Письма в ЭЧАЯ. 2006. Т. 3, № 5(134). С. 17–33

УДК 539.1

КОНЦЕПЦИЯ ЛОКАЛИЗАЦИИ СОСТОЯНИЙ ВИГНЕРА–НЬЮТОНА И КОММУТАТИВНОСТЬ КОНФИГУРАЦИОННОГО ПРОСТРАНСТВА

Р. М. Мир-Касимов[1]

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Требование коммутативности компонент оператора положения неявно входит в число постулатов Вигнера–Ньютона, определяющих локализованное состояние релятивистской частицы. Снимая это ограничение, мы приходим к более общей концепции локализации, основанной на использовании представлений группы Пуанкаре.

The requirement of commutativity of the components of the position operator is implicitly included to the set of the Wiegner–Newton postulates defining the localized state of relativistic particle. Omitting this constraint we obtain more general comcept of localization based on the Poincare group representation.

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа представляет собой попытку рассмотреть с более общей точки зрения старую проблему об операторе координаты частицы в релятивистской квантовой теории [1]. Понятие релятивистского оператора положения является необходимым элементом любой квантовой теории взаимодействия частиц, прежде всего, вследствие необходимости сравнивать результаты измерений с предсказаниями теории и учитывать соотношения неопределенности. Изучение и обобщения концепции координаты в релятивистской квантовой теории начались практически одновременно с возникновением последней. Главным стимулом для поисков (и обобщений) в этой области были ультрафиолетовые расходимости — явление общего порядка, присущее всем формулировкам квантовой теории поля. В частности, возникли теории с некоммутативным пространством-временем. (См. [4, 7, 8] и ссылки на другие работы по квантовому пространству-времени, приведенные в этих работах.) Важным критерием правильности пространственно-временного описания является формулировка и решение релятивистской проблемы двух тел. Поскольку релятивистские связанные состояния реально существуют, мы должны иметь способ отделять координаты центра масс (ЦМ) от переменных, описывающих внутреннее движение.

В нерелятивистском случае при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую координаты ЦМ испытывают преобразования Галилея. При этом имеет место разделение переменных ЦМ $\mathbf{R}$ и относительных $\mathbf{r}$. Часть гамильтониана, описывающая

[1]Часть данной работы выполнена в Измирском технологическом институте, Измир, Турция.

относительное движение, инвариантна относительно преобразований Галилея. Необходимым условием этого является сферическая симметрия потенциала $V(r)$, т. е. зависимость его только от относительного расстояния между взаимодействующими частицами $r = |\mathbf{r}|$. В этом случае (свободное) движение составной частицы, т. е. движение системы как целого, описывается неприводимыми унитарными представлениями группы Галилея. По этой причине было бы более естественно называть потенциалы вида $V(r)$ галилеевыми потенциалами. Внутреннее движение системы сводится к движению эффективной частицы с приведенной массой μ в поле потенциала $V(r)$. Сама абсолютная величина относительной координаты r является галилеевым инвариантом. Даже в свободном случае это разделение переменных является важным свойством теории, позволяющим понять многие свойства нерелятивистского движения. Мы можем также, по аналогии с [1], называть системы с потенциалами вида $V(r)$ *галилеевым элементарными системами*.

Построение аналогичной столь же ясной картины в релятивистском случае (подстановка группа Галилея $\rightarrow$ группа Лоренца) — важная проблема, решение которой пока не найдено. Физически картина ясна. Релятивистские составные частицы существуют. Например, π-мезон, состоящий из кварка и антикварка, является релятивистской частицей. Подчеркнем, что согласно [1] π-мезон является *элементарной системой*. Стоит также сказать о высокой эффективности нерелятивистских составных моделей для составных моделей адронов. С одной стороны, эти нерелятивистские модели (со сферически-симметричными потенциалами) хорошо описывают спектр состояний адронов, т. е. элементарных систем. С другой стороны, адроны — релятивистские объекты. Мы можем полагать, что вышеуказанные потенциальные модели адронов являются некоторым приближением в рамках (пока неизвестной) релятивистской теории, обладающей в то же самое время вышеописанными инвариантными сойствами. Подчеркнем также, что элементарные системы играют важную роль как начальные и конечные состояния в теории рассеяния.

Важно подчеркнуть, что, имея в виду потенциальные релятивистские модели, мы должны найти такой релятивистский аналог релятивистской координаты $\mathbf{r}$, от которой зависит потенциал взаимодействия таким образом, что общая релятивистская инвариантность соблюдается подобно галилеевой инвариантности в нерелятивистской проблеме двух тел с потенциалом $V(r)$, зависящим от относительной координаты.

Эти рассуждения можно продолжить, однако ясно, что проблема определения релятивистского оператора положения *заслуживает внимания*. Основные идеи, относящиеся к этой прблеме, были высказаны Вигнером и Ньютоном [1]. Их основной результат состоит в том, что для изолированной частицы понятие локализуемости и соответствующих (*коммутирующих*) наблюдаемых однозначно определяется релятивистской кинематикой. С другой стороны, не существует какой-либо релятивистской квантовой теории взаимодействия, основанной на этих идеях. В настоящей работе мы рассмотрим альтернативную возможность, основанную на введении в теорию некоммутирующих релятивистских операторов положения, удовлетворяющих всем постулатам Вигнера–Ньютона.

Подчеркнем, что стандартные квантово-механические операторы положения $\hat{\mathbf{x}} = i\hbar\nabla_{\mathbf{p}}$ связаны с евклидовыми структурами, в терминах которых они рассматриваются. Приведем цитату из работы [1]: «Существование и единственность понятий локализуемости для физической системы являются свойствами, которые зависят только от закона преобразования системы относительно группы Евклида, т. е. группы всех пространственных трансляций и вращений. Анализ локализуемости в лоренц- и галилеево-инвариантных случаях связан с рассуждениями о том, какая евклидова группа может здесь возникнуть». Обе группы — Галилея и Пуанкаре — содержат группу Евклида как свою подгруппу. Однако, может быть, существуют другие реализации евклидовой группы в рамках теории представлений, которые допускают другое определение оператора положения. Цель настоящей работы — вновь привлечь внимание к существованию таких реализаций и показать, что возникающие здесь евклидовы структуры [4, 7] позволяют определить непротиворечивым образом релятивистский оператор положения и концепцию локализации релятивистской частицы.

Напомним два ключевых положения работы [1]. (Концепции локализации релятивистских состояний Вигнера–Ньютона посвящено большое количество работ. См., например, [10–14] и приведенные там ссылки.)

• **Элементарные системы.** Таковыми являются системы, состояния которых преобразуются по неприводимым представлениям группы Пуанкаре, *т. е. волновые функции сплошного спектра* [1]. Это условие вполне однозначно. «...Все состояния системы могут быть получены из релятивистского преобразования *любого* состояния с помощью суперпозиции. Иными словами, не должно существовать релятивистски-инвариантного способа отличить между собой состояния системы, к которым применим принцип суперпозиции» [1].

• **Частицы.** Авторы работы [1] подчеркивают, что данное понятие не может быть (во всяком случае на момент написания статьи) определено с той же степенью однозначности, что и элементарная система. Согласно [1] это — бесструктурные объекты, удовлетворяющие следующим ограничениям: а) состояния частицы представляют собой элементарную систему. б) «Не следует рассматривать частицу, как объединение других частиц». Подчеркнем, что данные слова были написаны более 50 лет тому назад. Несмотря на огромный прогресс в «физике частиц», ясного понятия (элементарной) частицы не существует до сих пор. Введенные Вигнером и Ньютоном понятия элементарной системы и частицы затенены другими понятиями, введенными позднее и отнюдь не проясняющими ситуацию. Мы не будем углубляться в данную тему. Подчеркнем лишь, что возможность реализации связанных состояний элементарных систем как новых элементарных систем очевидно реализуется в природе. Иначе трудно говорить о стабильных адронах (протон) как составных составных состояниях кварков. Мы будем называть такие состояния релятивистскими связанными состояниями. Это противоречит высказыванию (правда, сделанному с оговоркой) Вигнера, приведенному выше. Подчеркнем, что непротиворечивого понятия релятивистского связанного состояния также не существует [15, 16].

Тот факт, что многообразие физически реализуемых состояний содержит лишь решения с положительной энергией, приводит к ряду следствий для наблюдаемых. Рассмотрим решения уравнения Клейна–Гордона φ, ψ:

$$\varphi,\, \psi \in \big\{(+) : p^{\mu} p_{\mu} = (p^0)^2 \,-\, \tilde{p}^2 = m^2 c^2, \quad p^0 \,\geqslant\, 0\big\} \tag{1}$$

с естественной метрикой в гильбертовом пространстве

$$(\varphi,\, \psi) = \int\limits_{(+)} d\Omega_{\mathbf{p}}\, \overline{\varphi(\mathbf{p})} \psi(\mathbf{p}), \quad d\Omega_{\mathbf{p}} = \frac{d\mathbf{p}mc}{p^0}. \tag{2}$$

Стандартный оператор положения квантовой механики

$$\hat{\hat{\mathbf{x}}} = i\hbar\nabla_p \tag{3}$$

неэрмитов в метрике (2):

$$\left(\varphi,\, \hat{\hat{\mathbf{x}}}\psi\right) = \int\limits_{(+)} d\Omega_{\mathbf{p}}\, \overline{\varphi(\mathbf{p})}\, i\hbar\nabla_p\, \psi(\mathbf{p}) = \int\limits_{(+)} d\Omega_{\mathbf{p}}\, \overline{\left[\left(i\hbar\nabla_p - \frac{i\hbar\mathbf{p}}{\mathbf{p}^2 + m^2c^2}\right)\varphi(\mathbf{p})\right]}\, \psi(\mathbf{p}). \quad (4)$$

Иными словами, величина $i\hbar\nabla_p$ не соответствует какой-либо наблюдаемой и ее нельзя трактовать как физический оператор. Отсюда также следует, что волновая функция, решение уравнения Клейна–Гордона, не может расматриваться как амплитуда вероятности обнаружить частицу в точке $\mathbf{x}$ в момент времени x^0.

Чтобы ответить на вопрос: какова вероятность обнаружить частицу в точке $\mathbf{y}$ в некоторый момент времени y^0 мы должны:

1) построить эрмитов оператор, который мог бы претендовать на роль оператора положения;

2) найти его собственные функции $\psi_{\mathbf{y},\,y^0}(x)$.

Если частица находится в состоянии, которому соответствует волновая функция $\varphi(x)$, то вероятность обнаружить частицу в точке $\mathbf{y}$ в момент времени $y^0 = x^0$ будет равна $\left(\psi_{\mathbf{y},\,x^0}(x),\, \varphi\right)$.

Простейший способ определить оператор положения — это принять его равным эрмитовой части оператора $\hat{\mathbf{x}} = i\hbar\nabla_p$. Мы обозначим этот оператор через $\hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{NW}}$:

$$\hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{NW}} = \frac{1}{2}\left[\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{x}}^{\dagger}\right] = i\hbar\nabla_p - \frac{i\hbar}{2}\,\frac{\mathbf{p}}{\mathbf{p}^2 + m^2c^2}. \quad (5)$$

Ньютон и Вигнер вывели этот оператор исходя из ряда условий (постулатов), которым должны удовлетворять локализованные состояния:

а) Состояния, представляющие систему, локализованную в момент времени x^0 в положении $\mathbf{y}$, представляют собой линейное многообразие S_0, такое, что суперпозиция двух элементов данного многообразия является элементом того же многообразия. Суперпозиция двух локализованных состояний локализована таким же образом, что и исходные состояния.

б) Любой элемент S_0 может быть получен из исходного элемента путем пространственных вращений и пространственных и временных отражений. Иными словами, многообразиие, представляющее состояние, локализованное в начале координат, инвариантно относительно вращений около начала координат и пространственно-временных отражений.

в) Если состояние $\psi_{\mathbf{0}}$ локализовано (указанным выше образом) в начале координат, то пространственный сдвиг

$$\mathbf{0} \longrightarrow \mathbf{a} \quad (6)$$

переводит его в состояние $\psi_{\mathbf{a}}$, ортогональное ко всем состояниям $\in S_0$.

г) Условие регулярности: все генераторы группы Лоренца, действуя на локализованные состояния, не нарушают условия нормировки. Если ψ нормализуема, то

$$\frac{(M^{\mu\nu}\,\psi,\, M^{\mu\nu}\,\psi,)}{(\psi,\,\psi)} < \infty. \quad (7)$$

Данное условие исключает разрывные функции из числа локализуемых состояний и является существенным при фиксировании фазы волновой функции локализованного состояния.

Принципиально важное требование коммутативности компонент релятивистского оператора положения между собой не включено авторами работы [1] в список основных требований. Очевидно, авторы считали данное условие самоочевидным. В этой связи также важна работа [3]. Ниже мы будем пользоваться системой единиц, в которой $\hbar = c = 1$ если не оговорено обратное. Обозначим через $\psi_{\mathbf{0}}(\mathbf{k})$ волновую функцию в импульсном представлении состояния, локализованного в начале координат $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ в момент времени $x^0 = 0$. Оператор трансляции (6) в *импульсном пространстве* есть просто оператор умножения на функцию

$$\mathrm{e}^{-i\mathbf{k}\mathbf{a}}, \tag{8}$$

так что состояние $\psi_{\mathbf{a}}(\mathbf{k})$, полученное трансляцией состояния $\psi_{\mathbf{0}}$ на вектор $\mathbf{a}$ локализовано в точке $\mathbf{a}$ в момент времени $a^0 = x^0 = 0$ и имеет вид

$$\psi_{\mathbf{a}}(\mathbf{k}) = \mathrm{e}^{-i\mathbf{k}\mathbf{a}}\psi_{\mathbf{0}}(\mathbf{k}). \tag{9}$$

Это преобразованное состояние в соответствии с в) должно быть ортогонально к $\psi_{\mathbf{0}}(\mathbf{k})$:

$$(\psi_{\mathbf{a}},\, \psi_{\mathbf{0}}) = \delta(\mathbf{a}) = \int d\Omega_{\mathbf{k}}\, |\psi_{\mathbf{0}}(\mathbf{k})\,|^2\, \mathrm{e}^{-i\mathbf{k}\mathbf{a}} = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{k}\, \mathrm{e}^{-i\mathbf{k}\mathbf{a}}. \tag{10}$$

Данное соотношение выполняется, если $|\psi_{\mathbf{0}}(\mathbf{k})\,|^2 = \dfrac{k^0}{(2\pi)^3}$. Принимая во внимание условие регулярности (7), благодаря которому невозможно присутствие какого-либо фазового множителя, зависящего от $\mathbf{k}$, полагая постоянный фактор равным 1, получаем волновую функцию состояния, локализованного в начале координат в момент времени $x^0 = 0$,

$$\psi_{\mathbf{0}}(\mathbf{k}) = (2\pi)^{-3/2}\,\left(k^0\right)^{1/2} \tag{11}$$

и для волновой функции состояния, локализованного в этот же момент времени в точке $\mathbf{y}$,

$$\psi_{\mathbf{y}}(\mathbf{k}) = (2\pi)^{-3/2}\,\mathrm{e}^{-i\mathbf{k}\mathbf{y}}\,\left(k^0\right)^{1/2}. \tag{12}$$

Для волновой функции состояния $\psi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$, локализованного (в момент времени x^0) в конфигурационном пространстве, получаем

$$\begin{aligned}\psi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) &= \int d\Omega_{\mathbf{k}}\, \mathrm{e}^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}\, \psi_{\mathbf{y}}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{k^0}}\, \mathrm{e}^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} = \\ &= \mathrm{const}\left(\frac{mc}{\hbar r}\right)^{5/4} K_{5/4}\left(\frac{r}{\lambda_0}\right), \quad r = |\mathbf{x}-\mathbf{y}|, \quad \lambda_0 = \frac{\hbar}{mc}, \end{aligned} \tag{13}$$

где $K_\nu(z)$ — функция Мак-Дональда; λ_0 — комптоновская длина волны частицы.

Замечания

Первое: Величина $\psi_{\mathbf{0}}(\mathbf{k})$ является собственной функцией оператора положения Вигнера–Ньютона:

$$\hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{NW}}\,\left\{\mathrm{e}^{-i\mathbf{k}\mathbf{y}}\,\left(k^0\right)^{1/2}\right\} = i\left\{\nabla_{\mathbf{k}} - \frac{1}{2}\,\frac{\mathbf{k}}{(k_0)^2}\right\}\left\{\mathrm{e}^{-i\mathbf{k}\mathbf{y}}\,{k_0}^{1/2}\right\} = \mathbf{y}\left\{\mathrm{e}^{-i\mathbf{k}\mathbf{y}}\,{k_0}^{1/2}\right\}. \tag{14}$$

Второе: В конфигурационном пространстве $\hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{NW}}$ является нелокальным оператором:

$$\hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{NW}} = \left\{ \hat{\mathbf{x}} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{\triangle + m^2c^2}\,\nabla \right\}. \tag{15}$$

Третье: В отличие от нерелятивистского случая, локализованная волновая функция не равна $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$, а представляет собой величину, распределенную в пространственной области, имеющую размер порядка комптоновской длины волны частицы λ_0. Это связано с тем, что $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ не может быть сконструирована только из решений, отвечающих положительной энергии.

Четвертое: Выполняются коммутационные соотношения:

$$\left[\hat{x}^i_{\mathrm{NW}}, \hat{x}^j_{\mathrm{NW}}\right] = 0, \quad \left[\hat{x}^i_{\mathrm{NW}}, p^j\right] = i\delta_{ij}. \tag{16}$$

Пятое: Оператор положения $\hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{NW}}$ является вектором по отношению к вращениям. При пространственных вращениях имеем

$$T_{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{NW}}T^{-1}_{\mathbf{a}}. \tag{17}$$

Шестое: В нерелятивистском пределе

$$\hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{NW}} \longrightarrow \hat{\mathbf{x}} = i\,\nabla_{\mathbf{p}}. \tag{18}$$

Статья организована следующим образом. В разд. 1 рассматривается некоммутативная альтернатива координате Вигнера–Ньютона и связаннная с ней концепция релятивистского конфигурационного пространства. В разд. 2 рассмотрена релятивистская проблема двух тел. Разд. 3 посвящен случаю нулевой массы.

1. АЛЬТЕРНАТИВА ТЕОРИИ ВИГНЕРА–НЬЮТОНА

В теории Вигнера–Ньютона импульсное пространпство играет существенную роль. Получить в явном виде нелокальный оператор $\hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{NW}}$ (15) непосредственно в конфигурационном пространстве было бы весьма затруднительно.

Существует, однако, еще одно обстоятельство, существенное для формулировки основной идеи настоящей работы. В работе [2] важную роль играет тот факт, что волновые функции состояний, локализованных в различных точках, связаны между собой преобразованием трансляции

$$\mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{x} + \mathbf{a}, \tag{19}$$

которое выражается также теоремой сложения для плоских волн — матричных элементов группы трансляций в виде

$$\mathrm{e}^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}+\mathbf{a})} = \mathrm{e}^{i\mathbf{k}\,\mathbf{x}}\,\mathrm{e}^{i\mathbf{k}\,\mathbf{a}}. \tag{20}$$

Последнее соотношение имеет две математические интерпретации.

1. Будем, следуя [2], рассматривать трансляции в конфигурационном пространстве. В этом случае плоские волны (экспоненты) являются матричными элементами одного и того же унитарного неприводимого представления трансляций конфигурационного

пространства (19), соответствующими старшему весу (значению импульса) $\mathbf{k}$. Соответственно преобразование Фурье

$$\psi(\mathbf{x}) = \int d\mathbf{k}\, \mathrm{e}^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}\, \psi(\mathbf{k}) \tag{21}$$

является разложением по матричным элементам унитарных неприводимых представлений группы трансляций конфигурационного пространства.

2. Рассмотрим (в дополнение к [1]) трансляции импульсного пространства на вектор $\mathbf{k}$. В этом случае выражение в формуле (20) равно произведению матричных элементов двух различных неприводимых унитарных представлений сдвигов импульсного пространства, отвечающих старшим весам $\mathbf{x}$ и $\mathbf{a}$. При этом оба матричных элемента соответствуют одному и тому же вектору сдвига $\mathbf{k}$ в импульсном пространстве. *Обратное* преобразование Фурье является разложением по матричным элементам унитарных неприводимых представлений группы трансляций импульсного пространства.

Возможность такой двоякой интерпретации произведения (20) как 1) произведения преобразований трансляции в рамках одного и того же представления — и дуально, как 2) произведения двух различных представлений — специфична для евклидовых трансляций. В нерелятивистской теории различие между 1) и 2) формально и не играет большой роли, поскольку конфигурационное и импульсное пространства в нерелятивистской теории с математической точки зрения изоморфны. Конечно, физический смысл конфигурационного и импульсного пространств различен. Например, трансляции импульсного пространства соответствуют преобразованиям Галилея:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &\longrightarrow \mathbf{x} + \mathbf{V}\,t, \\ \dot{\mathbf{x}} &\longrightarrow \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{V}, \\ m\,\dot{\mathbf{x}} &\longrightarrow m\,\dot{\mathbf{x}} + m\,\mathbf{V}, \\ \mathbf{p} &\longrightarrow \mathbf{p} + \mathbf{k}, \quad \mathbf{p} = m\,\dot{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{k} = m\,\mathbf{V}. \end{aligned} \tag{22}$$

Оператор положения (3) является генератором трансляций импульсного пространства.

Сформулируем теперь альтернативу концепции Вигнера–Ньютона. Она основана на простых наблюдениях.

Из (1) следует, что многообразие состояний релятивистской частицы представляет собой пространство Лобачевского. Трехмерное импульсное пространство релятивистской частицы есть пространство постоянной отрицательной кривизны. Будем строить релятивистскую теорию одночастичного состояния как прямое обобщение нерелятивистской теории, используя этот факт как отправную точку. Таким образом, переходя к релятивистской теории, мы должны произвести замену: группа Галилея $\longrightarrow$ группа Лоренца, генераторы преобразования Галилея $\longrightarrow$ генераторы преобразования Лоренца

$$\hat{\mathbf{x}} = i\hbar\nabla_p \;\longrightarrow \hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{rel}}, \tag{23}$$

где

$$\hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{rel}} = i\hbar\sqrt{1 + \frac{\mathbf{p}^2}{m^2c^2}}\,\nabla_p. \tag{24}$$

Таким образом, мы рассматриваем выражение (24) в качестве кандидата на роль релятивистского оператора положения. Отсюда непосредственно вытекает, что в рамках этого, геометрически естественного подхода, мы должны, в качестве первого шага, отказаться от коммутативности компонент оператора положения. Подчеркнем еще раз, что требование коммутативности неявно входит в число естественных положений, определяющих релятивистский оператор положения в [1].

Операторы (24) эрмитовы в метрике (2). Поэтому, если отказаться от требования коммутативности, можно утверждать, что эрмитовы операторы (24) являются *наиболее простыми релятивистскими оператороми положения.*

Рассмотрим теперь проблему измерения. Очевидно, в отличие от коммутативного случая, различные проекции координаты не могут быть одновременно точно измерены. Именно по этой причине рассматривались только коммутирующие претенденты на роль оператора положения. Отметим, что А. Уайтмен в важной работе [3] полностью отвергает возможность рассмотрения некоммутирующих операторов положения именно с точки зрения измеримости: «...данные операторы не могут рассматриваться как операторы положения, *как наблюдаемые*, поскольку их три компоненты не коммутируют». С другой стороны, в принципе, нет причин считать, что сама концепция конфигурационного пространства изменяется в релятивистском случае по сравнению с нерелятивистской теорией. Следствием такой модификации должно быть изменение всей ситуации с измеримостью положения, соотношениями неопределенности и т. д.

Чтобы построить необходимое релятивистское обобщение концепции конфигурационного пространства, вернемся на время к нерелятивистскому случаю. Поскольку компоненты оператора положения коммутируют, мы можем одновременно диагонализовать все три компоненты. В то же время многие другие операторы из универсальной обертывающей алгебры Ли евклидовой группы импульсного пространства также могут быть диагонализованы. Например, оператор Казимира $\hat{\mathbf{x}}^2$ — оператор квадрата расстояния.

$$\begin{gathered}\left[\hat{\mathbf{x}}^2\right]\, \mathrm{e}^{i\mathbf{p}\mathbf{x}} = \triangle_{\mathbf{p}}\, \mathrm{e}^{i\mathbf{p}\mathbf{x}} = \mathbf{x}^2\, \mathrm{e}^{i\mathbf{p}\mathbf{x}},\\ \hat{x}^i\, \mathrm{e}^{i\mathbf{p}\mathbf{x}} = x^i\, \mathrm{e}^{i\mathbf{p}\mathbf{x}},\\ 0 \leqslant x < \infty, \qquad -\infty < x^i < \infty.\end{gathered} \tag{25}$$

Важно, что общие собственные функции этих операторов $\mathrm{e}^{i\mathbf{p}\mathbf{x}}$ являются ядрами преобразования Фурье, связывающего евклидово импульсное пространство нерелятивистской квантовой механики и *соответствующее* конфигурационное пространство.

В релятивистском случае естественно рассматривать в качестве импульсного пространства, адекватного с физической точки зрения, пространство Лобачевского (1) физических решений уравнения Клейна–Гордона. Интегрирование по этому пространству (с лоренц-инвариантной мерой $d\Omega_{\mathbf{p}}$) определяется соотношением (2). Следуя идее, высказанной в предыдущем абзаце, рассмотрим универсальную обертывающую алгебру алгебры Ли группы Лоренца, определим максимальное множество (полную систему) взаимно коммутирующих операторов, определим их общие собственные функции (новые плоские волны) и спектр. Оператор Казимира для алгебры Ли группы Лоренца может быть выбран в виде

$$\hat{r}^2 = \hat{\mathbf{x}}^2_{\mathrm{rel}} - \frac{\mathbf{M}^2}{m^2c^2} - \frac{\hbar^2}{m^2c^2}, \tag{26}$$

где $\mathbf{M}$ — оператор углового момента. В нерелятивистском пределе выражение (26) переходит в $\hat{\mathbf{x}}^2$ (см. (25)). Спектр величины r для унитарных представлений имеет непрерывную и дискретную части. Все эти представления находят применения в различных релятивистских моделях взаимодействия. Мы сконцентрируемся на так называемой главной серии, для которой $0 \leqslant r < \infty$. Собственные функции оператора $\hat{r}^2$ являются матричными элементами унитарных неприводимых представлений группы Лоренца — ядрами преобразования Гельфанда–Граева:

$$\hat{r}^2 \langle \mathbf{p}|\mathbf{r}\rangle = r^2 \langle \mathbf{p}|\mathbf{r}\rangle, \qquad \langle \mathbf{r}|\mathbf{p}\rangle = \langle \mathbf{p}|\mathbf{r}\rangle^*. \tag{27}$$

Данные величины играют роль плоских волн в рассматриваемом релятивистском формализме. В явном виде

$$\langle \mathbf{r}|\mathbf{p}\rangle = \left(\frac{p^0 - \mathbf{pn}}{mc}\right)^{-1-i\,(rmc)/\hbar}, \qquad \mathbf{n}^2 = 1. \tag{28}$$

Используя единичный вектор $\mathbf{n}$, мы вводим символ $\mathbf{r}$ — по определению

$$\mathbf{r} = r\mathbf{n}. \tag{29}$$

Будем называть пространство векторов $\mathbf{r}$ релятивистским конфигурационным пространством [4]. Парциальное разложение плоской волны (28) имеет вид

$$\begin{gathered}\langle \mathbf{r}|\mathbf{p}\rangle = \sum_{l=0}^{\infty} i^l\,(2l+1)\,p_l(\cosh\chi,\, r)P_l(\mathbf{n}_p\cdot\mathbf{n}),\\ p^0 = \cosh\chi, \quad \mathbf{p} = \sinh\chi\,\mathbf{n}_p, \quad \mathbf{n}_p^2 = 1,\end{gathered} \tag{30}$$

где

$$p_l(\cosh\chi,\, r) = (-1)^l \sqrt{\frac{\pi}{2\sinh\chi}}\,\frac{\Gamma(ir+l+1)}{\Gamma(ir+1)} P^{-(1/2)+ir}_{-(1/2)+ir}(\cosh\chi). \tag{31}$$

Разложение (30) аналогично нерелятивистскому

$$\mathrm{e}^{i\mathbf{pr}} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l\,(2l+1)\,j_l(p\,r)P_l(\mathbf{n}_p\cdot\mathbf{n}), \tag{32}$$

где $j_l(p\,r) = \sqrt{\pi/(2pr)}\,J_{l+(1/2)}$ — сферические функции Бесселя.

В нерелятивистском пределе

$$p_l(\cosh\chi,\, r) \longrightarrow j_l(p\,r). \tag{33}$$

Условия ортогональности и полноты для релятивистских плоских волн имеют вид

$$\begin{gathered}\frac{1}{(2\pi)^3}\int \langle \mathbf{r}|\mathbf{p}\rangle\,\langle \mathbf{p}|\mathbf{r}'\rangle\, d\Omega_{\mathbf{p}} = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'),\\ \frac{1}{(2\pi)^3}\int \langle \mathbf{p}|\mathbf{r}\rangle\,\langle \mathbf{r}|\mathbf{p}'\rangle\, d\mathbf{r} = \delta(\mathbf{p}\,(-)\mathbf{p}') = \delta(\mathbf{p}\,-\mathbf{p}')\,\frac{p^0}{mc}.\end{gathered} \tag{34}$$

Релятивистское конфигурационное пространство является квантовым трехмерным евклидовым пространством [7]. Квантовая природа $\mathbf{r}$-пространства предопределена тем фактом, что алгебра Ли соответствующей группы изометрий реализуется в рамках некоммутативного дифференциального исчисления. Операторы импульса (генераторы трансляций) имеют вид

$$
\begin{aligned}
H_0 = \hat{p}^0 &= \cosh i\frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r}\sinh i\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\triangle_{\vartheta,\psi}}{2r^2}\exp\left(i\frac{\partial}{\partial r}\right),\\
\hat{p}^1 &= -\sin\vartheta\cos\psi\left(\exp\left(i\frac{\partial}{\partial r}\right) - H_0\right) -\\
&\quad - i\left(\frac{\cos\vartheta\cos\psi}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta} - \frac{\sin\psi}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\psi}\right)\exp\left(i\frac{\partial}{\partial r}\right),\\
\hat{p}^2 &= -\sin\vartheta\sin\psi\left(\exp\left(i\frac{\partial}{\partial r}\right) - H_0\right) -\\
&\quad - i\left(\frac{\cos\vartheta\sin\psi}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{\cos\psi}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\psi}\right)\exp\left(i\frac{\partial}{\partial r}\right),\\
\hat{p}^3 &= -\cos\vartheta\left(\exp\left(i\frac{\partial}{\partial r}\right) - H_0\right) + i\frac{\sin\vartheta}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\exp\left(i\frac{\partial}{\partial r}\right).
\end{aligned}
\tag{35}
$$

Они играют роль внутренних производных в соответствующем некоммутативном дифференциальном исчислении. Операторы p^μ коммутируют

$$[\hat{p}^\mu, \hat{p}^\nu] = 0, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3. \tag{36}$$

Однако соответствующие дифференциалы функций координат не коммутируют с самими функциями. Детали читатель может найти, например, в [7, 17, 18]. Отметим, что элемент объема интегрирования $d\mathbf{r}$ во второй формуле в (1) соответствует евклидовой геометрии.

Общими собственными функциями операторов $\hat{p}^\mu$ являются $\langle\mathbf{r}|\mathbf{p}\rangle$ (27)

$$\hat{p}^\mu\langle\mathbf{r}|\mathbf{p}\rangle = p^\mu\langle\mathbf{r}|\mathbf{p}\rangle. \tag{37}$$

Из (37) мы заключаем, что «плоские волны» (27) действительно описывают свободное релятивистское движение, т. е. движение релятивистской частиицы с определенным значением 4-импульса. Операторы $\hat{p}^\mu$ тождественно удовлетворяют релятивистскому соотношению между энергией, импульсом и массой. (1). Важно подчеркнуть также, что в терминах этих операторов находит свое решение проблема «извлечения квадратного корня» в соотношении $p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2c^2}$:

$$\hat{p}^0\,\langle\mathbf{r}|\mathbf{p}\rangle = p^0\,\langle\mathbf{r}|\mathbf{p}\rangle = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2c^2}\,\langle\mathbf{r}|\mathbf{p}\rangle. \tag{38}$$

В нерелятивистском пределе

$$|\mathbf{p}| \ll mc, \quad p^0 \cong mc + \frac{\mathbf{p}^2}{2mc}, \quad r \gg \frac{\hbar}{mc} \tag{39}$$

релятивистские плоские волны $\langle \mathbf{r}|\mathbf{p}\rangle$ переходят в стандартные плоские волны

$$\langle \mathbf{r}|\mathbf{p}\rangle = \exp\left[-\left(1+ir\frac{mc}{\hbar}\right)\ln\left(\frac{p^0-\mathbf{pn}}{mc}\right)\right] \cong$$
$$\cong \exp\left[-\left(1+ir\frac{mc}{\hbar}\right)\ln\left(1-\frac{\mathbf{pn}}{mc}+\frac{\mathbf{p}^2}{2m^2c^2}+\ldots\right)\right] \cong$$
$$\cong \exp\left(i\frac{\mathbf{p}\cdot(r\mathbf{n})}{\hbar}\right) = \exp\left(i\frac{\mathbf{pr}}{\hbar}\right). \quad (40)$$

Волновая функция релятивистской частицы может быть разложена в интеграл Фурье по релятивистским плоским волнам

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \langle \mathbf{r}|\mathbf{p}\rangle\, \psi(\mathbf{p})\, d\Omega_{\mathbf{p}}. \quad (41)$$

Состояния локализуются в релятивистском конфигурационном пространстве обычным образом. Оператор положения $\hat{\mathbf{r}}$ в $\mathbf{r}$-представлении действует на волновую функцию обычным образом

$$\hat{\mathbf{r}}\,\psi(\mathbf{r}) = \mathbf{r}\,\psi(\mathbf{r}). \quad (42)$$

Собственные функции $\psi_{\mathbf{r}_0}(\mathbf{r})$ операторов $\hat{\mathbf{r}}$, соответствующие собственному значению $\mathbf{r}_0$, равны $\psi_{\mathbf{r}_0}(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$, то есть

$$\hat{\mathbf{r}}\,\psi_{\mathbf{r}_0}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}\psi_{\mathbf{r}_0}(\mathbf{r}). \quad (43)$$

Собственные функции, соответствующие различным собственным значениям — т. е. состояния, локализованные в различных точках, $\mathbf{r}_0$ и $\widetilde{\mathbf{r}}_0$ ортогональны

$$\int \psi_{\mathbf{r}_0}\psi_{\widetilde{\mathbf{r}}_0} d\mathbf{r} = \delta\left(\widetilde{\mathbf{r}}_0-\mathbf{r}_0\right). \quad (44)$$

Таким образом в релятивистском конфигурационном пространстве выполняется обычное (т. е. нерелятивистское по форме) условие локализации.

2. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ПРОБЛЕМА ДВУХ ТЕЛ

Начнем с нерелятивистской теории. Гамильтониан системы двух тел имеет вид

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m_1}\triangle_{r_1} - \frac{\hbar^2}{2m_2}\triangle_{r_2} + V(r) \quad (45)$$

или

$$H = -\frac{\hbar^2}{2M}\triangle_R - \frac{\hbar^2}{2\mu}\triangle_r + V(r), \quad (46)$$

где

$$M = m_1+m_2, \qquad \mu = \frac{m_1m_2}{M},$$
$$\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1+m_2\mathbf{r}_2}{M}, \qquad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2. \quad (47)$$

Или в терминах импульсного пространства

$$H = \frac{\mathbf{P}^2}{2M} + \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} + V(r). \tag{48}$$

где

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2, \qquad \mathbf{p} = \frac{\mathbf{p}_1}{m_1} - \frac{\mathbf{p}_2}{m_2}. \tag{49}$$

Наш способ рассмотрения проблемы двух тел достаточно искусственный, однако он допускает естественное обобщение на случай релятивистской проблемы двух тел в рамках обсуждаемого здесь подхода. Рассмотрим движение двух независимых частиц в отсутствие взаимодействия $\psi_1^{(0)}(\mathbf{r}_1)$, $\psi_2^{(0)}(r_2)$. Записывая их в терминах координат центра масс (ЦМ) $\mathbf{R}$ и относительных координат $\mathbf{r}$, получим «билокальную» зависимость для индивидуальных волновых функций

$$\begin{aligned} \psi_1^{(0)}(\mathbf{r}_1) &= \mathrm{e}^{i\mathbf{p}_1\mathbf{r}_1} = \psi_1^{(0)}(\mathbf{R},\, \mathbf{r}) = \mathrm{e}^{i\mathbf{p}_1\mathbf{R}} \exp\left(i\mathbf{p}_1\frac{m_2}{M}\mathbf{r}\right), \\ \psi_2^{(0)}(\mathbf{r}_2) &= \mathrm{e}^{i\mathbf{p}_2\mathbf{r}_2} = \psi_2^{(0)}(\mathbf{R},\, \mathbf{r}) = \mathrm{e}^{i\mathbf{p}_2\mathbf{R}} \exp\left(-i\mathbf{p}_2\frac{m_1}{M}\mathbf{r}\right). \end{aligned} \tag{50}$$

Данные соотношения отражают тот простой факт, что индивидуальные волновые функции в произвольной системе координат могут быть получены из соответствующих волновых функций в системе ЦМ (т. е. $\exp\left(i\mathbf{p}_1\frac{m_2}{M}\mathbf{r}\right)$ и $\exp\left(-\,i\mathbf{p}_2\frac{m_1}{M}\mathbf{r}\right)$, где $\frac{m_2}{M}\mathbf{r}$ и $-\frac{m_1}{M}\mathbf{r}$ — координаты первой и второй частицы в системе ЦМ соответственно) с помощью трансляции на $\mathbf{R}$. Таким образом может быть факторизована зависимость от координаты ЦМ $\mathbf{R}$ и относительных координат $\mathbf{r}$ для индивидуальных частиц. Теперь, беря произведения соответствующих частей этих волновых функций, мы можем восстановить зависимость полной волновой функции от координаты ЦМ $\mathbf{R}$

$$\Phi_{\mathrm{cm}}(\mathbf{R}) = \mathrm{e}^{i\mathbf{p}_1\mathbf{R}}\,\mathrm{e}^{i\mathbf{p}_2\mathbf{R}} \;=\; \mathrm{e}^{i\mathbf{P}\mathbf{R}} \tag{51}$$

и зависимость от относительной координаты $\mathbf{r}$ (координаты, описывающей свободное движение эффективной частицы с массой μ)

$$\phi_{\mathrm{eff}}^{(0)}(\mathbf{r}) = \exp\left(i\mathbf{p}_1\frac{m_2}{M}\mathbf{r}\right)\,\exp\left(-\,i\mathbf{p}_2\frac{m_1}{M}\mathbf{r}\right) = \exp\left[i\,\left(\frac{\mathbf{p}_1}{m_1} - \frac{\mathbf{p}_2}{m_2}\right)\,\mu\,\mathbf{r}\right] = \mathrm{e}^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} \tag{52}$$

двухчастичной волновой функции

$$\psi^{(0)}\left(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2\right) = \psi^{(0)}\left(\mathbf{R} + \frac{m_2}{M}\mathbf{r},\, \mathbf{R} - \frac{m_1}{M}\mathbf{r}\right) = T_{\mathbf{R}}\psi^{(0)}\left(\frac{m_2}{M}\mathbf{r},\, -\frac{m_1}{M}\mathbf{r}\right), \tag{53}$$

$$T_{\mathbf{R}}\,\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i + \mathbf{R}, \tag{54}$$

$$\psi^{(0)}\left(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2\right) = \psi_1^{(0)}(\mathbf{r}_1)\psi_2^{(0)}(\mathbf{r}_2) = \phi^{(0)}\left(\mathbf{R}, \mathbf{r}\right) = \mathrm{e}^{i\mathbf{P}\mathbf{R}}\mathrm{e}^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}. \tag{55}$$

Таким образом,

$$\phi^{(0)}\left(\mathbf{R}, \mathbf{r}\right) = \Phi_{\mathrm{cm}}(\mathbf{R})\phi_{\mathrm{eff}}^{(0)}(\mathbf{r}) \quad \text{и} \quad \phi_{\mathrm{eff}}^{(0)}(\mathbf{r}) \;=\; \phi^{(0)}\left(\mathbf{0},\, \mathbf{r}\right) \tag{56}$$

В присутствии взаимодействия волновая функция $\phi^{(0)}_{\rm eff}(\mathbf{r})$ заменяется на $\phi_{\rm eff}(\mathbf{r})$, которая уже не факторизована и удовлетворяет уравнению Шредингера

$$\left[\frac{\mathbf{p}^2}{2\,\mu}+V(r)\right]\,\phi_{\rm eff}(\mathbf{r})=E\,\phi_{\rm eff}(\mathbf{r}). \tag{57}$$

Эффективная волновая функция $\phi_{\rm eff}(\mathbf{r})$ может быть выражена в терминах соответствующих волновых функций в импульсном пространстве

$$\phi_{\rm eff}(\mathbf{r})=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int {\rm e}^{i\mathbf{pr}}\phi_{\rm eff}(\mathbf{p})\,d\mathbf{p}. \tag{58}$$

Система как целое движется с постоянным импульсом, так что величина $\Phi_{\rm cm}(\mathbf{r})$ не изменяется при переходе к случаю с ненулевым взаимодействием. Факторизация индивидуальных волновых функций не имеет места, однако соотношение (56) выполняется. Поэтому преобразование Фурье полной волновой функции $\phi(\mathbf{R},\,\mathbf{r})\;=\;\Phi_{\rm cm}(\mathbf{R})\,\phi_{\rm eff}(\mathbf{r})$ имеет вид

$$\phi(\mathbf{R},\,\mathbf{r})=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int {\rm e}^{i\mathbf{KR}}{\rm e}^{i\mathbf{kr}}\phi_{\mathbf{p}}(\mathbf{K},\,\mathbf{k})d\mathbf{K}d\mathbf{k}, \tag{59}$$

где

$$\phi_{\mathbf{p}}(\mathbf{K},\,\mathbf{k})=\delta\,(\mathbf{P}-\mathbf{K})\,\phi_{\rm eff}(\mathbf{p}). \tag{60}$$

В релятивистском конфигурационном $\mathbf{r}$-пространстве не существует локальной теоремы сложения, подобной (19), и мы должны использовать разложение (30). Из данного разложения вытекает следующая «нелокальная» теорема сложения [4]

$$\int \langle\mathbf{r}|\mathbf{p}_1\rangle\,\langle\mathbf{p}_2|\mathbf{r}\rangle\,d\mathbf{n}=\int\langle\mathbf{r}|\mathbf{p}_1\,(-)\,\mathbf{p}_2\rangle\,d\mathbf{n}, \tag{61}$$

где величина $\mathbf{q}=\mathbf{p_1}\,(-)\,\mathbf{p_2}$ равна вектору $\mathbf{p}_1$, преобразованному в лоренцеву систему отсчета, движущуюся со скоростью $\mathbf{v}=\dfrac{\mathbf{p}_2 c}{\sqrt{\mathbf{p}_2^2+m^2c^2}}$:

$$\begin{gathered}\mathbf{q}=\mathbf{p_1}\,(-)\,\mathbf{p_2},\\ (\mathbf{p}_1\,(-)\,\mathbf{p}_2)_0=(\cosh\chi_1\cosh\chi_2-\sinh\chi_1\sinh\chi_2\,(\mathbf{n}_{p_1}\cdot\mathbf{n}_{p_2}))\,.\end{gathered} \tag{62}$$

Конечно, интегральная теорема сложения, подобная (61), справедлива и для обычных плоских волн

$$\int \exp\left(i\mathbf{p}_1\frac{m_2}{M}\mathbf{r}\right)\,\exp\left(-i\mathbf{p}_2\frac{m_1}{M}\mathbf{r}\right)\,d\mathbf{n}=\int {\rm e}^{i\mathbf{pr}}\,d\mathbf{n}. \tag{63}$$

Формула (63) необходима, если умножаются не плоские волны, а их парциальные разложения (32). В этом случае в результате интегрирования по $d\mathbf{n}$ правая часть выражения (52) также имеет вид однократного парциального разложения

$${\rm e}^{i\mathbf{pr}}=\sum_{l=0}^{\infty} i^l\,(2l+1)j_l\left(\left|\frac{m_2\mathbf{p}_1-m_1\mathbf{p}_2}{M}\right|\right)P_l(\mathbf{n}_p\cdot\mathbf{n}). \tag{64}$$

Данное усреднение по угловой переменной коммутирует с галилеевым оператором Гамильтона (сферически-симметричные потенциалы):

$$\int \left[\frac{\mathbf{p}^2}{2\,\mu} + V(r)\right]\,\psi(\mathbf{r})\,d\mathbf{n} = \left[\frac{\mathbf{p}^2}{2\,\mu} + V(r)\right]\int \psi(\mathbf{r})\,d\mathbf{n}. \tag{65}$$

Переходя к релятивистской проблеме двух тел, отметим прежде всего, что гиперболоиды, соответствующие частицам различных масс, различны (см. (1)).

Это обстоятельство должно быть учтено, например, в выражении для плоской волны (28):

$$\langle \mathbf{r}|\mathbf{p}_i\rangle = (\cosh\chi_i - \sinh\chi_i\,(\mathbf{n}_{p_i}\cdot\mathbf{n}))^{-1-i\,(rm_i c/\hbar)}\,, \qquad i = 1, 2, \tag{66}$$

где r является (размерным) аналогом относительного расстояния между частицами в релятивистском конфигурационном пространстве. Таким образом, свободная волновая функция релятивистской двухчастичной системы $\phi^{(r,0)}_{\text{eff}}(\mathbf{r})$ по аналогии с (52) может быть выбрана в виде

$$\phi^{(r,0)}_{\text{eff}}(\mathbf{r}) = \left\langle \frac{m_2}{M}\mathbf{r}\middle|\mathbf{p}_1\right\rangle\,\left\langle \mathbf{p}_2\middle|\frac{m_1}{M}\mathbf{r}\right\rangle. \tag{67}$$

Эта величина описывает свободное релятивистское движение в системе ЦМ (см. разд. 1) и имеет правильный нерелятивистский предел. Существует несколько возможностей обобщения формулы (52) на релятивистский случай. Мы выберем случай, наиболее простой с формальной точки зрения и наиболее прозрачный с физической точки зрения. В явном виде

$$\phi^{(r,0)}_{\text{eff}}(\mathbf{r}) = (\cosh\chi_1\, - \,\sinh\chi_1\,(\mathbf{n}_{p_1}\cdot\mathbf{n}))^{-1-i\,(m_2/M)\,(rm_1c/\hbar)}\,\times$$
$$\times\,(\cosh\chi_2 - \sinh\chi_2\,(\mathbf{n}_{p_2}\cdot\mathbf{n}))^{-1+i\,(m_1/M)\,(rm_2c/\hbar)}\,. \tag{68}$$

Используя теорему сложения (61), получаем

$$\int \left\langle \frac{m_2}{M}\mathbf{r}\middle|\mathbf{p}_1\right\rangle\,\left\langle \mathbf{p}_2\middle|\frac{m_1}{M}\mathbf{r}\right\rangle\,d\mathbf{n} = \int \langle\mathbf{r}|\mathbf{q}\rangle, d\mathbf{n}, \tag{69}$$

где величина q определяется соотношением (62). Замечательно, что масса, входящая в выражение релятивистской плоской волны в правой части (69), равна приведенной массе (47):

$$\langle \mathbf{r}|\mathbf{q}\rangle = (\cosh\chi_{\mathbf{q}}\, - \,\sinh\chi_{\mathbf{q}}\,(\mathbf{n}_{\mathbf{q}}\cdot\mathbf{n}))^{\mathbf{-1-i\,(r\mu c/\hbar)}}\,. \tag{70}$$

Мы будем рассматривать выражение (70) как свободную эффективную релятивистскую волновую функцию, описывающую относительное движение. При ненулевом потенциале волновая функция $\phi^{(0)}_{\text{eff}}(\mathbf{r})$ модифицируется и мы приходим к выражению, аналогичному (58),

$$\phi^{(r)}_{\text{eff}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \langle\mathbf{r}|\mathbf{k}\rangle\phi^{(r)}_{\text{eff}}(\mathbf{k})\,d\Omega\mathbf{k}. \tag{71}$$

Рассмотрим далее произвольную систему координат. В отсутствие внешних полей данная двухчастичная система движется с постоянной скоростью. Это позволяет записать двухчастичную релятивистскую волновую функцию в виде, внешне неотличимом от (60):

$$\phi^{(r)}_{\mathbf{P}}(\mathbf{K},\,\mathbf{k}) = \delta\,(\mathbf{P}-\mathbf{K})\,\phi^{(r)}_{\text{eff}}(\mathbf{p}) \tag{72}$$

и

$$\phi_{\mathbf{P}}^{(r)}(\mathbf{R},\,\mathbf{r}) = T_{\mathbf{R}}\phi_{\text{eff}}^{(r)}(\mathbf{r}) = T_{\mathbf{R}}\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \langle \mathbf{r}|\mathbf{k}\rangle\,\phi_{\text{eff}}^{(r)}(\mathbf{k})d\Omega\mathbf{k} =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \mathrm{e}^{i\mathbf{PR}}\langle \mathbf{r}|\mathbf{k}\rangle\,\phi_{\text{eff}}^{(r)}(\mathbf{k})d\Omega\mathbf{k} \quad (73)$$

или

$$\phi_{\mathbf{P}}^{(r)}(\mathbf{R},\,\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \mathrm{e}^{i\mathbf{KR}}\mathrm{e}^{i\mathbf{kr}}\phi_{\mathbf{P}}^{(r)}(\mathbf{K},\,\mathbf{k})d\mathbf{K}d\Omega\mathbf{k}. \quad (74)$$

Однако билокальный характер двухчастичной релятивистской волновой функции, в отличие от нерелятивистского случая, становится существенным, поскольку переменные $\mathbf{R}$ и $\mathbf{r}$ имеют различную природу.

3. СЛУЧАЙ НУЛЕВОЙ МАССЫ

Случай $m = 0$ в обычном подходе привносит ряд дополнительных трудностей. Проблема локализации трактуется на основе теории импримитивных систем Макки [3,19,20].

В рассматриваемом подходе к проблеме локализации релятивистских состояний вышеуказанные проблемы отсутствуют, однако концепция релятивистской плоской волны требует дополнительного анализа. В отличие от случая $m \neq 0$ релятивистские плоские волны для безмассовых частиц $\langle \tilde{\rho} \mid \tilde{p}\rangle$ являются сингулярными функциями и требуют регуляризации. Как мы увидим ниже, в рамках рассматриваемой концепции локализованных состояний других сингулярностей в теории безмассовых частиц не возникает. Однажды выбрав способ регуляризации, мы находим решение поблемы локализации безмассовой частицы в релятивистском конфигурационнном пространстве. Для простоты будем рассматривать теорию с двумя пространственными измерениями. Точка на верхней поле конуса массовой поверхности безмассовой частицы

$$p^{\mu}p_{\mu} = (p^0)^2 - \tilde{p}^2 = 0, \quad p^0 \geqslant 0, \quad \tilde{p}^2 = {p_1}^2 + {p_2}^2 \quad (75)$$

параметризуется в виде

$$\{p^{\mu}\} = \{s,\, s\cos\phi,\, s\sin\phi\}, \quad 0 \leqslant s < \infty, \quad 0 \leqslant \phi < 2\pi. \quad (76)$$

Соответственно релятивистское конфигурационное пространство двумерно. Координаты в этом пространстве определяются соотношениями

$$\tilde{\rho} = \{\rho\cos\alpha,\, \rho\sin\alpha\}, \quad 0 \leqslant \rho < \infty, \quad 0 \leqslant \alpha < 2\pi. \quad (77)$$

Запишем релятивистскую плоскую волну как

$$\langle \tilde{\rho} \mid \tilde{p}\rangle = \langle \rho, \alpha \mid s, \phi\rangle = s^{-i\rho-(1/2)}\,\left(1-\cos\left(\phi-\alpha\right)\right)_{+}^{-i\rho-(1/2)}, \quad (78)$$

где обобщенная функция x_+ определяется как

$$x_{+}^{\lambda} = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ x^{\lambda}, & x > 0, \end{cases} \quad (79)$$

или

$$x_+^\lambda = \frac{\mathrm{e}^{i\pi\lambda}\,(x - i\epsilon)^\lambda - \mathrm{e}^{-i\pi\lambda}\,(x + i\epsilon)^\lambda}{2i \sin i\pi\lambda}. \tag{80}$$

Разложение плоской волны (78) имеет вид

$$\langle \rho, \alpha \mid s, \phi \rangle = \frac{2^{-i\rho}\Gamma\left((1/2) - i\rho\right)\Gamma\left(-i\rho\right) s^{-i\rho-(1/2)}}{\sqrt{2\,\pi}} \times \\ \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n\,\mathrm{e}^{in(\phi-\alpha)}}{\Gamma\left((1/2) + n - i\rho\right)\Gamma\left((1/2) - n - i\rho\right)}. \tag{81}$$

Плоские волны удовлетворяют условиям ортогональности

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int \langle \tilde{\rho} \mid \tilde{p} \rangle \langle \tilde{p} \mid \tilde{\rho}' \rangle \, d\Omega_p = \frac{\delta\left(\tilde{\rho} - \tilde{\rho}'\right)}{\mu(\rho)}, \tag{82}$$

где

$$\mu(\rho) = \rho \, \tanh \pi\rho, \tag{83}$$

и полноты

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int \langle \tilde{p} \mid \tilde{\rho} \rangle \langle \tilde{\rho} \mid \tilde{p}' \rangle \, d\Omega_\rho = |\tilde{p}|\, \delta\left(\tilde{p} - \tilde{p}'\right), \tag{84}$$

где

$$d\Omega_p = \frac{d\tilde{p}}{|\tilde{p}|}, \qquad d\Omega_\rho = \rho \, \tanh \pi\rho. \tag{85}$$

В свете вышесказанного ясно, что локализация безмассовой частицы в релятивистском конфигурационном пространстве в принципе не отличается от случая $m \neq 0$. Локализованные релятивистские состояния аналогичны нерелятивистским. Оператор положения $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ в $\boldsymbol{\rho}$-представлении действует на волновую функцию обычным образом

$$\widehat{\boldsymbol{\rho}}\psi(\rho) = \rho\psi(\rho). \tag{86}$$

Собственные функции $\psi_{\boldsymbol{\rho}_0}(\boldsymbol{\rho})$ координаты $\boldsymbol{\rho}$, соответствующие собственному значению $\boldsymbol{\rho}_0$, имеют вид $\psi_{\boldsymbol{\rho}_0}(\boldsymbol{\rho}) = \delta\left(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0\right)$. Таким образом,

$$\boldsymbol{\rho}\,\psi_{\boldsymbol{\rho}_0}(\boldsymbol{\rho}) = \boldsymbol{\rho}\psi_{\boldsymbol{\rho}_0}(\boldsymbol{\rho}). \tag{87}$$

Собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, $\boldsymbol{\rho}_0$ и $\widetilde{\boldsymbol{\rho}}_0$ ортогональны

$$\int \psi_{\boldsymbol{\rho}_0}\psi_{\widetilde{\boldsymbol{\rho}}_0} d\boldsymbol{\rho} = \delta\left(\widetilde{\boldsymbol{\rho}}_0 - \boldsymbol{\rho}_0\right), \tag{88}$$

т. е. условие локализации в релятивистском конфигурационном пространстве неотличимо по форме от стандартного условия локализации в нерелятивистской квантовой теории.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Newton T., Wigner E.* // Rev. Mod. Phys. 1949. V. 21, No. 3. P. 400.
2. *Wigner E.* // Ann. Math. 1939. V. 40. P. 149.
3. *Wightman A. S.* // Rev. Mod. Phys. 1962. V. 34, No. 4. P. 845.
4. *Kadyshevsky V. G., Mir-Kasimov R. M., Skachkov N. B.* // Nuovo Cim. 1968. V. 55. P. 233.
5. *Mir-Kasimov R. M.* // ЖЭТФ. 1965. Т. 49, вып. 3(9). С. 905–913.
6. *Mir-Kasimov R. M.* // J. Phys. A. V. 24. 1991. P. 4283.
7. *Мир-Касимов Р. М.* // ЭЧАЯ. 2000. Т. 31, вып. 7а. С. 226.
8. *Mir-Kasimov R. M.* // Found. Phys. 2002. V. 32, No. 4. P. 607.
9. *Can Z. et al.* // ЭЧАЯ. 2001. Т. 64, вып. 12. С. 226–245.
10. *Shirokov M. I.* // Ann. Phys. 1962. Bd. 10, Nr. 1–2. S. 60.
11. *Hegerfeldt G. H.* // Phys. Rev. D. 1974. V. 10. P. 3320;
Hegerfeldt G. H., Ruijsenaars S. N. M. // Phys. Rev. D. 1980. V. 22. P. 370.
12. *Landau L. D., Peierls R. Z.* // Z. Phys. 1930. V. 62. P. 188.
13. *Zel'dovich Ya. B.* // Dokl. Akad. Nauk SSSR. 1930. V. 168. P. 1359.
14. *Afanasiev G. N., Stepanovsky Yu. P.* // Nuovo Cim. A. 1996. V. 109 P. 271.
15. *Черников Н. А.* // ЭЧАЯ. 2001. Т. 4, вып.13. С. 226.
16. *Асанов Р. А., Афанасьев Г. Н.* // ЭЧАЯ. 1996. Т. 27, вып. 3. С. 713–746.
17. *Baehr H. C., Dimakis A., Müller-Hoissen F.* // J. Phys. A. 1995. V. 28. P. 3197.
18. *Dimakis A., Müller-Hoissen F.* // J. Math. Phys. 2003;
Dimakis A., Müller-Hoissen F. // J. Math. Phys. 1998. V. 40. P. 1518.
19. *Angelopoulos E., Bayen E., Flato M.* // Physica Scripta. 1974. V. 9. P. 173.
20. *Bayen F., Niederle J.* // Czechoslov. J. of Phys. A. 1981. V. 31. P. 1317.

Получено 9 марта 2005 г.