Письма в ЭЧАЯ. 2005. Т. 2, № 5(128). С. 111–121

УДК 539.17 + 530.145

# ТОЧЕЧНЫЕ ИСТОЧНИКИ ЕВКЛИДОВА НЕАБЕЛЕВА ПОЛЯ В ИНСТАНТОННОЙ ЖИДКОСТИ

*Г. М. Зиновьев* [а], *С. В. Молодцов* [б]

[а] Институт теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова НАНУ, Киев

[б] Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва

Получена оценка средней энергии евклидова неабелева точечного источника в инстантонной жидкости, линейно растущая на больших расстояниях, без учета эффектов экранирования. В случае диполя в синглетном по цвету состоянии энергия оказывается линейной функцией расстояния между источниками, с коэффициентом «натяжения», вполне согласующимся с имеющимися модельными и решеточными оценками. В рамках теории возмущений рассмотрен случай произвольной ориентации источников в цветовом пространстве.

Estimate of average energy of the non-abelian dipole in the instanton medium is calculated. This energy for the dipole in colour singlet state escalates linearly with the separation increasing for the point-like sources unscreened. And its «tension» coefficient develops the magnitude pretty similar to that from the lattice QCD exploration and other model approaches. The case of arbitrary oriented sources in the colour space are considered in the framework of corresponding perturbation theory.

Еще в пионерских работах по «инстантоной» физике [1] рассматривался вопрос о взаимодействии псевдочастицы (PP) (инстантона, антиинстантона) с внешним полем в квазиклассическом приближении и было обнаружено дипольное взаимодействие. Вывод соответствующей формулы базируется на суперпозиционном анзаце для приближенного решения уравнений Янга–Миллса

$$\mathcal{A}^a_\mu(x) = A^a_\mu(x) + B^a_\mu(x). \tag{1}$$

Здесь первое слагаемое обозначает поле (анти)инстантона (для определенности взятое в сингулярной калибровке)

$$A^a_\mu(x) = \frac{2}{g}\ \omega^{ab}\bar\eta_{b\mu\nu}\ \frac{\rho^2}{y^2+\rho^2}\ \frac{y_\nu}{y^2} \tag{2}$$

с размером $\rho$, с координатой центра $z$ и матрицей ориентации в цветовом пространстве $\omega$, $y = x - z$; $\bar\eta_{b\mu\nu}$ — символ 'т Хоофта (для антиинстантона $\bar\eta \to \eta$); $g$ — константа связи неабелева поля. Второе слагаемое описывает внешнее поле. Для простоты мы будем рассматривать внешнее поле, создаваемое вначале неподвижными евклидовым точечным цветовым источником $e\delta^{3a}$ и евклидовым цветовым диполем $\pm e\delta^{3a}$, и ограничимся только случаем группы $SU(2)$. Используя эти обозначения, можно сказать, что ранее основное внимание уделялось членам взаимодействия типа $e/g$. Цель настоящей статьи заключается в том, чтобы указать на очень интересное поведение оценки производящего функционала инстантонной жидкости (IL) (обозначения см. в [2])

$$Z = \sum_N \frac{1}{N!}\ \prod_{i=1}^{N}\ \int (d\gamma_i/\rho_i^5) C_{N_c} \widetilde{\beta}^{2N_c}\, \mathrm{e}^{-S} \tag{3}$$

при наличии евклидовых источников квазиклассического неабелева поля. В частности, нас будет интересовать асимптотика среднего действия (энергия) евклидовых источников в IL, т. е. мы будем стремиться проанализировать вклады типа $e^2$. Евклидовы источники будут генерировать поля той же самой природы, что и поля, встречающиеся при решении задачи о квантовании поля инстантона $A_i$, где, напомним, $A = A_i + a_q$, а $a_q$ — глюонные поля флуктуаций.

Для евклидова точечного источника и диполя, отвечающего «изосинглетному» состоянию, соответственно имеем:

$$\begin{aligned} B^a_\mu(x) &= (\mathbf{0}, \delta^{a3}\ \varphi),\ \ \varphi = \frac{e}{4\pi}\ \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}_e|}, \\ B^a_\mu(x) &= (\mathbf{0}, \delta^{a3}\ \varphi),\ \ \varphi = \frac{e}{4\pi}\ \left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}_1|} - \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}_2|}\right), \end{aligned} \tag{4}$$

где $\mathbf{z}_e$ — координата покоящегося точечного источника, а $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$ — координаты, характеризующие диполь. Напомним, что создаваемое частицами поле в четырехмерном пространстве, вообще говоря, выглядит конусоподобным образом с остриями, лежащими в местах возникновения частиц. По мере удаления от них, в ближней к частицам зоне, поле носит как бы установившийся характер. В дальней зоне поле проникает в первоначально свободную от сигналов область и для его описания следует применять запаздывающее решение, удовлетворяющее, в частности, лоренцевской калибровке $\partial_\mu B^a_\mu = 0$ (справедливой и для решения (2)). Мы будем интересоваться взаимодействиями только в области уже установившегося поля, и тогда образом поля будет служить цилиндрически-симметричное кулоновское поле, не зависящее от $x_4$, как в (4). Такой выбор решений в суперпозиционном анзаце (1) позволяет сохранить асимптотическое поведение стохастической компоненты.

Выражения для потенциалов приводятся здесь в евклидовом виде. Наш выбор переменных для поля и евклидова источника при переходе от пространства Минковского дается следующими заменами: $B_0 \to iB_4$, $e \to -ie$. При этом, напомним, последнюю замену переменных можно рассматривать как следствие преобразований, производимых со спинорными полями $\psi \to \hat{\psi}$, $\bar{\psi} \to -i\hat{\psi}^\dagger$, $\gamma_0 \to \gamma_4$, где спиноры со шляпками рассматриваются в евклидовом пространстве. Мы поступаем в точном соответствии с результатами электродинамики, где удобным способом получения содержательной теории в евклидовом пространстве является переход к мнимому заряду.

Напряженность поля

$$G^a_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}^a_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}^a_\mu + g\varepsilon^{abc}\mathcal{A}^b_\mu \mathcal{A}^c_\nu \tag{5}$$

(здесь $\varepsilon^{abc}$ — полностью антисимметричный тензор) для суперпозиции полей (1) можно записать тогда в виде

$$\begin{aligned} G^a_{\mu\nu} &= G^a_{\mu\nu}(B) + G^a_{\mu\nu}(A) + G^a_{\mu\nu}(A,B), \\ G^a_{\mu\nu}(A,B) &= g\varepsilon^{abc}(B^b_\mu A^c_\nu + A^b_\mu B^c_\nu), \end{aligned} \tag{6}$$

а $G^a_{\mu\nu}(A)$ и $G^a_{\mu\nu}(B)$ определены, как в (5). Квадрат напряженности глюонного поля представляется как

$$G^a_{\mu\nu}G^a_{\mu\nu} = G^a_{\mu\nu}(B)G^a_{\mu\nu}(B) + G^a_{\mu\nu}(A)G^a_{\mu\nu}(A) + G^a_{\mu\nu}(A,B)G^a_{\mu\nu}(A,B) + \\ + 2G^a_{\mu\nu}(B)G^a_{\mu\nu}(A) + 2G^a_{\mu\nu}(B)G^a_{\mu\nu}(A,B) + 2G^a_{\mu\nu}(A)G^a_{\mu\nu}(A,B). \quad (7)$$

Компоненты этой суммы дают вклады разных типов в полное действие системы источников и PP

$$S = \int dx \left(\frac{1}{4}\ G^a_{\mu\nu}G^a_{\mu\nu} + j^a_\mu \mathcal{A}^a_\mu\right) = S_e(B) + \beta + S_i. \quad (8)$$

Так, первое и второе слагаемые в (7) дают собственную энергию источника ($S_e$) (в случае диполя дополненную также кулоновским потенциалом взаимодействия источников), которая регуляризируется на малых расстояниях введением размера частицы, и действие инстантона $\beta = \dfrac{8\pi^2}{g^2}$. Эти члены пропорциональны $e^2$ и $g^{-2}$ соответственно. Четвертое и последнее слагаемые в (7), а также член $j^a_\mu A^a_\mu$ в (8) дают вклады типа $e/g$, и лишь третий член суммы (7) приводит к слагаемым типа $e^2$, поскольку пятое слагаемое в силу выбора вида решения (4) равно нулю. Ненулевые вклады мы обозначим как $S_i$ и, проделав вычисления, получим

$$S_i = \frac{e}{g}\ \bar\eta_{k4i}\omega^{3k} I_i + \left(\frac{e}{4\pi}\right)^2 J + \left(\frac{e}{4\pi}\right)^2 K_{kl}\omega^{3k}\omega^{3l}. \quad (9)$$

Конкретное выражение для функции $I_i$ нам в этой работе не понадобится, поскольку в приложении к модели IL следует проводить усреднение по цветовой ориентации PP, и тогда вклад дипольного члена исчезает. Два других слагаемых обусловлены интерференционной компонентой напряженности поля

$$G^a_{4i}(A,B) = 2\frac{e}{4\pi}\varepsilon^{a3c}\omega^{ck}\bar\eta_{ki\alpha}\frac{y_\alpha}{y^2}\frac{\rho^2}{(y^2+\rho^2)}\frac{1}{|\mathbf{y}+\mathbf{\Delta}|},$$
$$G^a_{4i}(A,B) = 2\frac{e}{4\pi}\varepsilon^{a3c}\omega^{ck}\bar\eta_{ki\alpha}\frac{y_\alpha}{y^2}\frac{\rho^2}{(y^2+\rho^2)}\left(\frac{1}{|\mathbf{y}+\mathbf{\Delta}_1|} - \frac{1}{|\mathbf{y}+\mathbf{\Delta}_2|}\right) \quad (10)$$

для точечного источника и поля диполя, отвечающего «изосинглетному» состоянию, соответственно, где $\mathbf{\Delta} = \mathbf{z} - \mathbf{z}_e$, $\mathbf{\Delta}_{1,2} = \mathbf{z} - \mathbf{z}_{1,2}$. В силу выбора вида решения (4) другие вклады в $G^a_{\mu\nu}(A,B)$ отсутствуют. В дальнейшем будет удобно пользоваться безразмерными переменными, заменив все координаты по правилу $x/\rho \to x$. В случае одного источника функция $J$ и тензор $K$ даются следующими выражениями

$$J = 2\int dy \frac{2y^2 - \mathbf{y}^2}{y^4(y^2+1)^2|\mathbf{y}+\mathbf{\Delta}|^2},$$

$$K_{kl} = 2\int dy \frac{y_k y_l}{y^4}\frac{1}{(y^2+1)^2|\mathbf{y}+\mathbf{\Delta}|^2}$$

и не интегрируются в элементарных функциях. Нам понадобятся только их асимптотики при $\Delta \to \infty$

$$J \simeq \frac{5\pi^2}{2}\frac{1}{\Delta^2},$$

а для компонент тензора 2-го ранга вида

$$K_{ij} = \delta_{ij} K_1 + \hat{\Delta}_i \hat{\Delta}_j K_2$$

имеем

$$K_1 \simeq \frac{\pi^2}{2} \frac{1}{\Delta^2}, \quad K_2 \simeq 0.$$

Интерференционная компонента напряженности поля имеет чисто неабелево происхождение, и, несмотря на то, что она построена из поля инстантона и поля заряда, ее вклад в действие всей системы (источников и РР) имеет вид самодействия евклидова источника $\sim e^2$. Этому простому и все же достаточно удивительному факту, по-видимому, не уделялось должного внимания. Подробное исследование поведения РР в поле евклидова неабелева источника проведено нами на основе теории возмущений, связанной с самой РР. Описывающие ее параметры считаются функциями внешнего воздействия, т. е. $\rho \to R(x, z)$, $\omega \to \Omega(x, z)$, причем эти новые поля-параметры находятся посредством мультипольного разложения, например, для размера (анти)инстантона

$$\begin{aligned} R_i(x, z) &= \rho + c_\mu y_\mu + c_{\mu\nu} y_\mu y_\nu + \ldots, \qquad |y| \leqslant L, \\ R_0(x, z) &= \rho + d_\mu \frac{y_\mu}{y^2} + d_{\mu\nu} \frac{y_\mu}{y^2} \frac{y_\nu}{y^2} + \ldots, \quad |y| > L, \end{aligned} \tag{11}$$

аналогично для ориентации инстантона в «изотопическом» пространстве $\Omega(x, z)$, где $L$ — некоторый параметр, определяющий радиус сферы, на котором растущее с расстоянием мультипольное разложение заменяется падающим, исходя из требования регулярности деформаций. Коэффициенты мультипольного разложения $c_\mu, c_{\mu\nu}, \ldots$ и $d_\mu, d_{\mu\nu}, \ldots$ могут быть вычислены и являются функциями внешнего воздействия. Оказывается, что можно не только проследить эволюцию приближенного решения для деформированного («измятого») (анти)инстантона, как функции расстояния, но и предложить способ самосогласованного описания полей источника и РР, оставаясь в рамках приближения суперпозиционного анзаца (1) (материал по этому вопросу подготовлен к печати). Поля деформаций оказываются существенными вблизи источника, на расстояниях порядка $\Delta \geqslant 2\rho$, и приводят к заметному росту действия РР.

При вычислении энергии точечного источника, помещенного в IL, напомним, что следует работать с характерной насыщающей континуальный интеграл конфигурацией в виде суперпозиции полей (анти)инстантонов, дополненной в нашем случае еще и полем источника $B^a_\mu(x)$

$$\mathcal{A}^a_\mu(x) = B^a_\mu(x) + \sum_{i=1}^{N} A^a_\mu(x; \gamma_i), \tag{12}$$

где $\gamma_i = (\rho_i, z_i, \omega_i)$ обозначают параметры, описывающие $i$-й (анти)инстантон. На больших расстояниях от источника плотность IL практически равна своему асимптотическому значению $n(\Delta) \sim n_0\, \mathrm{e}^{\beta - S} \simeq n_0$, поскольку в этой зоне действие каждой РР примерно совпадает с $\beta$. Интересующая нас величина дается усреднением $S$ по цветовым ориентациям и по положениям РР (для простоты рассмотрим РР одинакового размера)

$$\langle S \rangle = \prod_{i=1}^{N} \int \frac{dz_i}{V} \int d\omega_i S = \frac{e^2}{4\pi} \frac{1}{a} X_4 + N\beta + N \int \frac{d\boldsymbol{\Delta}}{L^3} \left(\frac{e}{4\pi}\right)^2 \left(J + \frac{K_{ii}}{3}\right), \tag{13}$$

где $L$ — некоторый формальный верхний предел интегрирования; $V = L^3 X_4$ — объем, занимаемый IL; $X_4$ — верхний предел, отвечающий «времени»; $N$ — полное число PP, а $a$ — радиус источника по сильному взаимодействию. Проставляя асимптотики функций $J$ и $K$ и возвращаясь к размерным переменным, запишем одноинстантонные вклады в среднее действие в следующем виде:

$$\langle S\rangle \simeq \frac{e^2}{4\pi}\frac{1}{a}X_4 + \frac{N}{V}\beta L^3 X_4 + \frac{N}{V}\frac{6\pi^3}{\beta}\frac{e^2}{g^2}\bar{\rho}^2 L X_4,$$

где $\bar{\rho}$ — средний размер (анти)инстантонов в IL. Общий множитель $X_4$ может быть выделен, поскольку, как обсуждалось в начале работы, мы рассматриваем инстантоны в поле источника в установившейся зоне, и задача автомодельна на каждом $x_4$-слое. Формально последнее слагаемое приведенной выше формулы в пределе больших $N, V \to \infty$, при фиксированной плотности IL $n = N/V$, выглядит как пренебрежимо малая поправка к глюонному конденсату (второе слагаемое). Однако этот линейно растущий с $L$ вклад пропорционален $e^2$ и имеет иной физический смысл, типа дополнительного слагаемого к собственной энергии источника

$$E \simeq \sigma L, \quad \sigma = n\frac{6\pi^3}{\beta}\frac{e^2}{g^2}\bar{\rho}^2.$$

В случае группы $SU(N_c)$ в знаменателе последнего слагаемого в формуле (13) следует заменить 3 на $N_c^2 - 1$, однако это не сказывается существенно на коэффициенте «натяжения» $\sigma$. При характерных для IL параметрах: $\dfrac{\bar{\rho}}{\bar{R}} \simeq \dfrac{1}{3}$; $\bar{R}$ — среднее расстояние между PP; $n = \bar{R}^{-4}$; $\beta \simeq 12$; $\bar{\rho} \simeq 1$ ГэВ$^{-1}$ [2, 3] — имеем $\sigma \simeq 0{,}6$ ГэВ/фм (если для оценки положить источник такой силы, что $e \simeq g$). Учитывая качественный характер модели IL, это значение следует признать совсем неплохо согласующимся с оценками, которые имеют место в рамках потенциальных моделей для тяжелых кваркониев. Если рассмотреть среднее вида $\langle S_i[, \mathrm{e}^{-S_i}\rangle$, моделирующее эффект подавления вклада PP вблизи источника, взяв соответствующие интегралы численно, то можно увидеть, что линейно растущий вклад начинает набираться где-то при $\Delta/\bar{\rho} \sim 3$–4. Рост энергии с расстоянием можно прежде всего интерпретировать как демонстрацию невозможности внесения голого цветового заряда в IL. Без учета эффектов экранирования масса источника, а именно так позволительно трактовать найденный нами дополнительный вклад, неограниченно растет. Приведенная нами оценка асимптотики для энергии евклидова источника в IL является главным вкладом в производящий функционал в квазиклассическом приближении, когда, как предполагается, все константы взаимодействия фиксируются на масштабе среднего размера инстантона $\bar{\rho}$.

Теперь обратимся к случаю цветового диполя в «изосинглетном» состоянии и еще раз убедимся, что мы имеем дело с реакцией IL на поле. Интересующий нас дополнительный к кулоновскому вклад в среднюю энергию $E$ на больших расстояниях определяется интегралом, похожим на случай одного источника, с тем же коэффициентом, но другим средним по положениям инстантона, вида

$$I_d = \int d\boldsymbol{\Delta}_1 \left(\frac{1}{\boldsymbol{\Delta}_1^2} - 2\,\frac{1}{|\boldsymbol{\Delta}_1||\boldsymbol{\Delta}_2|} + \frac{1}{\boldsymbol{\Delta}_2^2}\right).$$

Когда расстояние между источниками $l = |\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2|$ стремится к нулю, поле исчезает и мы должны иметь в ответе ноль. В нашем распоряжении есть только два параметра, от которых интеграл может зависеть, это $L$ и $l$. По соображениям размерности интеграл есть линейная функция от них, но только зависимость от $l$ удовлетворяет требованию обращения интеграла в ноль при $l \to 0$. Для определения же коэффициента легко получить

$$\frac{I_d}{4\pi} = L - 2\left(L - \frac{l}{2}\right) + L = l$$

(здесь по отдельности написаны вклады трех интегралов). Окончательно для дополнительного вклада к средней энергии диполя в IL имеем

$$E \simeq \sigma l.$$

Несколько ниже мы обсудим получающиеся результаты, но пока приведем еще одно обобщение.

Известно, что в случае группы $SU(2)$ задача о двух точечных источниках классического янг-миллсовского поля решается и для произвольной ориентации источников в цветовом пространстве [4, 5], и более того, как и в случае электродинамики, можно выработать самосогласованную непротиворечивую схему приближенного описания динамики источников (частиц) и полей в виде разложения по степеням $v/c$ [5]. Оговоримся, что, формулируя результаты для источников цветового поля, мы, на самом деле, будем иметь в виду исследование свойств некоторых конкретных решений, оставляя в стороне проблему фиксации решения (в частности, выделения «физических» компонент) с помощью наложения калибровочного и начального (краевого) условий. В неабелевой теории, как это наглядно продемонстрировано на примере тривиального решения $A^a_\mu = 0$ [6], эта процедура на сегодняшний день не может быть исследована с той же степенью полноты, как это имеет место, например, в электродинамике. Не будем мы также останавливаться на остроумной конструкции сингулярного источника с экранированным цветовым зарядом, с энергией ниже кулоновской [7] (в терминах цитируемой работы нас интересует только случай $\beta = 0$, $I^a = \delta^{a3} q \left(1 - \frac{2}{3}\beta\right)$, где $q$ — заряд «источника»; $I^a$ — «полный» заряд).

Мы напомним сейчас некоторые необходимые нам результаты, характеризующие интересующее нас решение. Пусть в точках $\mathbf{z}_{1,2}$ помещены источники интенсивности $e\widetilde{P}_1$ и $e\widetilde{P}_2$ соответственно, где знак тильда над буквой обозначает вектор в цветовом пространстве $\widetilde{P} = (P^1, P^2, P^3)$, с единичной нормой $|\widetilde{P}| = (P^\alpha P^\alpha)^{1/2} = 1$. Векторы источников служат в качестве удобного базиса, на который натягивается решение уравнений Янга–Миллса

$$\begin{gathered} \widetilde{B}_4 = \varphi_1 \widetilde{P}_1 + \varphi_2 \widetilde{P}_2, \\ \widetilde{\mathbf{B}} = \mathbf{a} \widetilde{P}_1 \times \widetilde{P}_2. \end{gathered} \tag{14}$$

Если потребовать, чтобы поля стремились к нулю вдали от источников, то такому выбору калибровки отвечает базис векторов-источников, вращающийся вокруг постоянного вектора $\widetilde{\Omega} = \overset{*}{\varphi}_1 \widetilde{P}_1 + \overset{*}{\varphi}_2 \widetilde{P}_2$

$$\begin{gathered} \dot{\widetilde{P}}_1 = g\widetilde{B}_4(\mathbf{z}_1) \times \widetilde{P}_1, \\ \dot{\widetilde{P}}_2 = g\widetilde{B}_4(\mathbf{z}_2) \times \widetilde{P}_2 \end{gathered} \tag{15}$$

с частотой $g|\widetilde{\Omega}|$, где $\overset{*}{\varphi}_1 = \varphi_1(\mathbf{z}_2)$, $\overset{*}{\varphi}_2 = \varphi_2(\mathbf{z}_1)$. Точка над вектором обозначает дифференцирование по $x_4$. Такой же характер решения остается и при переходе к пространству Минковского. Функции $\varphi_{1,2}$ и вектор-функция $\mathbf{a}$ зависят только от $\mathbf{x}$ и определяются из следующей системы уравнений:

$$\begin{gathered} \mathbf{DD}(\varphi - \overset{*}{\varphi}) = -e\delta, \\ \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{a} = \mathbf{j}, \end{gathered} \tag{16}$$

где $\mathbf{D}_{kl} = \boldsymbol{\nabla}\delta_{kl} + g\mathbf{a}C_{kl},\ k, l = 1, 2$, а ток имеет вид

$$\mathbf{j} = g(\varphi - \overset{*}{\varphi})J\mathbf{D}(\varphi - \overset{*}{\varphi}).$$

Столбцы, которые задействованы с оператором $\mathbf{D}$, представляются как

$$\varphi^T = \|\varphi_1, \varphi_2\|, \quad \overset{*}{\varphi}{}^T = \|\, \overset{*}{\varphi}_1, \overset{*}{\varphi}_2 \,\|, \quad \delta^T = \|\delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}_1), \delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}_2)\|.$$

Матрицы $C$ и $J$ определяются следующим образом:

$$C = \left\| \begin{array}{cc} -(\widetilde{P}_1\widetilde{P}_2) & -(\widetilde{P}_2\widetilde{P}_2) \\ (\widetilde{P}_1\widetilde{P}_1) & (\widetilde{P}_1\widetilde{P}_2) \end{array} \right\|, \qquad J = \left\| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{array} \right\|.$$

Как следствие системы (15), модули векторов $\widetilde{P}_{1,2}$, а также их скалярное произведение $(\widetilde{P}_1\widetilde{P}_2)$ не изменяются во «времени». Система уравнений (16) имеет ясный физический смысл. Порожденное двумя точечными источниками цветовое поле само служит источником заряда, поскольку глюоны не нейтральны. В пространстве между зарядами устанавливается самосогласованная картина зарядов и соответствующих токов. Решения этой системы были подробно исследованы как аналитически, так и численно. Оказалось, что при любой константе связи $g$ источники, в целом, взаимодействуют кулоноподобным образом, а если константа связи невелика $\dfrac{g}{4\pi} < \sqrt{2}$, то решение хорошо аппроксимируется простыми кулоновскими потенциалами

$$\varphi_{1,2} = \frac{e}{4\pi}\ \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{z}_{1,2}|}$$

с векторным полем $\mathbf{a}$, определяемым по плотности тока, генерируемой этими потенциалами. В целом векторное поле выглядит как поле постоянного магнита с полюсами, расположенными в точках $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2$. На отрезке прямой, соединяющей источники, поле имеет только продольную компоненту постоянной величины

$$|\mathbf{a}_{\|}| = \frac{e}{4\pi}\ \frac{eg}{|\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2|}.$$

При удалении от отрезка поле резко падает. Полная энергия, сосредоточенная в цветовом поле, оценивается как

$$E_t = \int d\mathbf{x} \frac{\widetilde{\mathbf{E}}^2 + \widetilde{\mathbf{H}}^2}{2} \sim e^2 \frac{(\widetilde{P}_1\widetilde{P}_2)}{l} + g^2 e^4 I \frac{(\widetilde{P}_1 \times \widetilde{P}_2)^2}{l},$$

где $I = \pi(6 - \pi^2/2)$, а члены самодействия источников здесь просто не приведены. Когда расстояние между источниками велико, то частота прецессии быстро стремится к нулю $\sim 1/l$, так что приближенно можно считать базис, составленный из векторов $\widetilde{P}_1, \widetilde{P}_2, \widetilde{P}_1 \times \widetilde{P}_2$, покоящимся. Вкладом во взаимодействие с инстантоном несингулярного векторного поля (по сравнению с кулоновским полем, см. (10)) правомочно пренебречь. Тогда в качестве приближенного решения подойдет простая суперпозиция

$$\widetilde{B}_4 = \varphi_1 \widetilde{P}_1 + \varphi_2 \widetilde{P}_2.$$

Понятно, что вклад такого диполя в среднюю энергию IL на больших расстояниях будет уже пропорционален

$$\frac{I_d}{4\pi} = (\widetilde{P}_1\widetilde{P}_1)L + 2(\widetilde{P}_1\widetilde{P}_2)\left(L - \frac{l}{2}\right) + (\widetilde{P}_2\widetilde{P}_2)L = (\widetilde{P}_1 + \widetilde{P}_2)^2 L - (\widetilde{P}_1\widetilde{P}_2)l. \qquad (17)$$

На малых расстояниях, там где кулоноподобные поля и векторное поле $\mathbf{a}$ велики, вклад инстантонов, по-видимому, сильно подавлен, и это обстоятельство должно быть учтено при нахождении средней энергии диполя. Но в этой работе мы для простоты ограничимся только приведенной оценкой. Полученный результат демонстрирует, что в IL крайне затруднительно обнаружить состояния с открытым цветом и что в задаче имеется малый параметр, поскольку отклонения от антипараллельной ориентации векторов-источников не могут быть большими, так как резонно положить, что $L \sim R_D$ радиуса экранирования, для которого, естественно, в нашей картине имеем: $R_D \geqslant m_p/\sigma$, где $m_p$ — масса легчайшей (не голдстоуновской) стабильной по сильному взаимодействию частицы.

Оценка вклада полевых конфигураций с произвольными положениями источников $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$ и их произвольными ориентациями $\widetilde{P}_1$, $\widetilde{P}_2$ в производящий функционал (3) может быть осуществлена с помощью вариационного принципа максимума, при этом найденная нами средняя энергия евклидовых источников попадет в экспоненту и с точностью до несущественных здесь членов может быть записана в виде фактора подавления состояний с открытым цветом

$$Z \geqslant \mathrm{e}^{-EX_4}$$

(вклад конденсата и оставшаяся кулоновская составляющая здесь не приведены). Простейшую оценку эволюции такой системы можно дать, полагая источники нерелятивистскими частицами большой массы $m_{1,2}$ и рассматривая координаты как функции «времени» $x_4$, равно как и их состояния в изотопическом пространстве, которые будем описывать с помощью соответствующих «изоспиноров» $u^T = (1, 0)$ и $\bar{u}^T = (0, 1)$. Полагая, что изменения этих состояний незначительны, опишем их предполагаемую эволюцию по теории возмущений с помощью матриц $U \simeq 1 + i\boldsymbol{\sigma\lambda}/2$, $V \simeq 1 + i\boldsymbol{\sigma\mu}/2$ для первой и второй частиц соответственно, где $\boldsymbol{\sigma}$ — матрицы Паули. В результате для векторов-источников имеем $P_1^a \simeq \delta^{3a} - \varepsilon^{3ab}\lambda^b$, для первой частицы, и $P_2^a \simeq -\delta^{3a} - \varepsilon^{3ab}\mu^b$ — для второй.

Если интерпретировать фактор подавления на языке потенциальной модели, то для адекватного описания мог бы служить производящий функционал для квантово-механической системы частиц с «изоспинами» вида

$$
\begin{gathered}
Z=\int D[\boldsymbol{\lambda}] D[\mathbf{z}_1]\ D[\boldsymbol{\mu}] D[\mathbf{z}_2]\,\mathrm{e}^{-S}, \\
S \simeq \int dx_4\left(\frac{\mathbf{p}_1^2}{2 m_1}+\frac{\mathbf{p}_2^2}{2 m_2}+\sigma(\widetilde{P}_1+\widetilde{P}_2)^2 R_D-\sigma(\widetilde{P}_1 \widetilde{P}_2)|\mathbf{z}_1-\mathbf{z}_2|+e^2 \frac{(\widetilde{P}_1 \widetilde{P}_2)}{|\mathbf{z}_1-\mathbf{z}_2|}\right),
\end{gathered}
\tag{18}
$$

описывающий эволюцию состояний $\Psi(x_4;\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2;\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})$, здесь $\mathbf{p}_i$ — импульсы частиц (спин частиц не учитываем). В окончательном виде производящий функционал должен выражаться в форме интегрирования по «изоспинорам». Но выражение (18), по-видимому, все же недоучитывает фактор эволюции «изоспинора». Дело в том, что значимыми при интегрировании оказываются только первые и вторые компоненты векторов $\boldsymbol{\lambda\mu}$, т. е. формулу (18) следует рассматривать в качестве приближенного выражения. Кулоновская часть выглядит аналогично электродинамике. В предельном случае, когда плотность IL стремится к нулю, мы должны правильным образом воспроизводить ответы для (анти)параллельных источников. Тем не менее, даже в этом приближении формула (17) и функционал (18) демонстрируют, что система предпочитает эволюционировать только через бесцветные состояния. Вероятность изменения ориентации источников от антипараллельного положения сильно подавляется фактором $\sigma R_D$. Понятно, что число частиц в задаче может быть увеличено, что можно обобщить задачу на случай тождественных частиц, но существенным, по-видимому, окажется интегрирование только по бесцветным состояниям, т. е. просматривается своего рода дуальность интегрирования по «изоспинорам» и по бесцветным (адронным) состояниям.

Суммируя все полученные результаты для среднего действия (энергии) IL в присутствии источников, мы видим, что состояния с открытым цветом сильно подавлены. Для квазиклассической конфигурации, отвечающей изосинглетному состоянию источников, вычисление любой наблюдаемой (не только петли Вильсона) формально приводит к энергии основного состояния, линейно растущей с увеличением расстояния между источниками. Казалось бы, продемонстрированное свойство — как раз то, что требуется для конфайнмента. Однако это вряд ли связано с формированием струны и имеет скорее иной физический смысл. Подробнее мы остановимся на этом в отдельной публикации. Хорошо известное утверждение об отсутствии конфайнмента в IL основывается на таком вычислении потока глюонного поля через контур, в котором молчаливо предполагается, что усреднение по положениям псевдочастиц производится однородно. При этом упускается из вида нетривиальное поведение действия, стоящего в экспоненте производящего функционала. Быстрое убывание ($\sim \Delta^{-4}$) соответствующих корреляторов в IL и недостаточный вклад инстантонов большого размера приводят к слабому для конфайнмента потоку неабелева поля [8]. В нашем случае вильсоновская петля тоже тривиальна, если иметь в виду просто поток глюонного поля через контур. Что же касается вычислений на решетке, где все делается на основе «первых принципов», то в чистой глюодинамике измерения проводятся без влияния внешнего поля, поскольку необходимая в этом случае фиксация калибровки представляет собой все еще неразрешимую проблему. Моделирование поведения массивных фермионов (читай, источников глюонного поля) в инстантонном ансамбле на решетке ограничено современными вычислительными возможностями. Отметим также, что типичные для решеточных вычислений конфигурации для констант связи в области кроссовера (фазового перехода) имеют мало общего с инстантонными. Инстантоны проявляются, как известно, при распаде конфайнирующих полей в процессе охлаждения. Господствующая на сегодняшний день точка зрения на роль инстантонов в вакууме сводится к тезису, что эти конфигурации ответственны за спонтанное нарушение киральной инвариантности и что помимо них имеются другие, ответственные за конфайнмент. В этой двухкомпонентной модели инстантоны подчинены воздействию длинноволновой конфайнирующей составляющей. Их поле оказывается деформированным и экспоненциально спадает на больших расстояниях [9]. Получающаяся при этом картина распределения инстантонов по размерам отвечает имеющимся феноменологическим данным. В этом смысле рассматриваемый нами анзац неполон. Однако, как продемонстрировано в этой работе, мы довольно неожиданно обнаруживаем, что и в такой форме суперпозиция сингулярных инстантонов и внешнего поля формально может развивать конфайнирующий потенциал. Слабым пунктом в нашем предположении о виде суперпозиционного анзаца может оказаться выбор решения, описывающего источник, и мы намерены исследовать этот вопрос специально.

Вообще говоря, можно заключить, что для получения интересующего нас поведения средней энергии необходимы две составляющие — длинноволновое поле и стохастическая компонента. Оба этих свойства мы находим в суперпозиции регулярных инстантонов, а также меронов. Интересно отметить, что в работе [10] анонсирован конфайнмент. Оказывается, если повторить наше рассмотрение с внешним полем в ансамбле регулярных инстантонов, то ситуация с коэффициентом натяжения еще более усугубится — коэффициент натяжения будет квадратично расходиться $\sigma \sim L^2$. Формально это выглядит как суперконфайнмент, хотя понятно, что суперпозиция регулярных инстантонов в высшей степени искусственная конфигурация.

В заключение мы хотели бы отметить, что предложенный способ приближенного вычисления производящего функционала для тяжелых источников евклидова неабелева поля в рамках квазиклассического приближения приводит нас к довольно интересной картине динамики подобных объектов, со свойствами, вполне отвечающими феноменологии сильновзаимодействующих частиц.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Callan C. G., Dashen R., Gross D. J.* // Phys. Rev. D. 1978. V. 17. P. 2717;
*Callan C. G., Dashen R., Gross D. J.* // Phys. Lett. B. 1977. V. 66. P. 375.

2. *Diakonov D. I., Petrov V. Yu.* // Nucl. Phys. B. 1984. V. 245. P. 259;
*Diakonov D. I., Petrov V. Yu.* // Conf. «Hadronic Matter under Extreme Conditions». Kiev, 1986. P. 192;
*Diakonov D. I., Petrov V. Yu., Pobylitsa P. V.* // Phys. Lett. B. 1989. V. 226. P. 471;
*Ilgenfritz E.-M., Müller-Preussker M.* // Nucl. Phys. B. 1981. V. 184. P. 443;
*Schäfer T., Shuryak E. V.* // Rev. Mod. Phys. 1998. V. 70. P. 323.

3. *Molodtsov S. V., Snigirev A. M., Zinovjev G. M.* // Phys. Rev. D. 1999. V. 60. P. 056006;
*Molodtsov S. V., Snigirev A. M., Zinovjev G. M.* // Lattice Fermions and Structure of the Vacuum. Dordrecht, 2000. P. 307;
*Зиновьев Г. М., Молодцов С. В., Снигирев А. М.* // ЯФ. 2000. Т. 63. С. 975.

4. *Хриплович И. Б.* // ЖЭТФ. 1978. Т. 74. С. 37.

5. *Головизнин В. В., Молодцов С. В., Снигирев А. М.* // ЯФ. 1993. Т. 56. С. 123.

6. *Логачев М. Ю.* // ТМФ. 1978. Т. 70. С. 412.

7. *Sikivie P., Weiss N.* // Phys. Rev. D. 1979. V. 20. P. 487.

8. *Chen D. et al.* // Nucl. Phys. Proc. Suppl. 1999. V. 73. P. 512;
*Diakonov D. I., Petrov V. Yu.* // Phys. Lett. B. 1989. V. 224. P. 131;
*Diakonov D. I., Petrov V. Yu., Pobylitsa P. V.* // Ibid. V. 226. P. 372.

9. *Dorokhov A. E. et al.* // Eur. Phys. J. C. 2000. V. 13. P. 331.

10. *Negele J. W., Lenz F., Thies M.* hep-lat/0409083.