int_{t_0}^{\infty} \frac{dt}{\exp(2\pi t) - 1} \sqrt{t^2 - t_0^2} \right],$$

$$t_0 = \frac{L\sqrt{l(l+1)}}{\pi a}, \quad A \rightarrow \infty.$$

В предельном случае $L \gg a$, который далее будет рассматриваться, второй из интегралов экспоненциально мал и его можно опустить. Далее применяем формулу

$$I = 2 \int_0^A dy \sqrt{y^2 + b^2} = A\sqrt{A^2 + b^2} + b^2 \ln \left(\frac{A + \sqrt{A^2 + b^2}}{b} \right) \rightarrow Z + Q,$$

$$Z = A^2 + b^2 \ln A, \quad 2Q = b^2 - b^2 \ln b^2.$$

Слагаемое Z соответствует ненаблюдаемой бесконечной энергии вакуума. Его следует опустить. После этого, применяя формулу

$$\sum_{l=0}^{\infty} f\left(l + \frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} f(x) dx - i \int_0^{\infty} dt \frac{f(it) - f(-it)}{\exp(2\pi t) + 1},$$

в предельном случае $L \gg a$ получаем выражение

$$\operatorname{reg} E_2 = \hbar c \frac{LJ}{\pi a^2}, \quad J = \int_0^{\infty} \frac{dt}{\exp(2\pi t) + 1} \left[\left(\frac{11}{4} - t^2 \right) tA + 3 \left(t^2 - \frac{1}{4} \right) B \right] \approx -3,08 \cdot 10^{-3},$$

$$A = 1 - \frac{1}{2} \ln \left[\left(t^2 + \frac{1}{4} \right) \left(t^2 + \frac{9}{4} \right) \right], \quad B = \operatorname{arctg}(2t) + \operatorname{arctg}\left(\frac{2t}{3}\right).$$

Поскольку $F_2 > 0$, взаимодействие Казимира дает отталкивание. Предполагая, что имеет место «пленение» составных частей «фотона» ($F_1 + F_2 < 0$), получаем соотношение: $e^2/\hbar c > 1/510$. Легко показать, что при $a \ll L$ этот вывод остается справедливым и при отказе от приближения $a(x) = \operatorname{const}$.

Отвлекаясь от кротовых нор, любопытно повторить этот расчет для случая, когда резонатор представляет собой цилиндр (брусok) длиной L с поперечным сечением в виде квадрата со стороной a , который рассмотрен в [19, 20]. Аналогично получаем $e^2/\hbar c > C_1/2\pi \approx 1/166$, где $C_1 = (\pi^2/720) + (\zeta(3)/16\pi)$, $\zeta(3) \approx 1,202$ -дзета-функция Римана [21]. Интересно провести расчет для цилиндра с круговым сечением.

Автор рассматривает данную работу как любопытное замечание, скорее всего, не имеющее отношения к действительности. Представляет интерес аналогичная квантово-полевая модель.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Борн М.* Атомная физика. М.: Мир, 1965.
2. *Eagles D. M.* // Intern. J. Theor. Phys. 1976. V. 15. P. 265.
3. *Eddington A. S.* Fundamental Theory. Cambridge Univ. Press, 1948.
4. *Aspden H., Eagles D. M.* // Phys. Lett. A. 1972. V. 41. P. 423.
5. *Delaney W.* // Intern. J. Theor. Phys. 1974. V. 10. P. 239.
6. *Surdin M.* // Ann. l'Inst. Henry Poincare. 1971. V. 15. P. 203.
7. *Ross D. K.* // Nuovo Cim. A. 1972. V. 9. P. 254.
8. *Wyler A.* // Compt. Rend. Ser. A. 1969. V. 269. P. 743; 1971. V. 271. P. 743.
9. *Robertson B.* // Phys. Rev. Lett. 1971. V. 27. P. 1545.
10. *Pease R. L.* // Intern. J. Theor. Phys. 1977. V. 16. P. 405.

11. *Alexanian M.* // Phys. Rev. D. 1975. V. 11. P. 722.
12. *Pradhan T., Khare A. V.* // Lett. Nuovo Cim. 1974. V. 10. P. 701.
13. *Cazimir H. B. C.* // Proc. Kon. Nederl. Acad. Wetensch. 1948. V. 60. P. 793.
14. *Cazimir H. B. C.* // Physica. 1953. V. 19. P. 846.
15. *Гриб А. А., Мамаев С. Г., Мостепаненко В. М.* Квантовые эффекты в сильных внешних полях. М.: Атомиздат, 1980.
16. *Heisenberg W.* // Ann. Phys. 1938. V. 32. P. 20.
17. *Wheeler J. A.* // Phys. Rev. 1953. V. 97. P. 511.
18. *Новиков И. Д., Кардашев Н. С., Шацкий А. А.* // УФН. 2007. Т. 177. С. 1017.
19. *Мамаев С. Г., Трунов Н. Н.* // ТМФ. 1979. Т. 38. С. 345.
20. *Мостепаненко В. М., Трунов Н. Н.* // УФН. 1988. Т. 156. С. 385.
21. Справочник по специальным функциям / Ред. М. Абрамовиц и И. А. Стегун. М.: Наука, 1979.

Получено 28 апреля 2008 г.