Письма в ЭЧАЯ. 2004. Т. 1, № 5(122). С. 50–57

УДК 530.145.63

ФИЗИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ НЕКОТОРЫХ ГРУППОВЫХ АЛГЕБР

О. С. Космачев[1]

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

На основе неприводимых представлений конечных групп, таких как группа γ-матриц Дирака, ее максимальная подгруппа и группа кватернионов, показано совпадение коммутационных соотношений между элементами алгебр, построенных на названных конечных группах, и коммутационных соотношений между инфинитезимальными операторами группы уравнения Дирака, группы Лоренца и группы трехмерных вращений.

On the basis of finite group irreducible representations such as Dirac γ-matrix representations, its maximal subgroup and quaternion group the coincidence of commutative relations between the algebra elements, which are constructed on above-cited groups and commutative relations between infinitesimal operators of Dirac equation group, Lorentz group and 3-dimensional rotation group respectively is shown.

ВВЕДЕНИЕ

Сфера приложений конечных групп в физике и смежных областях постоянно расширяется [1]. Помимо прямого использования конечных групп в физике [2, 3] имеется еще одна сторона их возможных приложений. Они могут нести информацию о непрерывных группах, будучи вложенными в них. Примером связи конечных и непрерывных групп может служить известная методика классификации неприводимых представлений групп $U(N)$ с помощью симметрических групп S_n [2].

Зачастую анализ конечных групп реализуется проще, чем непрерывных, и позволяет полнее и глубже проанализировать структуру физических объектов или процессов. Анализ на основе конечных групп полезен также в тех случаях, когда необходимо сочетать алгебры с различной структурой или выявлять связи между ними.

Целью данной работы является дальнейшее развитие методики построения полного набора неприводимых представлений (НП) групп наиболее широко используемых в физике элементарных частиц — группы трехмерных вращений, группы Лоренца и группы Дирака — и выявление тех подструктур, на которых реализуются НП указанных групп.

Кроме того, выяснилось, что именно конечные группы, когда они выступают в роли инфинитезимальных операторов, делают возможной физическую интерпретацию определенных алгебраических объектов, и анализ на их основе незаменим при описании сложных или составных систем.

Ниже мы будем иметь дело с алгебрами, образующие элементы которых являются конечными группами, или групповыми алгебрами. Частными случаями таковых являются алгебры Клифорда, Грассмана и некоторые другие.

[1]E-mail: kos@thsun1.jinr.dubna.su

1. ГРУППА КВАТЕРНИОНОВ

Группа кватернионов получается из хорошо известной алгебры кватернионов путем добавления к ее элементам тех же элементов с обратными знаками [4]. Таблица умножения группы может быть задана определяющими соотношениями [5].

$$a_2a_1a_2^{-1} = a_1^{-1} = a_1^3, \quad a_1a_2 = a_3, \quad a_1^2 = a_2^2 = a_3^2. \tag{1}$$

Группа имеет порядок 8, ранг 2, содержит три циклические подгруппы четвертого порядка с генераторами a_1, a_2, a_3. Все три подгруппы обладают кроме единицы e одним общим элементом $a_1^2 = a_2^2 = a_3^2$, который вместе с e образует центр группы.

Построим следующее алгебраическое выражение:

$$C_4[a_1] = [e + a_1 + a_1^2 + a_1^3]. \tag{2}$$

Аналогичные выражения можно записать для подгрупп с другими генераторами a_2, a_3.

Если генератор a_1 дополнить множителем $\exp(2\pi i k_1/4)$, где $k_1 = 1, 2, 3, 4$, то мы получим 4 выражения

$$C_4[k_1a_1] = [e + \exp(2\pi i k_1/4)a_1 + (\exp(2\pi i k_1/4)a_1)^2 + (\exp(2\pi i k_1/4)a_1)^3] \tag{3}$$

со свойствами

$$(C_4[k_1a_1])^2 = 4C_4[k_1a_1], \tag{4}$$

$$C_4[k_1a_1]C_4[k_1'a_1] = 4\delta_{k_1k_1'}C_4[k_1a_1], \tag{5}$$

$$a_1C_4[k_1a_1] = \exp(2\pi i(4-k_1)/4)C_4[k_1a_1]. \tag{6}$$

Отсюда следует, что выражения $C_4[k_1a_1]$ реализуют неприводимые представления в данном случае циклической группы четвертого порядка. Группа абелева, все представления одномерные.

Будем называть циклической структурой (ЦС) некоторой конечной группы [6] сумму всех ее элементов, записанную в виде произведения ее циклических подгрупп. Это произведение должно включать в себя, как минимум, циклические подгруппы, содержащие генераторы группы. Очевидно, такая алгебраическая конструкция является одномерным единичным представлением, записанным в мультипликативной форме.

Группа кватернионов имеет ранг 2, значит все ее элементы выражаются через два генератора. Как отмечалось выше, они порождают циклические подгруппы четвертого порядка. Обозначим

$$Q_2[a_1, a_2] = 1/2C_4[a_1]C_4[a_2]. \tag{7}$$

Учитывая, что $a_1^2 = a_2^2$ и $C_4[a_2] = [e+a_2][e+a_2^2]$, можно записать ЦС группы кватернионов в виде

$$Q_2[a_1, a_2] = C_4[a_1][e + a_2] = [e + a_1 + a_1^2 + a_1^3][e + a_2]. \tag{8}$$

Если раскрыть скобки, то выражение содержит все 8 элементов группы и ничего сверх того.

Далее, как в случае C_4, дополним каждый из генераторов множителями, т. е. значениями примитивных корней четвертой степени из единицы $\exp(2\pi i k_{1,2}/4)$, где k_1, k_2

пробегают независимо значения $1, 2, 3, 4$. Тогда с учетом $a_1^2 = a_2^2$ из 16 возможных выражений получаем 8 не равных нулю.

$$\begin{aligned}
&1.\ Q_2[k_1 = 4, k_2 = 4] = [e + a_1 + a_1^2 + a_1^3][e + a_2],\\
&2.\ Q_2[k_1 = 4, k_2 = 2] = [e + a_1 + a_1^2 + a_1^3][e - a_2],\\
&3.\ Q_2[k_1 = 2, k_2 = 4] = [e - a_1 + a_1^2 - a_1^3][e + a_2],\\
&4.\ Q_2[k_1 = 2, k_2 = 2] = [e - a_1 + a_1^2 - a_1^3][e + a_2],\\
&5.\ Q_2[k_1 = 1, k_2 = 1] = [e + ia_1 - a_1^2 - ia_1^3][e + ia_2],\\
&6.\ Q_2[k_1 = 3, k_2 = 1] = [e - ia_1 - a_1^2 + ia_1^3][e + ia_2],\\
&7.\ Q_2[k_1 = 1, k_2 = 3] = [e + ia_1 - a_1^2 - ia_1^3][e - ia_2],\\
&8.\ Q_2[k_1 = 3, k_2 = 3] = [e - ia_1 - a_1^2 + ia_1^3][e - ia_2.]
\end{aligned} \tag{9}$$

Видно, что k_1, k_2 для каждого выражения принимают одновременно либо четные, либо нечетные значения. Кроме того, из структуры C_4 для четных k_1, k_2 следует, что при умножении первых четырех равенств на любой из генераторов они не изменяются, но приобретают множитель ± 1. Таким образом первая четверка равенств доставляет четыре одномерных неэквивалентных представления. Далее, умножая справа выражения 5 и 6 на генераторы a_1, a_2, мы замыкаемся в рамках только этих двух. То же самое можно сказать о равенствах 7 и 8. Другими словами, мы имеем два двумерных представления. В матричной записи они представляются как

$$R(a_1) = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}; \qquad R(a_2) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix};$$
$$R'(a_1) = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}; \qquad R'(a_2) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, это два эквивалентных двумерных представления, т. к. $R(a_1) = R'(a_1)$ и $R'(a_2) = R(a_1)R(a_2)R^{-1}(a_1)$.

Утверждение теоремы Бернсайда о том, что сумма квадратов размерностей неэквивалентных неприводимых представлений равна порядку группы, в данном случае выполняется: $8 = 4 \cdot 1^2 + 1 \cdot 2^2$.

Если, кроме того, отметить, что число эквивалентных НП равно их размерности, то можно говорить, что равенства 1–8 являются своеобразным операторным аналогом регулярного представления. Так же, как в случае регулярного представления, число нетождественных представлений равно порядку группы и каждое НП повторяется в нем такое число раз, какова размерность этого представления. Своеобразие представления заключается в том, что в данном случае все НП фактически разделяются. Выражения, относящиеся к неэквивалентным представлениям, ортогональны, а эквивалентные разделяются автоматически при действии генераторов. Поэтому в пространстве представления «таблица умножения» для элементов 1–8 имеет квадратно-диагональный вид. При этом эквивалентные представления образуют единый квадрат. Можно показать, что выражения, связанные с одномерными НП, обладают свойством проекционных операторов, т. е. квадрат каждого из них равен тому же оператору в первой степени, умноженному на постоянное число.

Следует отметить также сходство предлагаемой методики с хорошо разработанной техникой вычисления НП симметрических групп [6]. Аналогичных универсальных и удобных для практических приложений рецептов для произвольных конечных групп не имеется.

Обращает на себя внимание тот факт, что такие групповые характеристики, как НП, вычисляются с помощью чисто алгебраических конструкций. Таковыми являются таблицы Юнга в одном случае и циклические структуры в нашем.

Кроме того, все НП формируются из одномерных подгрупп, вложенных в группу. Это очевидно как из таблиц Юнга, так и из ЦС. Действительно, каждая симметрическая группа имеет два одномерных представления — это единичное и знакопеременное. Им соответствуют строки и столбцы различных схем. В такой же мере очевидным является факт формирования НП из одномерных циклических подгрупп в предлагаемой методике.

Если построить алгебру на элементах НП группы, полагая, что правило умножения образующих элементов алгебры вытекает из закона композиции элементов группы, то можно вычислить коммутаторы:

$$\begin{aligned} &[R(a_1), R(a_2)] = 2R(a_3); \\ &[R(a_2), R(a_3)] = 2R(a_1); \\ &[R(a_3), R(a_1)] = 2R(a_2), \end{aligned} \tag{10}$$

где $R(a_3) = R(a_1)R(a_2)$. С точностью до одного и того же нормировочного множителя полученные коммутаторы совпадают с коммутаторами инфинитезимальных операторов группы трехмерных вращений [7].

Отсюда следует вывод. Если ограничиться действительными значениями трех параметров, то алгебра кватернионов эквивалентна алгебре инфинитезимальных операторов группы трехмерных вращений. Если же перейти в область комплексных значений параметров, то можно получить другую алгебру. В частности, при определенном выборе комплексных коэффициентов можно получить алгебру, все генераторы которой являются нильпотентными, за исключением единичного элемента.

2. ГРУППА ЛОРЕНЦА

Если к рассмотренной группе кватернионов добавить еще один генератор c, исходя из определяющих соотношений

$$ca_1c^{-1} = a_1, \quad c^2 = a_1^2, \quad ca_2c^{-1} = a_2, \tag{11}$$

то такое расширение образует группу со следующей циклической структурой:

$$d_\gamma = Q_2[a_1, a_2][e + c] = C_4[a_1][e + a_2][e + c]. \tag{12}$$

Из определяющих соотношений следует, что группа d_γ имеет центр, состоящий из четырех элементов (e, a_1^2, c, ca_1^2), порядок группы равен 16, число сопряженных классов — 10.

Повторяя процедуру построения одномерных НП для каждого из сомножителей, когда k_1, k_2, k_3 принимают значения 1, 2, 3, 4 независимо для каждого из них, мы находим, что не равняются 0 только те 16 выражений, где все k одновременно либо четные, либо нечетные:

$$d_\gamma[k_1, a_1; k_2, a_2; k_3, c] = C_4[r_1 a_1][e + r_2 a_2][e + r_3 c], \tag{13}$$

где $r_1 = \exp(2\pi i k_1/4)$, $r_2 = \exp(2\pi i k_2/4)$, $r_3 = \exp(2\pi i k_3/4)$. Как и ранее, при четных k_1, k_2, k_3 мы имеем одномерные представления. В данном случае их будет восемь.

Из определяющих соотношений для a_1, a_2, c следует, что при умножении слева любого из равенств с нечетными значениями k_1, k_2, k_3 на каждый из трех генераторов происходит замыкание только на два равенства. Введем для краткости обозначения

$$d_\gamma[k_1 = 1, a_1; k_2 = 1, a_2; k_3 = 1, c] \equiv d_\gamma[1, 1, 1]$$

и

$$d_\gamma[k_1 = 3, a_1; k_2 = 1, a_2; k_3 = 1, c] \equiv d_\gamma[3, 1, 1].$$

Тогда, начиная с первого из них, получаем

$$\begin{gathered} a_1 d_\gamma[1,1,1] = -i d_\gamma[1,1,1], \quad a_1 d_\gamma[3,1,1] = i d_\gamma[3,1,1], \\ a_2 d_\gamma[1,1,1] = -i d_\gamma[3,1,1], \quad a_2 d_\gamma[3,1,1] = -i d_\gamma[1,1,1], \\ c d_\gamma[1,1,1] = -i d_\gamma[1,1,1], \quad c d_\gamma[3,1,1] = -i d_\gamma[3,1,1]. \end{gathered}$$

В матричной форме это соответствует равенствам

$$R(a_1) = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}; \quad R(a_2) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}; \quad R(c) = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Если начать с выражения $d_\gamma[k_1 = 1, a_1; k_2 = 1, a_2; k_3 = 3, c]$, то получается другой набор матриц

$$R'(a_1) = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}; \quad R'(a_2) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}; \quad R'(c) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Очевидно, что эти два представления неэквивалентны. Все остальные случаи эквивалентны одному из этих двух. Таким образом, мы имеем регулярное представление и утверждение теоремы Бернсайда в виде

$$16 = 8 \cdot 1^2 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^2. \tag{16}$$

Как и ранее, произведение любых двух выражений из (13) равняется нулю, если они принадлежат различным неэквивалентным представлениям.

Вычисление остальных элементов неприводимого представления дает

$$\begin{gathered} R(a_3) = R(a_1)R(a_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad R(b_1) = R(a_1)R(c) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \\ R(b_2) = R(a_2)R(c) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad R(b_3) = R(a_3)R(c) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}. \end{gathered}$$

Далее, считая эти выражения образующими элементами алгебры, находим такие коммутаторы

$$\begin{array}{lll}
[a_1, a_2] = 2a_3, & [a_2, a_3] = 2a_1, & [a_3, a_1] = 2a_2, \\
[b_1, b_2] = -2a_3, & [b_2, b_3] = -2a_1, & [b_3, b_1] = -2a_2, \\
[a_1 b_1] = 0, & [a_2, b_2] = 0, & [a_3, b_3] = 0, \\
[a_1, b_2] = 2b_3 & [a_1, b_3] = -2b_2, & \\
[a_2, b_3] = 2b_1, & [a_2, b_1] = -2b_3, & \\
[a_3, b_1] = 2b_2, & [a_3, b_2] = -2b_1. &
\end{array} \tag{17}$$

Если отвлечься от общего для всех соотношений нормировочного множителя 2, то полученные коммутационные соотношения полностью совпадают с коммутаторами инфинитезимальных матриц собственного преобразования Лоренца [7]. Такие преобразования имеют шесть операторов. Здесь их семь. Седьмой оператор c в данной схеме переводит операторы трехмерных вращений (a_1, a_2, a_3) в операторы преобразований Лоренца вдоль осей координат (b_1, b_2, b_3) и сводится, фактически, к умножению на мнимую единицу.

3. ГРУППА γ-МАТРИЦ ДИРАКА

Известно, что 16 γ-матриц Дирака, дополненные теми же матрицами с противоположными знаками, образуют группу D_γ порядка 32 [3]. Можно заметить, что те из них, которые удовлетворяют условию $\gamma_\rho^2 = -I$, разбиваются на ассоциации по шесть элементов, которые, если дополнить их $\pm I$, образуют подгруппы, изоморфные группе кватернионов.

При стандартном выборе γ-матриц, удовлетворяющих определению

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}, \qquad \gamma_5 = \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3, \tag{18}$$

где $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$, мы получаем 20 γ-матриц, квадрат которых равен минус единице.

Можно убедиться [9], что при таком определении генераторов $\gamma_1\gamma_2 \sim a_1$ и $\gamma_1\gamma_3 \sim a_2$ они порождают группу кватернионов, и ЦС ее имеет вид

$$Q_2[a_1, a_2] = C_4[a_1][e + a_2] \tag{19}$$

с определяющими соотношениями

$$a_2 a_1 a_2^{-1} = a_1^{-1}; \qquad a_1 a_2 a_1^{-1} = a_2^{-1}. \tag{20}$$

Последующее расширение данной группы с помощью элемента $c \sim \gamma_1\gamma_2\gamma_3$ приводит к группе d_γ

$$d_\gamma[a_1, a_2, c] = Q_2[a_1, a_2][e + c]. \tag{21}$$

Определяющие соотношения при этом совпадают (11).

Прямой проверкой можно убедиться, что дальнейшее расширение группы d_γ с помощью элемента $a_4 \sim \gamma_0$ доставляет ЦС группы γ-матриц Дирака

$$D_\gamma[a_1, a_2, a_3, a_4] = C_4[a_1][e + a_2][e + c][e + a_4]. \tag{22}$$

При этом помимо соотношений (11) и (20) выполняются такие:

$$a_4 a_1 a_4^{-1} = a_1, \qquad a_4 a_2 a_4^{-1} = a_2, \qquad a_4 c a_4^{-1} = c^{-1}.$$

Согласно определению d_γ и определяющим соотношениям между a_1, a_2 и c, a_4 очевидно, что первые три сомножителя в левой части последнего равенства изоморфны d_γ, а сама она является максимальной инвариантной подгруппой.

Из свойств γ-матриц следует, что все они распределяются по 17 сопряженным классам. Два элемента образуют отдельные классы — это e и $a_1^2 = a_2^2 = c^2 = -I$. Это центр группы. Остальные 30 распределены по 15 классам, каждый из которых содержит по два взаимно обратных элемента, если это элементы четвертого порядка. В один и тот же класс сопряженности попадают два элемента второго порядка, которые отличаются множителем, равным элементу второго порядка из центра группы. Поэтому группа имеет 17 неприводимых представлений.

Далее, повторяя сказанное в двух предыдущих случаях, мы получим 32 равенства

$$D_\gamma[r_1 a_1, r_2 a_2, r_3 c, r_4 a_4] = C_4[r_1 a_1][e + r_2 a_2][e + r_3 c][e + r_4 a_4], \tag{23}$$

где $r_1, r_2, r_3, r_4 = \exp(2\pi i k/4)$. Если $k = 1, 2, 3, 4$ изменяется независимо для каждого из четырех сомножителей, то неравными нулю получаются только те выражения, где все k либо только четные, либо только нечетные.

В случае четных k получается 16 одномерных НП. Для нечетных — получается четыре эквивалентных четырехмерных НП, что согласуется с теоремой Бернсайда: $32 = 16 \cdot 1^2 + 1 \cdot 4^2$.

Все возможные коммутационные соотношения для подгруппы первых трех генераторов совпадают с теми, которые приведены выше для d_γ. Что касается 16 одномерных представлений, то все они являются инвариантами подгрупп, вложенных в D_γ, и связаны с 16 компонентами хорошо известных элементов алгебры γ-матриц (S, V, T, A, P — скаляр, вектор и т. д.). Таким образом, предлагаемый подход дает возможность находить инварианты подгрупп и формировать из них инварианты расширенных подгрупп или всей группы. Изложенное делает очевидным также, что уравнение Дирака является не только алгебраическим, но и инфинитезимальным в своей основе.

Данная работа выполнена автором во время пребывания в ЛТФ им. Н. Н. Боголюбова. Я благодарен академику Д. В. Ширкову за предоставленную возможность поработать в лаборатории.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Conway J. H., Sloane N. J. A.* Sphere packing, lattices and groups. V. 1, 2. N. Y., 1998.
2. *Эллиот Д., Добер П.* Симметрии в физике. М., 1983. Т. 2. С. 246.
3. *Lomont J. S.* Applications of finite groups. N. Y.; London, 1959. P. 41.
4. *Березин А. В., Курочкин Ю. А., Толкачев Е. А.* Кватернионы в релятивистской физике. Минск, 1989. С. 32.
5. *Кэртис Ч., Райнер И.* Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. М., 1969. С. 35.

6. *Kosmachev O. S.* Generalised quaternion groups // Proc. of the Intern. Workshop «Quantum System», Minsk, 1994. P. 333–336.

7. *Джад Б., Вайборн Б.* Теория сложных атомных спектров. М., 1973. С. 89.

8. *Наймарк М. А.* Линейные представления группы Лоренца. М., 1958. С. 37; 88.

9. *Космачев О. С.* О группе γ-матриц Дирака. Препринт ИФВЭ 95-07. Алматы, 1995.

Получено 29 декабря 2003 г.