Письма в ЭЧАЯ. 2006. Т. 3, № 6(135). С. 33–37

УДК 539.12.01

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ФОРМФАКТОРОВ ПЕРЕХОДА ИЗ nS-СОСТОЯНИЙ ДИСКРЕТНОГО СПЕКТРА В СОСТОЯНИЯ НЕПРЕРЫВНОГО СПЕКТРА ВОДОРОДОПОДОБНЫХ АТОМОВ

О. О. Воскресенская, С. М.-К. Бакмаев

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Предложен новый подход к расчету переходных формфакторов водородоподобных атомов. Получены явные аналитические выражения для формфакторов перехода из произвольных состояний дискретного спектра в состояния непрерывного спектра в терминах классических полиномов.

The new approach for calculation of form factors of hydrogenlike atoms is proposed. The explicit expressions for form factors of transitions from bound nS states to continuum in terms of the classical polynomials are derived.

Для интерпретации данных эксперимента DIRAC [1–3] наряду со значениями полных сечений и сечений перехода между связанными состояниями атома пиония необходимы также выражения для сечений переходов этих атомов из различных связанных состояний в состояния непрерывного спектра, характеризуемые определенным значением относительного импульса $\pi^+\pi^-$-системы $\mathbf{p}$ в несвязанном состоянии.

В борновском приближении они выражаются через соответствующие переходные формфакторы обычными соотношениями

$$\sigma_{fi} = \int |U(\mathbf{q})|^2 \left[S_{fi}\left(\frac{\mathbf{q}}{2}\right) - S_{fi}\left(-\frac{\mathbf{q}}{2}\right)\right]^2 d^2\mathbf{q}, \tag{1}$$

$$S_{fi}(\mathbf{q}) = \int \psi_f^*(r)\, \mathrm{e}^{i\mathbf{qr}} \psi_i(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}, \tag{2}$$

в которых волновые функции конечного состояния ψ_f должны быть выбраны в виде [4]

$$\begin{gathered} \psi_f(\mathbf{r}) = \psi_{\mathbf{p}}^{(-)}(\mathbf{r}) = c^{(-)} \exp{(i\mathbf{pr})} \Phi\left(-i\xi, 1, -i(pr + \mathbf{pr})\right), \\ c^{(-)} = (2\pi)^{-3/2} \exp\left(\frac{\pi\xi}{2}\right) \Gamma(1 + i\xi), \quad \xi = \mu\alpha/p, \end{gathered} \tag{3}$$

волновые же функции начального состояния ψ_i принадлежат дискретному спектру системы $\psi_i(\mathbf{r}) \equiv \psi_{nlm}(\mathbf{r})$.

Обычно [5–7] при расчетах переходных формфакторов $S_{\mathbf{p},nlm}(\mathbf{q})$ волновую функцию конечного состояния разлагают в ряд по сферическим гармоникам:

$$\psi_{\mathbf{p}}^{(-)}(\mathbf{r}) = \sum_{l_1=0}^{\infty} \sum_{m_1=-l_1}^{+l_1} i^{l_1} Y_{l_1 m_1}^{*} \left(\frac{\mathbf{p}}{p}\right) \psi_{pl_1m_1}(\mathbf{r}), \tag{4}$$

$$\psi_{pl_1m_1}(\mathbf{r}) = Y_{l_1m_1}^{*} \left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) R_{pl_1}(r), \tag{5}$$

сводя тем самым задачу к расчету бесконечного числа переходных формфакторов вида

$$S_{pl_1m_1,nlm}(\mathbf{q}) = \int \psi_{pl_1m_1}^{*}(\mathbf{r})\, \mathrm{e}^{i\mathbf{qr}} \psi_{nlm}(\mathbf{r}) d^3 r, \tag{6}$$

так что

$$S_{\mathbf{p},nlm} = \sum_{l_1=0}^{\infty} \sum_{m_1=-l_1}^{l_1} i^{l_1} Y_{l_1m_1}^{*} \left(\frac{\mathbf{p}}{p}\right) S_{pl_1m_1,nlm}(\mathbf{q}). \tag{7}$$

Ясно, что при практическом применении выражения (7) только конечное число слагаемых может быть учтено в нем и останется открытым вопрос об ошибке, допускаемой отбрасыванием остатка ряда с бесконечным числом слагаемых.

Однако результат работы [8], авторы которой получили замкнутое выражение для формфактора $|100\rangle \to |\mathbf{p}\rangle$-перехода, позволяет надеяться, что и выражения для формфакторов произвольных $|nlm\rangle \to |\mathbf{p}\rangle$-переходов могут быть записаны в замкнутом виде. Ниже показано, что это действительно так.

Начнем с рассмотрения формфакторов $|nS\rangle \to |\mathbf{p}\rangle$- или $|n00\rangle \to |\mathbf{p}\rangle$-переходов. Волновые функции начального состояния в выражении (2) в этом случае имеют вид

$$\begin{aligned} \psi_i = \psi_{n00}(\mathbf{r}) &= \left(\frac{\omega^3}{\pi}\right)^{1/2} \mathrm{e}^{-\omega r}\, \Phi(-n+1; 2; 2\omega r) \\ &\equiv \left(\frac{\omega^3}{\pi}\right)^{1/2} \frac{1}{n}\, \mathrm{e}^{-\omega r}\, L_{n-1}^{1}(2\omega r), \\ &\qquad \omega = \mu\alpha/n, \end{aligned} \tag{8}$$

где Φ — вырожденная гипергеометрическая функция; L_k^{λ} — полиномы Лагерра.

Используем рекуррентные соотношения [9]

$$L_k^{\lambda+1}(x) = \frac{1}{x}\left[(k+\lambda+1) L_{k-1}^{\lambda}(x) - (k+1) L_k^{\lambda}(x)\right] \tag{9}$$

и представление полиномов Лагерра с помощью производящей функции

$$L_k^{\lambda}(x) = \Delta_z^{(k)} \left[(1-z)^{-(\lambda+1)} \exp\left(\frac{xz}{z-1}\right)\right], \tag{10}$$

где оператор $\Delta_z^{(k)}$ определен следующим соотношением

$$\Delta_z^{(k)}\left(f(z)\right) = \frac{1}{k!} \left.\left(\frac{d^k}{dz^k} f(z)\right)\right|_{z=0}. \tag{11}$$

Тогда

$$\psi_i(r) = \frac{\omega^{1/2}}{2\sqrt{\pi}r}\left[\Delta_z^{(n-1)} - \Delta_z^{(n)}\right]\left[(1-z)^{-1}\exp\left(-\omega(z)r\right)\right], \tag{12}$$

$$\omega(z) = \omega(1+z)(1-z)^{-1} \tag{13}$$

и

$$S_{\mathbf{p},noo}(\mathbf{q}) = \frac{\omega^{1/2}c^{(-)}}{2\sqrt{\pi}}\left[\Delta_z^{(n-1)} - \Delta_z^{(n)}\right]\left[\frac{J(\mathbf{q},\mathbf{p},z)}{(1-z)}\right], \tag{14}$$

$$J(\mathbf{q},\mathbf{p},z) = \int \frac{d^3r}{r}\Phi\left(i\xi, 1, i(pr + \mathbf{p},\mathbf{r})\right)\exp\left[i(\mathbf{q}-\mathbf{p})\mathbf{p} - \omega(z)r\right]. \tag{15}$$

Последний интеграл легко вычисляется с использованием интегрального представления для гипергеометрических функций (см., например, [10]). Результат имеет вид

$$J(\mathbf{q},\mathbf{p},z) = 4\pi[\omega^2(z) + \boldsymbol{\Delta}^2]^{-1+i\xi}[(\omega(z)-ip)^2 + q^2]^{-i\xi}, \tag{16}$$

где

$$\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{q} - \mathbf{p}.$$

Учитывая определение (13) и очевидное соотношение

$$\Delta_z^{(n)}\left(zf(z)\right) = \Delta_z^{(n-1)}f(z), \tag{17}$$

выражение (14) можно переписать в виде

$$S_{\mathbf{p},noo}(\mathbf{q}) = -4\sqrt{\pi}c^{(-)}\omega^{1/2}\left(\Delta_z^{(n)} - 2\Delta_z^{(n-1)} + \Delta_z^{(n-2)}\right)\left[D_1^{-1+i\xi}D_2^{-i\xi}\right], \tag{18}$$

$$\begin{aligned} D_1 &= (1+z^2)(\omega^2+\Delta^2) - 2z(\Delta^2-\omega^2),\\ D_2 &= (\omega-ip)^2 + q^2 - 2z(q^2-p^2-\omega^2) + z^2[(\omega+ip)^2+q^2]. \end{aligned} \tag{19}$$

Используя определение полиномов Гегенбауэра [9, 11]

$$(1-2xz+z)^{-\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} C_k^{(\lambda)}(x)z^k, \tag{20}$$

легко получить

$$\begin{gathered} D_1^{-1+i\xi} = (\Delta^2+\omega^2)^{-1+i\xi}\sum_{k=0}^{\infty} C_k^{(1-i\xi)}(u)z^k,\\ u = \frac{\Delta^2-\omega^2}{\Delta^2+\omega^2}; \end{gathered} \tag{21}$$

$$\begin{gathered} D_2^{-i\xi} = [(\omega-ip)^2+q^2]^{-i\xi}\sum_{k=0}^{\infty} C_k^{(i\xi)}(v)z^k w^k,\\ v = \frac{q^2-p^2-\omega^2}{\sqrt{[(\omega-ip)^2+q^2][(\omega+ip)^2+q^2]}},\\ w = \sqrt{\frac{(\omega+ip)^2+q^2}{(\omega-ip)^2+q^2}}. \end{gathered} \tag{22}$$

Наконец, с помощью соотношений

$$\Delta_z^{(n)}[f_1(z)f_2(z)] = \sum_{k=0}^{n} \left[\Delta_z^{(n-k)} f_1(z)\right] \left[\Delta_z^{(k)} f_2(z)\right], \tag{23}$$

$$C_n^{(\lambda)}(x) - C_{n-1}^{(\lambda)}(x) = \frac{\Gamma\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\Gamma(n-1+2\lambda)}{\Gamma(2\lambda-1)\Gamma\left(n+\lambda-\frac{1}{2}\right)} P^{(\lambda-\frac{3}{2},\lambda-\frac{1}{2})}(x), \tag{24}$$

где $P^{(\lambda-\frac{3}{2},\lambda-\frac{1}{2})}(x)$ — полиномы Якоби, окончательно получаем [12]:

$$\begin{aligned} S_{\mathbf{p},noo}(\mathbf{q}) = -2\sqrt{\pi}c^{(-)}\omega^{1/2}(\omega^2+\Delta^2)^{-1+i\xi}[(\omega-ip)^2+q^2]^{-i\xi}\times \\ \times \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\xi\right)}{\Gamma(1-2i\xi)} \sum_{k=0}^{n} w^k C_k^{(i\xi)}(v) \left[\frac{\Gamma(n-k+1-2i\xi)}{\Gamma\left(n-k+\frac{1}{2}-i\xi\right)}\times\right. \\ \left. \times P_{n-k}^{(-\frac{1}{2}-i\xi,\frac{1}{2}-i\xi)}(u) - \frac{\Gamma(n-k-2i\xi)}{\Gamma\left(n-k-\frac{1}{2}-i\xi\right)} P_{n-k-1}^{(-\frac{1}{2}-i\xi,\frac{1}{2}-i\xi)}(u)\right]. \end{aligned} \tag{25}$$

Таким образом, формфакторы $|nS\rangle \to |\mathbf{p}\rangle$-переходов выражаются в терминах классических полиномов и легко могут быть рассчитаны численно с произвольной точностью.

В работе [13] получены аналогичные результаты в дипольном приближении для процесса радиационной рекомбинации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Adeva B. et al.* Lifetime measurement of $\pi^+\pi^-$ atoms to test low energy QCD predictions. Proposal to the SPSLC, CERN/SPSLC 95–1, SPSLC/P 284. Geneva, 1995.

2. *Неменов Л. Л.* Элементарные релятивистские атомы // ЯФ. 1985. Т. 41. С. 980.

3. Proc. of the Intern. Workshop on Hadronic Atoms «HadAtom99», Bern, 1999 / Eds. J. Gasser et al. BUTP-99/26, BUHE-99-08. Bern, 1999; hep-ph/9911339.

4. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Наука, 1974. 752 с.

5. *Omidvar K.* Bound-bound transitions in hydrogenlike atoms induced by fast charged particles // Phys. Rev. 1969. V. 188. P. 140 (see also references therein).

6. *Barut A. O., Wilson R.* Analytic group-theoretical form factors of hydrogenlike atoms for discrete and continuum transitions // Phys. Rev. A. 1989. V. 40. P. 1340.

7. *Trautmann D., Baur G., Rosel F.* Fast evaluation of the relativistic ionisation form factor: momentum space representation // J. Phys. B. 1983. V. 16. P. 3005.

8. *Massey H. S. W., Mohr C. B. O.* Collision of slow electrons with atoms // Proc. Soc. A (London). 1933. V. 140. P. 613.

9. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М: Наука, 1971. 1108 с.;
Prudnikov A. P., Brychkov Ya. A., Marychev O. I. Integrals and series, special functions. M.: Nauka, 1983. 752 p.

10. *Nordsieck A.* Reduction of an integral in theory of bremsstrahlung // Phys. Rev. 1954. V. 93. P. 785.

11. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стигана. М: Наука, 1979. 832 с.;
Luke Y. L. Mathematical functions and their approximation. N. Y.: Academic, 1975.

12. *Voskresenskaya O.* Analytic Form Factors or Hydrogenlike for Discrete-Continuum Transitions. I. Transitions from n-States. hep-ph/0111216.

13. *Катков В., Страховенко В.* Процесс электронной рекомбинации и использование его при электронном охлаждении // ЖЭТФ. 1978. Т. 75, № 10. С. 1269.

Получено 20 июля 2005 г.