

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАССОВОГО СПЕКТРА МЕЗОНОВ С УЧЕТОМ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ХАРАКТЕРА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

М. Динейхан^а, С. А. Жаугашева^а, К. Каримжан^б

^а Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

^б Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алма-Ата, Казахстан

Определен массовый спектр орбитальных и радиальных возбужденных состояний мезонов, состоящих из легко-легких и легко-тяжелых кварков, с учетом релятивистского и нелокального характера взаимодействия. Наши результаты показывают, что только учет непертурбативного и нелокального характера взаимодействия позволяет достичь для наклона и параметра пересечения редже-траектории удовлетворительного согласия с экспериментальными данными. Определена зависимость конститuentной массы составляющих частиц от массы свободного состояния. Показано, что когда кварки легкие, разность токовых и конститuentных масс кварков оказывается в несколько раз больше, чем токовые массы кварков, если кварки тяжелые, то разность этих масс незначительна. Предложен один из альтернативных вариантов учета нелокального характера взаимодействия при определении свойств адронов на больших расстояниях. Определена зависимость конститuentных масс от радиуса конфайнмента.

Taking into account relativistic and nonlocal character of interactions, the mass spectrum of the mesons consisting of the light-light and light-heavy quarks with orbital and radial excitations, is determined. Our results show that good agreement with the experimental data for the slope and the intercept of the Regge trajectory can be obtained, only taking into account the nonperturbative and the nonlocal character of interactions. Dependence of constituent mass of constituent particles on mass of a free state is certain. When quarks are light the difference of current and valent masses of quarks is greater than valent masses of quarks, and when quarks are heavy the difference of these masses is insignificant. One of alternative variants of the account of nonlocality is suggested for the definition of properties of hadrons at large distances. Dependence of constituent mass on the radius of confinement is studied.

PACS: 12.38.Lg, 11.10.Ef, 12.39.Ki, 14.40.Cs

ВВЕДЕНИЕ

Описание массового спектра адронов с орбитальными и радиальными возбуждениями является одной из фундаментальных проблем сильных взаимодействий. В настоящий момент существуют феноменологические потенциальные модели кварков [1–3], которые хорошо описывают массовый спектр адронов. Однако большинство этих моделей в основном содержит многочисленные параметры, многие из которых физически никак не обоснованы, либо эти модели ограничиваются описанием только конкретных случаев. Кроме того, феноменологические модели кварков в основном описывают физику адронов, состоящих из тяжелых кварков [1]. При изучении свойств адронов, состоящих из

легких кварков, требуется учет релятивистского, непертурбативного и нелокального характера взаимодействия. К настоящему времени отсутствует общепринятый рецепт учета релятивистского нелокального характера взаимодействия в феноменологических моделях кварков. В феноменологической модели кварков, т. е. в нерелятивистском уравнении Шредингера (УШ), нарушается условие релятивистской инвариантности [4]. Гамильтониан, выполняющий условие релятивистской инвариантности для свободной частицы, имеет вид

$$H_{\text{rel}} = \sqrt{-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4}.$$

Однако из УШ с этим гамильтонианом определить собственное значение и волновую функцию с точки зрения математического вычисления почти невозможно. Если разложить корень в ряд, то мы получим уравнение, содержащее все степени оператора дифференцирования, следовательно, теория становится нелокальной [4]. При определении непертурбативного характера взаимодействия в стандартной КТП обычно сталкиваются с решением интегрального уравнения типа уравнения Бете–Солпитера с произвольным ядром. Конечно, найти решение такого уравнения очень сложно. Поэтому описание свойств связанного состояния с учетом релятивистского, непертурбативного и нелокального характера взаимодействия требует особого рассмотрения. В КХД до недавнего времени только в рамках метода правил сумм [5] использовали калибровочно-инвариантный язык конденсатов, чтобы описать вклад непертурбативного характера взаимодействия. Однако для описания большинства явлений, возникающих на больших расстояниях, этот метод оказывается недостаточным. В работе [6], где используется представление Фока–Фейнмана–Швингера, предложен один из методов учета непертурбативного характера взаимодействия для описания свойств релятивистского связанного состояния. Основой метода является применение калибровочно-инвариантной функции Грина для белых объектов, которые могут быть записаны с помощью интегралов по путям [7]. Ключевым моментом данного подхода является вычисление функционального интеграла. Конечно, этот интеграл в общем виде не вычисляется, его вычисление возможно только при некоторых физических предположениях. В работе [8] предложен один из альтернативных вариантов вычисления функционального интеграла и определена масса глюбола. В данной работе с учетом релятивистского и нелокального характера взаимодействия вычисляется массовый спектр мезонов, состоящих из легко-легких и легко-тяжелых кварков, с орбитальными и радиальными возбуждениями, также определена зависимость конститuentной массы составляющих от масс исходного состояния. Вычислены наклон и параметр пересечения редже-траектории для орбитального и радиального возбужденных состояний. Полученные результаты удовлетворительно согласуются с существующими экспериментальными данными.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАССОВОГО СПЕКТРА РЕЛЯТИВИСТСКОГО СВЯЗАННОГО СОСТОЯНИЯ, СОСТОЯЩЕГО ИЗ n ЧАСТИЦ

Рассмотрим взаимодействие n заряженных скалярных частиц во внешнем калибровочном поле. Массу связанного состояния определим на основе исследования асимптотического поведения функции поляризации петли для n заряженных скалярных частиц во внешнем калибровочном поле. Функция поляризации петли для n скалярных

частиц записывается следующим образом:

$$\Pi(x-y) = \langle G_{m_1}(x, y|A)G_{m_2}(y, x|A)G_{m_3}(x, y|A) \dots G_{m_n}(x, y|A) \rangle_A. \quad (1.1)$$

Здесь проводится усреднение по внешнему калибровочному полю $A_\alpha(x)$. Функция Грина $G_m(x, y|A)$ для скалярной частицы во внешнем калибровочном поле определяется из уравнения:

$$\left[\left(i \frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \frac{g}{c\hbar} A_\alpha(x) \right)^2 + \frac{c^2 m^2}{\hbar^2} \right] G_m(x, y|A) = \delta(x-y), \quad (1.2)$$

где m — масса скалярной частицы, а g — константа связи. При усреднении по внешнему калибровочному полю $A_\alpha(x)$ ограничиваемся только низшим порядком, т. е. учитываем только двухточечный гауссов коррелятор:

$$\left\langle \exp \left\{ i \int dx A_\alpha(x) J_\alpha(x) \right\} \right\rangle_A = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \iint dx dy J_\alpha(x) D_{\alpha\beta}(x-y) J_\beta(y) \right\}. \quad (1.3)$$

Здесь $J_\alpha(x)$ — реальный ток, а пропагатор $D_{\alpha\beta}(x-y)$ калибровочного поля:

$$D_{\alpha\beta}(x-y) = \langle A_\alpha(x) A_\beta(y) \rangle_A. \quad (1.4)$$

Решение уравнения (1.2) представляется в виде функционального интеграла (детали см. в [9]):

$$G_m(x, y|A) = \int_0^\infty \frac{ds}{(4\pi s)^2} \exp \left\{ -sm^2 - \frac{(x-y)^2}{4s} \right\} \int d\sigma_B \exp \left\{ ig \int_0^\infty d\xi \frac{\partial Z_\alpha(\xi)}{\partial \xi} A_\alpha(\xi) \right\}. \quad (1.5)$$

Подставляя (1.5) в (1.1) и проводя усреднение по внешнему фоновому полю $A_\alpha(x)$ для функции-петли, имеем

$$\begin{aligned} \Pi(x) &= \iint_0^\infty \dots \int_0^\infty \frac{d\mu_1 d\mu_2 \dots d\mu_n}{(8\pi^2 x)^n} J(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{|x|}{2} \left(\frac{m_1^2}{\mu_1} + \mu_1 \right) - \frac{|x|}{2} \left(\frac{m_2^2}{\mu_2} + \mu_2 \right) - \dots - \frac{|x|}{2} \left(\frac{m_n^2}{\mu_n} + \mu_n \right) \right\}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь

$$\begin{aligned} J(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) &= N_1 N_2 \dots N_n \iint \dots \int \delta \mathbf{r}_1 \delta \mathbf{r}_2 \dots \delta \mathbf{r}_n \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^x d\tau [\mu_1 \dot{\mathbf{r}}_1^2(\tau) + \mu_2 \dot{\mathbf{r}}_2^2(\tau) + \dots + \mu_n \dot{\mathbf{r}}_n^2(\tau)] \right\} \times \\ &\times \exp \left\{ -W_{1,1} - W_{2,2} - \dots - W_{n,n} + 2 \sum_{i,j=1; i \neq j}^n W_{i,j} \right\}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

где

$$W_{i,j} = (-1)^{i+j} \frac{g^2}{2} \iint_0^x d\tau_1 d\tau_2 \dot{Z}_\alpha^{(i)}(\tau_1) D_{\alpha\beta} \left\{ Z^{(i)}(\tau_1) - Z^{(j)}(\tau_2) \right\} \dot{Z}_\beta^{(j)}(\tau_2). \quad (1.8)$$

Мы определили функцию-петлю для n скалярных частиц с массами m_1, m_2, \dots, m_n , которые взаимодействуют между собой обменным калибровочным полем. Существует два типа взаимодействий: первое — взаимодействие составляющих частиц посредством калибровочного поля, вклад которого определяется непосредственно $W_{i,j}$ ($j \neq i$), второе — взаимодействие составляющих частиц самих с собой, т.е. диаграмма собственной энергии, вклад которой определяется $W_{1,1}, W_{2,2}, \dots, W_{n,n}$. В нерелятивистском пределе величина $W_{i,j}$ ($j \neq i$) соответствует потенциальным взаимодействиям, а $W_{1,1}, W_{2,2}, \dots, W_{n,n}$ соответствуют непотенциальным взаимодействиям, которые определяют вклад в массу собственной энергии (детали см. в [10]). С другой стороны, функциональный интеграл (1.7) похож на фейнмановский интеграл по траекториям для движения n скалярных частиц с массами $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ в нерелятивистской квантовой механике [11]. Взаимодействие между этими частицами описывается выражением (1.8), которое содержит как потенциальные, так и непотенциальные взаимодействия.

Нашей задачей является определение массы связанного состояния с учетом релятивистской инвариантности. Массу связанного состояния обычно определяют через функцию-петлю $\Pi(x)$ следующим образом:

$$M = - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \Pi(x)}{x}. \quad (1.9)$$

Из (1.9) видно, что для определения массы связанного состояния прежде всего нам нужно определить функцию-петлю $\Pi(x)$ в асимптотике $|x| \rightarrow \infty$. С другой стороны, согласно (1.8), гамильтониан взаимодействия n -скалярных частиц с массами $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ записывается в виде

$$H = \frac{1}{2\mu_1} \mathbf{P}_1^2 + \frac{1}{2\mu_2} \mathbf{P}_2^2 + \dots + \frac{1}{2\mu_n} \mathbf{P}_n^2 + V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n), \quad (1.10)$$

где $V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n)$ — потенциал взаимодействия, который выражается через $W_{i,j}$. Если $E(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ являются собственными значениями гамильтониана (1.10), то интеграл, представленный в (1.7), в асимптотике $|x| \rightarrow \infty$ можно записывать в виде

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} J(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) = \exp\{-xE(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)\}. \quad (1.11)$$

В этом приближении интеграл, представленный в (1.6), вычисляется методом перевала, тогда из (1.9) для массы связанного состояния получаем

$$M = \frac{1}{2} \min_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n} \left\{ \frac{m_1^2}{\mu_1} + \mu_1 + \frac{m_2^2}{\mu_2} + \mu_2 + \dots + \frac{m_n^2}{\mu_n} + \mu_n + 2E(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) \right\}, \quad (1.12)$$

а для μ_j имеем следующую систему уравнения:

$$\mu_j - \frac{m_j^2}{\mu_j} + 2\mu_j \frac{dE(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)}{d\mu_j} = 0; \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (1.13)$$

Параметры $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ рассматриваются как массы составляющих в связанном состоянии. Эти массы отличаются от m_1, m_2, \dots, m_n — масс исходного (свободного) состояния. Система уравнения, представленная в (1.13), при конкретных значениях n определяется аналитически, в частности, для $n = 2$ имеем

$$\begin{aligned} M &= \mu_1 + \mu_2 + M_2 \frac{dE}{dM_2} + E(M_2); & \frac{1}{M_2} &= \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}; \\ \mu_1 &= \sqrt{m_1^2 - 2M_2^2 \frac{dE}{dM_2}}; & \mu_2 &= \sqrt{m_2^2 - 2M_2^2 \frac{dE}{dM_2}}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Таким образом, мы можем определить массу и конституентную массу связанного состояния с учетом релятивистских эффектов.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАССОВОГО СПЕКТРА МЕЗОНОВ, СОСТОЯЩИХ ИЗ ЛЕГКО-ЛЕГКИХ И ЛЕГКО-ТЯЖЕЛЫХ КВАРКОВ

Определение энергетического спектра растущего потенциала. Запирание цветных зарядов осуществляется с помощью линейно растущего потенциала. Определим $E(M_2)$ — энергетический спектр линейно растущего потенциала с учетом орбитального и радиального возбуждений:

$$\left[\frac{1}{2M_2} \mathbf{P}^2 + \sigma \cdot r \right] \Psi = E(M_2) \Psi, \quad (2.1)$$

где σ — натяжение струны. Энергетический спектр и волновая функция определяются из УШ в рамках метода ОП [8, 12]. Прежде всего, переходим к d -мерному вспомогательному пространству R^d , а гамильтониан взаимодействия представим в нормальной форме по операторам рождения a^+ и уничтожения a (детали см. в [12]):

$$H = H_0 + \varepsilon_0(E) + H_I, \quad (2.2)$$

где H_0 — гамильтониан свободного осциллятора:

$$H_0 = \omega(a_j^+ a_j), \quad (2.3)$$

а энергия основного состояния $\varepsilon_0(E)$ в R^d имеет вид

$$\varepsilon_0(E) = \frac{d\omega}{4} - \frac{4\rho^2 M_2 E \Gamma(d/2 + 2\rho - 1)}{\omega^{2\rho-1} \Gamma(d/2)} + \frac{4\rho^2 M_2 \sigma \Gamma(d/2 + 3\rho - 1)}{\omega^{3\rho-1} \Gamma(d/2)} \quad (2.4)$$

и H_I — гамильтониан взаимодействия — представляется в нормальной форме:

$$H_I = \int_0^\infty dx \int \left(\frac{d\eta}{\sqrt{\pi}} \right)^d e^{-\eta^2(1+x)} : e_2^{-i\sqrt{x}\omega(q\eta)} : \left[\frac{4\rho^2 M_2}{\omega^{3\rho-1}} \frac{\sigma x^{-3\rho}}{\Gamma(1-3\rho)} - \frac{4\rho^2 M_2}{\omega^{2\rho-1}} \frac{E x^{-2\rho}}{\Gamma(1-2\rho)} \right], \quad (2.5)$$

где введено обозначение: $e_2^{-x} = e^{-x} - 1 + x - \frac{x^2}{2}$. Здесь $: \times :$ является символом нормального упорядочения, а η_j и q_j — векторы d -мерного вспомогательного пространства

R^d ; размерность вспомогательного пространства d равна $d = 2 + 2\rho + 4\rho\ell$, ρ — вариационный параметр, который связан с асимптотическим поведением волновой функции. Определим энергетический спектр с орбитальным и радиальным возбуждениями. В ОП энергетический спектр с радиальным возбуждением определяется в следующем виде (детали см. в [12]):

$$\varepsilon_{n_r}(E) = \langle n_r | H | n_r \rangle = \varepsilon_0(E) + 2n_r\omega + \langle n_r | H_I | n_r \rangle. \quad (2.6)$$

Матричный элемент $\langle n_r | H_I | n_r \rangle$ имеет вид

$$\langle n_r | H_I | n_r \rangle = -\frac{4\rho^2 E M_2}{\omega^{2\rho-1}} \frac{\Gamma(d/2 + 2\rho - 1)}{\Gamma(d/2)} \tilde{B} + \frac{4\rho^2 M_2 \sigma}{\omega^{3\rho-1}} \frac{\Gamma(d/2 + 3\rho - 1)}{\Gamma(d/2)} \tilde{C}. \quad (2.7)$$

Детали вычисления матричного элемента (2.7) приведены в приложении А, а параметры \tilde{B} и \tilde{C} представлены в (А.3) и (А.4) соответственно. Согласно методу ОП, энергетический спектр исходного УШ и частота осциллятора определяются из системы уравнений [12]:

$$\begin{cases} \varepsilon(E) = 0, \\ \frac{\partial \varepsilon_0(E)}{\partial \omega} = 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

Прежде всего, определим энергетический спектр с орбитальным возбуждением. Тогда, учитывая (2.4), из (2.8), для энергетического спектра имеем

$$E(\ell, 0) = \frac{3}{2} \frac{\sigma^{2/3}}{M_2^{1/3}} \min_{\rho} \left[\frac{\Gamma(2 + \rho + 2\rho\ell) \Gamma^2(4\rho + 2\rho\ell)}{4\rho^2 \Gamma^3(3\rho + 2\rho\ell)} \right]^{1/3}. \quad (2.9)$$

В этом случае, учитывая (2.9), из (1.14), получаем массу связанного состояния:

$$M(\ell, 0) = 2\sqrt{\sigma} \left[\frac{\Gamma^2(4\rho + 2\rho\ell) \Gamma(2 + \rho + 2\rho\ell)}{\rho^2 \Gamma^3(3\rho + 2\rho\ell)} \right]^{1/4}. \quad (2.10)$$

Мы аналитически определили энергетический спектр и массу связанного состояния с орбитальным возбуждением для растущего потенциала. После некоторых упрощений для энергетического спектра с орбитальным и радиальным возбуждениями получаем

$$E(\ell, n_r) = \frac{\sigma^{2/3}}{M_2^{1/3}} \min_{\rho} \left[\frac{D_4^3 \Gamma(2 + \rho + 2\rho\ell) \Gamma^2(4\rho + 2\rho\ell)}{32\rho^2 \Gamma^3(3\rho + 2\rho\ell) D_1} \right]^{1/3}. \quad (2.11)$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{\rho + (3\rho - 1)\tilde{B} - (2\rho - 1)\tilde{C}}{\rho + (2\rho - 1)\frac{2n_r}{1 + \rho + 2\rho\ell} + \frac{1}{2}\tilde{B}}, & D_3 &= \frac{1 + \tilde{C}}{1 + \tilde{B}}, \\ D_2 &= \left(1 + \frac{4n_r}{1 + \rho + 2\rho\ell} \right) \frac{1}{1 + \tilde{B}}, & D_4 &= D_2 D_1 + 2D_3. \end{aligned} \quad (2.12)$$

В этом случае, согласно (1.14), масса связанного состояния определяется в виде

$$M(\ell, n_r) = 2\sqrt{\sigma} \left[\frac{\Gamma^2(4\rho + 2\rho\ell)\Gamma(2 + \rho + 2\rho\ell)D_4^3}{27D_1\rho^2\Gamma^3(3\rho + 2\rho\ell)} \right]^{1/4}. \quad (2.13)$$

Таким образом, мы аналитически определили массу связанного состояния с орбитальным и радиальным возбуждениями мезонов, состоящих из легких кварков, для растущего потенциала при условии $\frac{m_u}{\sqrt{\sigma}} \cong \frac{m_d}{\sqrt{\sigma}} \ll 1$, где m_u и m_d — массы легких кварков.

Теперь определим энергетический спектр потенциала Корнелла с учетом орбитального и радиального возбуждения из УШ:

$$\left[\frac{1}{2M_2} \mathbf{P}^2 + \sigma \cdot r - \frac{4\alpha_s}{3} \frac{\alpha_s}{r} \right] \Psi = E(M_2)\Psi. \quad (2.14)$$

Проводя вычисления, аналогичные проделанным в предыдущих разделах, определим энергетический спектр с орбитальным и радиальным возбуждениями:

$$\frac{E(\ell, n_r)}{\sqrt{\sigma}} = \min_{\rho} \left[\frac{z^2}{8x\rho^2} \frac{\Gamma(2 + \rho + 2\rho\ell)}{\Gamma(3\rho + 2\rho\ell)} \frac{1 + \frac{4n_r}{1 + \rho + 2\rho\ell}}{1 + \tilde{B}} + \frac{1}{z} \Gamma(4\rho + 2\rho\ell) \times \right. \\ \left. \times \Gamma(3\rho + 2\rho\ell) \frac{1 + \tilde{C}}{1 + \tilde{B}} - \frac{4\alpha_s z}{3} \Gamma(2\rho + 2\rho\ell) \Gamma(3\rho + 2\rho\ell) \frac{1 + \tilde{D}}{1 + \tilde{B}} \right], \quad (2.15)$$

параметр z определяется из уравнения

$$z^3 - z^2 x \frac{16\alpha_s \rho^2}{3} \frac{\Gamma(2\rho + 2\rho\ell)}{\Gamma(2 + \rho + 2\rho\ell)} \frac{[\rho + (2\rho - 1)\tilde{D} - (\rho - 1)\tilde{B}]}{\left[\rho + (2\rho - 1) \frac{2n_r}{1 + \rho + 2\rho\ell} + \frac{1}{2}\tilde{B} \right]} - \\ - 4x\rho^2 \frac{\Gamma(4\rho + 2\rho\ell)}{\Gamma(2 + \rho + 2\rho\ell)} \frac{[\rho + (3\rho - 1)\tilde{B} - (2\rho - 1)\tilde{C}]}{\left[\rho + (2\rho - 1) \frac{n_r}{1 + \rho + 2\rho\ell} + \frac{1}{2}\tilde{B} \right]} = 0, \quad (2.16)$$

явный вид параметров \tilde{B} , \tilde{C} и \tilde{D} приведен в приложении А. Масса и конституентная масса параметризованы в следующем виде:

$$M_2 = \sqrt{\sigma}x, \quad M = 2M_2 + E. \quad (2.17)$$

а параметр x определяется из уравнения

$$2 + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{E}{\sqrt{x}} \right) = 0. \quad (2.18)$$

На рис. 1 представлена зависимость квадрата массового спектра от орбитального квантового числа при различных значениях радиального квантового числа $n_r = 0, \dots, 4$, где константа сильного взаимодействия $\alpha_s = 0,39$. Из (2.10), (2.13) и (2.15) видно, что энергетический спектр и масса связанного состояния определены в единицах $\sqrt{\sigma}$, где σ — натяжение струны. По многочисленным результатам экспериментальных и решеточных данных значение натяжения струны составляет $\sigma = 0,19 \text{ ГэВ}^2$. При малых значениях $\ell \leq 5$ зависимость M^2/σ от ℓ является линейной и может быть аппроксимирована для растущего потенциала:

$$\frac{M^2(\ell, 0)}{\sigma} = 8\ell + 3,5\pi, \quad (2.19)$$

для потенциала Корнелла:

$$\frac{M^2(\ell, 0)}{\sigma} = 8\ell + 2,64\pi, \quad (2.20)$$

Параметр наклона Редже ℓ -траектории при $\ell \leq 5$ экспериментально определен в [13–19] и равен

$$\alpha'_{L(\text{exp})} = (0,81 \pm 0,01) \text{ ГэВ}^{-2}, \quad (2.21)$$

а в нашем случае (для обоих видов потенциала он является одинаковым) $\alpha'_L = 0,658 \text{ ГэВ}^{-2}$, т. е. ниже, чем дает эксперимент. Экспериментальное значение параметра пересечения редже- ℓ -траектории равно [13–19]

$$\alpha_{L(\text{exp})}(0) = -0,30 \pm 0,02, \quad (2.22)$$

у нас для растущего потенциала $\alpha_L(0) = -1,374$ и для потенциала Корнелла $\alpha_L(0) = -1,037$, т. е. в этом случае по модулям наши результаты больше, чем экспериментальные. Поведение редже- n_r -траектории параметризуется в виде [14]:

$$M^2(\ell, n_r) = M^2(\ell, 0) + \Omega n_r. \quad (2.23)$$

Параметр Ω определен из эксперимента для состояния $n_r = 1, 2, 3$ [17–19] в интервале $\Omega_{\text{exp}} = 1,6\text{--}1,38 \text{ ГэВ}^2$. При значении натяжения струны $\sigma = 0,19 \text{ ГэВ}^2$ для растущего потенциала определено среднее значение параметра $\Omega = 2,7056 \text{ ГэВ}^2$, а для потенциала Корнелла $\Omega = 2,656 \text{ ГэВ}^2$. Таким образом, полученные результаты без учета непертурбативного и нелокального характера взаимодействия для наклона и параметра пересечения редже-траектории не имеют удовлетворительного согласия с экспериментальными данными.

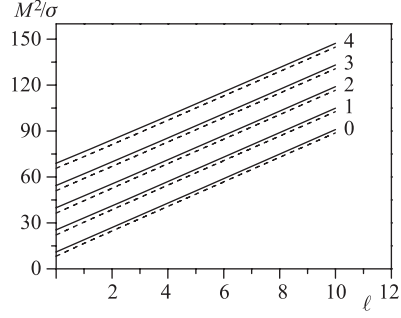


Рис. 1. Зависимость квадрата масс мезонов, состоящих из легко-легких кварков, определенных в единицах σ , от ℓ при значении $n_r = 0, \dots, 4$. Сплошные линии соответствуют растущему потенциалу, а штриховые — потенциалу Корнелла

Теперь определим массовый спектр мезонов, состоящих из легко-тяжелых кварков, и конституентную массу кварков с орбитальным и радиальным возбуждениями. В этом случае $m_1 = 0$, $m_2 = m_q \neq 0$. Прежде всего вычислим массу и конституентную массу для растущего потенциала. С учетом (2.7) и (2.6), из (2.8) определен энергетический спектр с орбитальным и радиальным возбуждениями, при этом масса и конституентная масса определяются из (1.14). Тогда, после некоторых упрощений, для массы связанного состояния получаем

$$M(\ell, n_r) = \sqrt{\sigma} \left(\sqrt{\mu_0 s^2} + \sqrt{\xi^2 + \mu_0 s^2} + \frac{s^2}{\sqrt{\mu_0}} \right), \quad (2.24)$$

и для конституентной массы кварков имеем

$$\mu_1(\ell, n_r) = \sqrt{\sigma \mu_0 s^2}; \quad \mu_2(\ell, n_r) = \sqrt{\sigma(\xi^2 + \mu_0 s^2)}, \quad (2.25)$$

а энергетический спектр определяется в виде

$$E(\ell, n_r) = \frac{3}{2} \min_{\rho} \left(\frac{s^2 \sqrt{\sigma}}{\sqrt{\mu_0}} \right). \quad (2.26)$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\xi^2 = \frac{m_q^2}{\sigma}, \quad s^2 = \left[\frac{D_4^3 \Gamma^2(4\rho + 2\rho\ell) \Gamma(2 + \rho + 2\rho\ell)}{108 \rho^2 \mu^3 D_1 \cdot \Gamma(3\rho + 2\rho\ell)} \right]^{1/3}, \quad (2.27)$$

$$\mu_0 = \frac{1}{2} \frac{s^4 - 2\xi^2 s}{2s^3 - \xi^2} + \sqrt{\frac{(s^4 - 2\xi^2 s)^2}{4(2s^3 - \xi^2)^2} + \frac{s^2 \xi^2}{2s^3 - \xi^2}}.$$

В том случае, когда потенциал взаимодействия является корнеллским, энергетический спектр определяется из (2.15), а параметр z из (2.16). Из (1.14), учитывая (2.15), для конституентной массы кварков имеем

$$\mu_1(\ell, n_r) = \sqrt{\sigma} \sqrt{-2x^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{E}{\sqrt{\sigma}} \right)}, \quad \mu_2(\ell, n_r) = \sqrt{\sigma} \sqrt{\xi^2 - 2x^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{E}{\sqrt{\sigma}} \right)}. \quad (2.28)$$

При этом параметр x определяется из уравнения

$$1 - \frac{1}{\sqrt{-2 \frac{d}{dx} \left(\frac{E}{\sqrt{\sigma}} \right)}} - \frac{x}{\sqrt{\xi^2 - 2x^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{E}{\sqrt{\sigma}} \right)}} = 0. \quad (2.29)$$

Полученные численные результаты представлены на рис. 2 при значениях массы кварка $m_q = 0,155$ ГэВ, константы связи $\alpha_s = 0,39$ и натяжении струны $\sigma = 0,19$ ГэВ². Редже-траектория для орбитально-возбужденного состояния при $n_r = 0$ для растущего потенциала параметризуется, как в (2.19), и является линейной, а для потенциала Корнелла наклон редже-траектории с ростом ℓ увеличивается, например, при $\ell = 1$, $\alpha'_L = 0,629$, а при $\ell = 5$, $\alpha'_L = 0,656$, т. е. траектория является нелинейной. Эта зависимость качественно согласуется с экспериментальным результатом [15] для реджевской ℓ -траектории каонов.

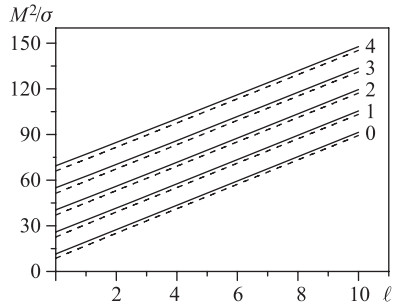


Рис. 2. Зависимость квадрата масс мезонов, состоящих из легко-тяжелых кварков, от ℓ при $n_r = 0, \dots, 4$ и $m_q = 0,155$ ГэВ, $\alpha_s = 0,39$. Сплошные линии соответствуют растущему, а штриховые — корнеллскому потенциалам

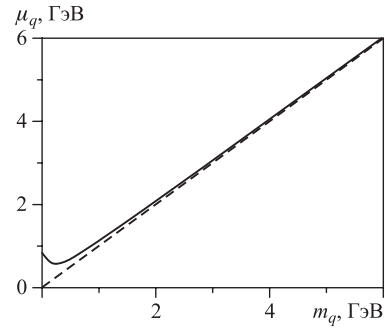


Рис. 3. Зависимость конstituентной массы от массы свободного состояния при $\alpha_s = 0,39$ и $\sigma = 0,19$ ГэВ² для основного состояния

Определим зависимости конstituентных масс связанного состояния от масс составляющих в свободном состоянии. В настоящий момент существуют многочисленные модели как потенциальные, так и непотенциальные, которые посвящены изучению свойств и механизма взаимодействия адронов. Экспериментально [16] более-менее уточнены массы различных кварков. Большинство (почти все) моделей используют массу кварков как исходный параметр, при этом для массы легких кварков, в частности, u - и d -кварков, считают, что $m_u = 150\text{--}220$ МэВ, а экспериментально [16] — всего лишь $m_u \approx m_d \sim 4\text{--}8,5$ МэВ. С другой стороны, масса π -мезона, состоящего из u - и d -кварков, равна ~ 140 МэВ, т.е. массы легких кварков в связанном состоянии резко увеличиваются. Также известно, что массы c - и b -кварков, формирующих чармоний и боттомоний, в связанном состоянии являются почти постоянными. Тогда появляется естественный вопрос: можно ли объяснить механизм увеличения масс легких кварков и почти постоянство масс тяжелых кварков в связанном состоянии? Этому вопросу посвящено много работ, однако в рамках потенциальных и даже полевых моделей пока не удалось объяснить этот механизм по существу. Наши результаты показывают, что в рамках нашего подхода возможно описать увеличение масс легких кварков, а также почти отсутствие увеличения массы тяжелых кварков в связанном состоянии. Из (1.14) видно, что конstituентная масса связанного состояния определяется через m и E , т.е. в нашем случае конstituентная масса зависит от m — массы исходного состояния, а также от квантовых чисел ℓ и n_r . С использованием этих зависимостей для потенциала Корнелла при $\alpha_s = 0,39$ и $\sigma = 0,19$ ГэВ² определена зависимость конstituентной массы от m для основного состояния, которая представлена на рис. 3. Из рис. 3 видно, что когда m мала, разность конstituентных и валентных масс кварков велика, и с возрастанием массы m разность этих масс уменьшается. Для растущего потенциала получаются аналогичные зависимости этих величин. При различных значениях m определяется отношение разности масс конstituентных и исходных состояний к первоначальной массе частиц. Наши результаты показали, что при $m = 0,155$ ГэВ отношение масс $(\mu - m)/m = 1,942$, т.е. разность почти в два раза больше, чем масса исходного состояния, а при $m = 0,45$ ГэВ составляет 0,44, при $m_q = 1,5$ ГэВ (в районе масс c -кварка) это отношение составляет всего лишь

0,095, т.е. разность конститuentных и исходных масс в 10,5 раза меньше, чем масса исходного состояния. Это наглядно видно из рис.3. Когда кварк достаточно легкий, конститuentная масса кварка во много раз больше, чем токовая масса кварка. С возрастанием масс исходного состояния разность между конститuentной и токовой массами уменьшается. Если масса исходного состояния сопоставима с массой тяжелых кварков, таких как c и b , то различие конститuentной массы и массы исходного состояния становится незначительным.

3. ВКЛАД НЕПЕРТУРБАТИВНОГО И НЕЛОКАЛЬНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В МАССОВЫЙ СПЕКТР СВЯЗАННОГО СОСТОЯНИЯ

Взаимодействие составляющих частиц в связанном состоянии определяется выражением, представленным в (1.8). Из (1.8) видно, что недиагональное взаимодействие $W_{1,2}$ определяет взаимодействие между составляющими частицами, а в нерелятивистском пределе соответствует потенциалу взаимодействия [8]. Взаимодействие составляющих частиц в связанном состоянии определяется не только обменом глюона между частицами, но и взаимодействием частиц самих с собой, т.е. диаграммой собственной энергии, вклад которой определяется выражениями $W_{1,1}$; $W_{2,2}$. Учет вклада диаграммы собственной энергии приводит к тому, что появляется дополнительный гамильтониан, явный вид которого определен в работе [10]:

$$\Delta H_{SE} = -\frac{2\sigma}{\pi} \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right), \quad (3.1)$$

где μ_1 и μ_2 — конститuentные массы составляющих частиц и σ — натяжение струны. С учетом (3.1) для массового спектра связанного состояния, состоящего из легко-легких кварков, имеем

$$M = 2M_2 + E - \frac{2\sigma}{\pi M_2}. \quad (3.2)$$

В этом случае параметр M_2 определяется из уравнения

$$2 + \frac{\partial E}{\partial M_2} + \frac{2\sigma}{\pi M_2^2} = 0. \quad (3.3)$$

Массу связанного состояния, состоящего из легко-тяжелых кварков, определяем в виде

$$\frac{M}{\sqrt{\sigma}} = \frac{\mu_1}{\sqrt{\sigma}} + \frac{\mu_2}{\sqrt{\sigma}} + x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{E}{\sqrt{\sigma}} \right) + \frac{E}{\sqrt{\sigma}}, \quad (3.4)$$

где μ_1 и μ_2 — конститuentные массы составляющих:

$$\begin{aligned} \frac{\mu_1}{\sqrt{\sigma}} &= \sqrt{-2x^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{E}{\sqrt{\sigma}} \right) + \frac{4}{\pi}}, \\ \frac{\mu_2}{\sqrt{\sigma}} &= \sqrt{\xi^2 - 2x^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{E}{\sqrt{\sigma}} \right) + \frac{4}{\pi}}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Здесь использована параметризация $M_2 = x\sqrt{\sigma}$, параметр x определяется из уравнения

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{-2x^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{E}{\sqrt{\sigma}} \right) + \frac{4}{\pi}}} + \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - 2x^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{E}{\sqrt{\sigma}} \right) + \frac{4}{\pi}}}, \quad (3.6)$$

а параметр ξ представлен в (2.27). Энергетический спектр E для конкретного вида потенциала определяется из УШ, он был представлен в предыдущем разделе.

Определение потенциала взаимодействия между составляющими частицами в связанном состоянии с обменом непертурбативными глюонами приводит к дополнительному взаимодействию, явный вид которого вычислен в работе [8]:

$$\Delta H_{\text{str}} = -\frac{4\alpha_s}{3r} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\ell(\ell+1)}{M_2^2 r^2}}} - 1 \right]. \quad (3.7)$$

Из (3.7) видно, что при $\ell = 0$ вклад этого взаимодействия равен нулю. Из системы уравнений (2.8) определим энергетический спектр и частоту осциллятора с учетом орбитального и радиального возбуждения. Масса и конституентная масса для связанного состояния определяются из (2.17) для легко-легких кварков, а для легко-тяжелых кварков из (2.24). Эти алгебраические уравнения решаются численным образом.

Теперь определим массовый спектр связанного состояния с учетом нелокальности. При описании поведения адронов, состоящих из легких кварков, необходим учет эффектов, возникающих на больших расстояниях. Очевидно, что процессы конфайнмента и адронизации кварков происходят на одних и тех же расстояниях. В настоящей работе нелокальный характер взаимодействия учитывается введением радиуса конфайнмента. В работе [20] в рамках нелокальной КТП было показано, что пропагаторы конституентных частиц (кварков и глюонов) являются целыми аналитическими функциями гауссовского типа в импульсном пространстве. В частности, пропагаторы безмассовых частиц определены в евклидовом пространстве в виде

$$D(y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \exp\{i(py)\} \tilde{D}(p^2) = \frac{1}{4\pi^2 y^2} \exp\left\{-\frac{\Lambda^2 y}{2}\right\}. \quad (3.8)$$

Здесь $y = (\mathbf{y}, y_4)$, $\mathbf{y} \in R^3$, $y_4 \in R^1$. Параметр Λ определяет шкалу конфайнмента, $r_c = 1/\Lambda$ — радиус конфайнмента. Когда взаимодействие между составляющими частицами в связанном состоянии осуществляется обменом безмассовыми частицами с пропагатором (3.8), то потенциал в нерелятивистском пределе определяется следующим образом:

$$V_{\text{mod}}(\mathbf{r}) = g^2 \int_{-\infty}^{\infty} du D(\mathbf{r}^2 + u^2) = \frac{\alpha_s}{r} \left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{r\Lambda/\sqrt{2}} ds e^{-s^2} \right], \quad (3.9)$$

и при $\Lambda \rightarrow 0$ из (3.9) получаем стандартный кулоновский потенциал. Таким образом, потенциал взаимодействия в области конфайнмента модифицируется. С другой стороны,

в области конфайнмента потенциал взаимодействия может быть определен с помощью функции распределения:

$$V_{\text{mod}}(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{r}' V(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}' - \mathbf{r}), \quad (3.10)$$

где $V(\mathbf{r}')$ — потенциал, соответствующий плоскому пропагатору глюона, т. е. $V(\mathbf{r}') = 1/r'$, а $\Phi(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$ — функция распределения, которая согласно (3.9), в R^3 равна

$$\Phi(\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}) - \frac{\Lambda^3}{(2\pi)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{\Lambda^2 \mathbf{r}^2}{2}\right\}. \quad (3.11)$$

Аналогичное определение потенциала взаимодействия в области конфайнмента через потенциал в области деконфайнмента приведено в работе [21]. Учитывая (3.9)–(3.11), определяем модифицированный линейно растущий потенциал:

$$V_{\text{mod}}^P(\mathbf{r}) = \sigma \cdot r \left(1 - \frac{2}{r\sqrt{\pi}} \int_0^{r\Lambda/\sqrt{2}} ds e^{-s^2} \right) \equiv \sigma(r) \cdot r. \quad (3.12)$$

Основной вклад при определении масс и конститuentных масс связанного состояния в рамках нашего подхода определяется вкладом растущего потенциала, а вклад различных поправок, связанных с нелокальным характером взаимодействия, является малым. Поэтому при определении масс и конститuentных масс составляющих с учетом размерного (нелокального) эффекта необходимо модифицировать только линейно растущий потенциал. Детали вычисления энергетического спектра с модифицированным потенциалом (3.12) приведены в приложении Б. С учетом (Б.2) для энергетического спектра E из (3.2) определен массовый спектр мезона, состоящего из легко-легких кварков, при этом параметры x или M_2 определяются из уравнений (3.3). Массовый спектр мезонов, состоящих из легко-тяжелых кварков, и конститuentная масса составляющих частиц определены в (3.4) и (3.5) соответственно.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЯ

Наши результаты, которые представлены на рис. 1 и 2, показывают, что без учета непертурбативного и нелокального характера взаимодействия невозможно достичь хорошего согласия с экспериментальными данными, в частности, по наклону и параметру пересечения редже-траектории как для орбитального, так и для радиального возбуждений. Экспериментальное уточнение значения спинового усреднения массы мезонов с орбитальным и радиальным возбуждениями приведены в работах [13, 14]. В предыдущем разделе получено аналитическое выражение, которое дает возможность определить спиновое усреднение массы с учетом непертурбативного и нелокального характеров взаимодействия. Учет нелокального характера взаимодействия приводит к появлению нового параметра, $r_c = 1/\Lambda$ — радиуса конфайнмента, масса и конститuentная масса связанного состояния зависят от этого параметра. Далее представим численные результаты, полученные с учетом непертурбативного и нелокального характера взаимодействия, только для

потенциала Корнелла при значениях $\alpha_s = 0,39$ и $\sigma = 0,19$ ГэВ². Прежде всего определим массу и конституентную массу связанного состояния для $\ell = 0$. Согласно (3.7), вклад непертурбативной добавки равен нулю. В этом случае определяется зависимость конституентной массы от радиуса конфайнмента r_c для основного состояния. Результаты представлены на рис. 4. Из рис. 4 видно, что с возрастанием расстояния между составляющими частицами в релятивистском связанном состоянии конституентная масса составляющих уменьшается, а с уменьшением — возрастает. Также из этого рисунка видно, что если радиус $r_c = 1$ фм, то конституентная масса $\sim 1,5$ ГэВ, а если радиус — 2 фм, то конституентная масса составляет всего лишь $\sim 0,5$ ГэВ. Таким образом, при уменьшении расстояния между составляющими частицами в связанном состоянии их конституентная масса увеличивается. Поэтому, согласно (3.1) и (3.7), непотенциальная добавка, связанная с диаграммой собственной энергии, уменьшается, т. е. при некоторых значениях радиуса r_c вклад этого взаимодействия может стать несущественным. При таком условии динамика формирования связанных состояний, вполне возможно, определяется в рамках феноменологических потенциальных моделей.

Из КХД известно, что при высоких энергиях, если переданный импульс достаточно велик (или расстояние мало), формируются мезоны, состоящие из тяжелых кварков, например c и b , массы которых во много раз больше, чем массы u - и d -кварков. Это подтверждается нашим результатом. Очевидно, что если масса составляющих кварков большая, то масса мезонов, состоящих из этих кварков, также будет больше, чем масса мезонов, состоящих из легких кварков. Поэтому при возрастании массы мезонов радиус конфайнмента уменьшается. С учетом этого определяется масса мезонов с радиальным возбуждением. Полученные численные результаты представлены в табл. 1, где также приведены экспериментальные данные спинового усреднения массы мезонов и численные значения радиуса конфайнмента. Из выражения (2.23) определяются параметры Ω редже- n_r -траектории:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= 1,60 \text{ ГэВ}^2 & \text{при } n_r &= 1, \\ \Omega_2 &= 1,49 \text{ ГэВ}^2 & \text{при } n_r &= 2, \\ \Omega_3 &= 1,42 \text{ ГэВ}^2 & \text{при } n_r &= 3. \end{aligned} \quad (4.1)$$

В эксперименте достаточно достоверно определено значение этого параметра только для первого радиального возбужденного состояния: $\Omega_{\text{exp}} = (1,6 \pm 0,1) \text{ ГэВ}^2$. Таким образом, наши результаты удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными. В нашем подходе параметр ρ связан с асимптотическим поведением волновой функции. При больших расстояниях, т. е. для мезонов, состоящих из легких кварков, оказалось, что $\rho \sim 0,7$, а при малых расстояниях, для тяжелых мезонов, $\rho \sim 0,98$. Волновая функция связанного состояния на больших расстояниях является функцией Эйри, которая обеспечивает ненаблюдаемость цветных объектов, а на малых расстояниях становится

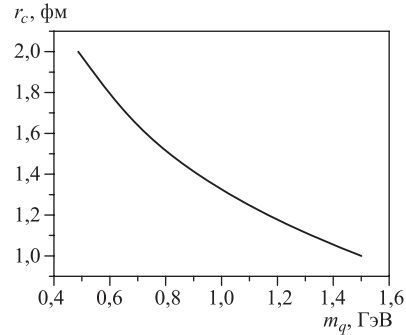


Рис. 4. Зависимость конституентной массы от радиуса конфайнмента при $\alpha_s = 0,39$ и $\sigma = 0,19$ ГэВ² для основного состояния

кулоновской. Это означает, что на малых расстояниях взаимодействие между составляющими цветными объектами осуществляется одноглюонным обменом, и эти объекты можно рассматривать как свободные.

Таблица 1. Спиновое усреднение массы мезонов с радиальным возбуждением при $\alpha_s = 0,39$ и $\sigma = 0,19 \text{ ГэВ}^2$

ns	$1s$	$2s$	$3s$	$4s$	$5s$
$\overline{M}_{\text{exp}}$, ГэВ	0,612	$1,42 \pm 0,04$	$\pi(1,80)$	$\rho(2,15)$	
[14]	0,618	1,400	1,868	2,176	2,502
Наст. работа	0,611	1,406	1,829	2,15	2,503
r_c (фм)	2,065	1,2703	1,06	1,01	0,973

Теперь приступим к определению массового спектра мезонов с орбитальным возбуждением. В этом случае необходимо учесть вклад гамильтониана, представленного в (3.7). Полученные численные результаты для массы мезонов с орбитальным возбуждением представлены в табл. 2. В этом случае параметризация (2.20) редже- ℓ -траектории записывается в виде

$$\frac{M^2(\ell, 0)}{\sigma} = 2\pi\ell + 1,965. \quad (4.2)$$

Тогда наклон редже- ℓ -траектории равен $\alpha'_L = 0,838 \text{ ГэВ}^{-2}$. В этом случае для потенциала Корнелла параметр пересечения редже- ℓ -траектории $\alpha_L(0) = -0,313$. Полученные результаты с учетом непертурбативного и нелокального характера взаимодействия для наклона и пересечения редже- ℓ -траектории удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными (2.21) и (2.22).

Таблица 2. Спиновое усреднение массы мезонов с орбитальным возбуждением при $\alpha_s = 0,39$ и $\sigma = 0,19 \text{ ГэВ}^2$

ℓ	0	1	2	3	4
$\overline{M}_{\text{exp}}$, ГэВ	0,612	$1,252 \pm 0,05$	$1,67 \pm 0,02$	$2,02 \pm 0,01$	
[14]	0,618	1,190	1,628	1,926	
Наст. работа	0,611	1,232	1,661	1,988	2,196
r_c , фм	2,065	1,2703	1,06	1,01	0,973

На основании полученных результатов можно заключить следующее:

- Определен массовый спектр мезонов, состоящих из легко-легких и легко-тяжелых кварков как орбитального, так и радиального возбужденных состояний, с учетом непертурбативного и нелокального характера взаимодействия.
- Определена зависимость конститuentной массы составляющих частиц от массы свободного состояния. Наши результаты показали, что когда кварки легкие, разность конститuentных и токовых масс кварков оказывается в несколько раз больше токовых масс кварков, если кварки тяжелые, как c и b , то разность этих масс незначительна.
- Выбрав пропагатор в виде целой аналитической функции гауссова типа в импульсном пространстве, мы определили модифицированный потенциал взаимодействия кварков, зависящий от радиуса конфайнмента. Предложен один из альтернативных вариантов учета нелокального характера взаимодействия при определении свойств адронов на больших расстояниях.

• Определена зависимость конstituентной массы от характерного размера (радиуса) конфайнмента. Наши результаты показали, что при уменьшении радиуса конфайнмента конstituентная масса составляющих частиц увеличивается. Это приводит к уменьшению вклада непотенциального взаимодействия в массовый спектр связанного состояния.

• Определены наклон и параметр пересечения редже-траектории для орбитального и радиального возбужденных состояний. Наши результаты показали, что только с учетом непертурбативного и нелокального характера взаимодействия для этих параметров возможно достичь удовлетворительного согласия с экспериментальными данными. Также показано, что при малых $\ell \leq 5$ редже-траектории для мезонов, состоящих из одинаковых кварков, — линейные, а для мезонов, состоящих из легких и тяжелых кварков, — нелинейные.

Приложение А

Представим некоторые детали вычисления матричного элемента $\langle n_r | H_I | n_r \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle n_r | H_I | n_r \rangle &= \int_0^\infty dx \int \left(\frac{d\eta}{\sqrt{\pi}} \right)^d e^{-\eta^2(1+x)} \times \\ &\times \left[-\frac{4\rho^2 E M_2}{\omega^{2\rho-1}} \frac{x^{-2\rho}}{\Gamma(1-2\rho)} + \frac{4\rho^2 \sigma \mu}{\omega^{3\rho-1}} \frac{x^{-3\rho}}{\Gamma(1-3\rho)} \right] \langle n_r | : e_2^{-2i\sqrt{x\omega}(q\eta)} : | n_r \rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

После некоторых упрощений из (A.1) получаем

$$\langle n_r | H_I | n_r \rangle = -\frac{4\rho^2 E \mu}{\omega^{2\rho-1}} \frac{\Gamma(d/2 + 2\rho - 1)}{\Gamma(d/2)} \tilde{B} + \frac{4\rho^2 \sigma \mu}{\omega^{3\rho-1}} \frac{\Gamma(d/2 + 3\rho - 1)}{\Gamma(d/2)} \tilde{C}. \quad (\text{A.2})$$

Здесь

$$\tilde{B} = +\frac{\Gamma(1+n_r)}{\Gamma(n_r+d/2)} \frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma(1-2\rho)} \sum_{k=2}^{2n_r} (-1)^k A_{n_r}(k) \frac{\Gamma(1+k-2\rho)}{\Gamma(k+d/2)} \quad (\text{A.3})$$

и

$$\tilde{C} = +\frac{\Gamma(1+n_r)}{\Gamma(n_r+d/2)} \frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma(1-3\rho)} \sum_{k=2}^{2n_r} (-1)^k A_{n_r}(k) \frac{\Gamma(1+k-3\rho)}{\Gamma(k+d/2)}, \quad (\text{A.4})$$

где

$$A_{n_r}(k) = \sum_{s=1}^{n_r} \frac{2^{2s-k}}{\Gamma(n_r-s+1)} \frac{\Gamma(k+n_r-s+d/2)}{\Gamma^2(k-s+1)\Gamma(2s-k+1)}. \quad (\text{A.5})$$

Выражения (A.2)–(A.5) использованы для определения энергетического спектра гамильтониана с растущим потенциалом. Матричный элемент $\langle n_r | H_I | n_r \rangle$ для гамильтониана

взаимодействия с потенциалом Корнелла вычисляется аналогичным образом:

$$\langle n_r | H_I | n_r \rangle = -\frac{4\rho^2 E M_2}{\omega^{2\rho-1}} \frac{\Gamma(d/2 + 2\rho - 1)}{\Gamma(d/2)} \tilde{B} + \frac{4\rho^2 \sigma M_2}{\omega^{3\rho-1}} \times \\ \times \frac{\Gamma(d/2 + 3\rho - 1)}{\Gamma(d/2)} \tilde{C} - \frac{16\rho^2 \alpha_s M_2}{3\omega^{\rho-1}} \frac{\Gamma(d/2 + \rho - 1)}{\Gamma(d/2)} \tilde{D}, \quad (\text{A.6})$$

где

$$\tilde{D} = +\frac{\Gamma(1 + n_r)}{\Gamma(n_r + d/2)} \frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma(1 - \rho)} \sum_{k=2}^{2n_r} (-1)^k A_{n_r}(k) \frac{\Gamma(1 + k - \rho)}{\Gamma(k + d/2)}. \quad (\text{A.7})$$

Используя (A.6), мы определили энергетический спектр с орбитальным и радиальным возбуждениями.

Приложение Б

Приведем детали вычисления энергетического спектра с учетом нелокального характера взаимодействия. Рассмотрим УШ с модифицированным потенциалом:

$$\left[\frac{1}{2M_2} \mathbf{P}^2 + \sigma(r) \cdot r \right] \Psi(\mathbf{r}) = E(M_2) \Psi(\mathbf{r}), \quad (\text{B.1})$$

где $\sigma(r)$ представлены в (3.12). Из (B.1) определяем энергетический спектр E с помощью метода ОП. После некоторых упрощений, аналогичных проделанным выше для энергетического спектра, имеем

$$\frac{E(\ell, n_r)}{\sqrt{\sigma}} = \min_{\rho} \left[\frac{z^2}{8\rho^2 x} \frac{\Gamma(2 + \rho + 2\rho\ell)}{\Gamma(3\rho + 2\rho\ell)} \frac{1 + \frac{4n_r}{(1 + \rho + 2\rho\ell)}}{1 + \tilde{B}} + \frac{1}{z} \frac{\Gamma(4\rho + 2\rho\ell)}{\Gamma(3\rho + 2\rho\ell)} \frac{1 + \tilde{C}}{1 + \tilde{B}} - \right. \\ \left. - \frac{1}{z^2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \frac{1}{2j + 1} \left(\frac{\Lambda}{\sqrt{2\sigma}} \right)^{2j+1} \frac{1}{z^{2j}} \frac{\Gamma(5\rho + 2j\rho + 2\rho\ell)}{\Gamma(3\rho + 2\rho\ell)} \frac{1 + \tilde{W}_j}{1 + \tilde{B}} \right], \quad (\text{B.2})$$

где параметр z определяется из уравнения

$$\frac{8x\rho^2}{z^4\sqrt{\pi}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \Gamma(5\rho + 2j\rho - 1)}{j!(2j + 1)z^{2j}} \left(\frac{\Lambda}{\sqrt{2\sigma}} \right)^{2j+1} \times \\ \times \frac{[2\rho + 2j\rho + (4\rho + 2j\rho - 1)\tilde{B} - (2\rho - 1)\tilde{W}_j]}{\left[\rho + (2\rho - 1) \frac{2n_r}{1 + \rho + 2\rho\ell} + \frac{1}{2}\tilde{B} \right] \Gamma(2 + \rho + 2\rho\ell)} + \\ + 1 - \frac{4x\rho^2 \Gamma(4\rho + 2\rho\ell) [\rho + 4(3\rho - 1)\tilde{B} - (2\rho - 1)\tilde{C}]}{z^3 \left[\rho + (2\rho - 1) \frac{2n_r}{1 + \rho + 2\rho\ell} + \frac{1}{2}\tilde{B} \right] \Gamma(2 + \rho + 2\rho\ell)} = 0, \quad (\text{B.3})$$

а

$$\widetilde{W}_j = -\frac{\Gamma(1+n_r)}{\Gamma(n_r+d/2)} \frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma(1-4\rho-2j\rho)} \sum_{k=2}^{2n_r} (-1)^k A_{n_r}(k) \frac{\Gamma(1+k-4\rho-2j\rho)}{\Gamma(k+d/2)}, \quad (\text{Б.4})$$

\widetilde{B} , \widetilde{C} и $A_{n_r}(k)$ представлены в (А.3), (А.4) и (А.5) соответственно. На основе полученных выражений определены масса и конституентная масса составляющих частиц с учетом глюонного распределения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Quigg C., Rosner J.L.* // Phys. Rev. 1990. V. 56. P. 167.
2. *Быков А. А., Дремин И. М., Леонидов А. В.* // УФН. 1984. Т. 143. С. 3.
3. *Godfrey S., Isgur N.* // Phys. Rev. D. 1985. V. 32. P. 189;
Isgur N., Wise M. // Phys. Lett. B. 1984. V. 232. P. 113; 1990. V. 237. P. 527.
4. *Бьеркен Дж. Д., Дрелл С. Д.* Релятивистская квантовая теория. М., 2000.
5. *Shifman M.A., Vainshtain A. I., Zakharov V. I.* // Nucl. Phys. B. 1979. V. 147. P. 385.
6. *Dosch H. G.* // Phys. Lett. B. 1987. V. 190. P. 177;
Dosch H. G., Simonov Yu. A. // Phys. Lett. B. 1988. V. 205. P. 393.
7. *Simonov Yu. A.* // Nucl. Phys. B. 1988. V. 307. P. 393;
Simonov Yu. A., Tjon J. A. // Ann. Phys. 2002. V. 300. P. 54.
8. *Динейхан М., Жаугашева С. А., Кожамкулов Т. А.* // ЯФ. 2005. Т. 68. С. 350; Few-Body Syst. 2005. V. 37. P. 49.
9. *Dineykhon M., Efimov G. V., Namsrai Kh.* // Fortschr. Phys. 1991. V. 39. P. 259.
10. *Simonov Yu. A.* // Phys. Lett. B. 2001. V. 515. P. 137.
11. *Feynman R. P., Hibbs A. P.* Quantum Mechanics and Path Integrals. N.Y.: Me Graw-Hill, 1963.
12. *Dineykhon M. et al.* Oscillator Representation in Quantum Physics // Lecture Notes in Physics. V. 26. Berlin, 1995.
13. *Badalian A. M., Bakker B. L. G.* // Phys. Rev. D. 2002. V. 66. P. 034025.
14. *Badalian A. M., Bakker B. L. G., Simonov Yu. A.* // Phys. Rev. D. 2002. V. 66. P. 034026.
15. *Tang A., Norbury J. W.* // Phys. Rev. D. 2000. V. 62. P. 016006.
16. *Hagiwara K. et al.* Particle Data Group // Phys. Rev. D. 2002. V. 66. P. 010001.
17. *Abele A. et al.* // Phys. Lett. B. 1998. V. 423. P. 175;
Amsler C. // Rev. Mod. Phys. 1998. V. 70. P. 1293.
18. *Anisovich A. V. et al.* // Phys. Rev. D. 2000. V. 62. P. 051502;
Anisovich V. V. hep-ph/0110326.

654 Динейхан М., Жаугашева С. А., Каримжан К.

19. *Bugg D. V. et al. // Phys. Lett. B. 1995. V. 353. P. 378;*
Anisovich A. V. et al. // Nucl. Phys. A. 2000. V. 662. P. 319.
20. *Efimov G. V., Nedelko S. N. // Phys. Rev. D. 1995. V. 51. P. 176; 1996. V. 54. P. 4483;*
Ефимов Г. В. // ТМФ. 2004. Т. 141. С. 80.
21. *Brau F., Semay C. // Phys. Rev. D. 2004. V. 70. P. 014017.*

Получено 9 июня 2008 г.