Письма в ЭЧАЯ. 2006. Т. 3, № 6(135). С. 113–122

УДК 539.12.01

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВРЕМЕНИПОДОБНЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ В РИМАНОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ

Н. А. Черников, Н. С. Шавохина

Объединенный институт ядерных исследований. Дубна

Составляются дифференциальные уравнения временинодобных геодезических поверхностей в римановом пространстве-времени. Эти уравнения описывают движение ареальных объектов, на внутренние части которых суммарная внешняя сила не действует. Гравитационные силы к числу внешних сил не относятся. Они учитываются в геометрических объектах пространства-времени.

Differential equations of timelike geodesic surfaces in Riemannian space-time are derived. These equations describe the motion of areal objects the internal parts of which are not affected by the total external force. Gravitational forces do not belong to exernal forces. They are taken into account in the geometrical objects of space-time.

ВВЕДЕНИЕ

Ареальными мы называем протяженные объекты, которые адекватно описываются посредством ареальной метрики Вагнера [1]. Впервые термин «ареальные объекты» был предложен одним из авторов настоящей статьи (Н. С. Шавохиной) в работе [2]. Различные ареальные объекты были рассмотрены в ее докторской диссертации [3].

Наибольший ннтерес для физиков представляют ареальные объекты, описываемые посредством ареальной метрики, порождаемой линейной метрикой Римана простейшего гиперболического вида. Многообразие с такой метрикой мы называем времениподобным.

Структура ареального объекта предельно проста: она характеризуется всего двумя параметрами — размерностью объекта и константой взаимодействия, с которой он входит в лагранжиан.

Ареальные объекты материальны. Субстанция ареального объекта — это некий эфир. В трехмерном случае — эфирная масса, в двумерном — эфирная пленка, а в одномерном — эфирная нить.

Уже стало привычным рассматривать m-мерные объекты $(0 \leqslant m \leqslant n)$ в $(n+1)$-мерном мире — пространстве-времени [4]. За время своего существования m-мерный объект заметает $(m+1)$-мерную времениподобную мировую поверхность. В частности, нульмерный объект — материальная точка — заметает времениподобную мировую линию, а n-мерный объект заметает $(n+1)$-мерную мировую область. Дальше мы опираемся на результаты работы [5].

Мировую поверхность, заметаемую m-мерным ареальным объектом, мы назвали в [5] геодезической, когда на ее внутренние части суммарная внешняя сила не действует. Это мотивируется тем, что мировая линия нульмерного объекта называется геодезической, если суммарная внешняя сила на объект не действует. Внутренних же частей у нульмерного объекта не имеется.

Заметим, что гравитационные силы к числу внешних сил не относятся. Они учитываются в геометрических объектах пространства-времени, как-то: тензор аффинной деформации, тензор кривизны и метрический тензор.

1. ФУНКЦИЯ ЛАГРАНЖА, ЕЕ ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ И КАНОНИЧЕСКИЙ ТЕНЗОР

Функцией Лагранжа называется вещественная функция

$$L = L(U, X, \Xi) \tag{1}$$

r вещественных переменных x^α, mr вещественных переменных ξ_k^α и m вещественных параметров u^k, где r и m — положительные целые числа. Здесь и дальше переменные x^α составляют строку X длиной r, переменные ξ_k^α составляют прямоугольную матрицу Ξ площадью $m \times r$, параметры u^k составляют строку U длиной m.

Индексы, обозначенные буквами латинского алфавита, предшествующими в алвафите букве m, принимают значения от 1 до числа m.

Индексы, обозначенные буквами греческого алфавита, принимают значения от 1 до числа r.

Дальше будут встречаться пары одинаковых индексов. В таких случаях подразумевается суммирование по этим индексам в пределах от 1 до m, если индексы латинские, и в пределах от 1 до r, если индексы греческие.

Обозначим через

$$L_\alpha(U, X, \Xi) = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} L(U, X, \Xi), \quad L_\alpha^k(U, X, \Xi) = \frac{\partial}{\partial \xi_k^\alpha} L(U, X, \Xi) \tag{2}$$

частные производные функции Лагранжа (1). Все они являются вещественными функциями переменнных, x^α, ξ_k^α и параметров u^k. Каноническим тензором для функции Лагранжа называется сумма

$$T_i^k(U, X, \Xi) = \xi_i^\alpha L_\alpha^k(U, X, \Xi) - \delta_i^k L(U, X, \Xi). \tag{3}$$

2. ИНТЕГРАЛ ДЕЙСТВИЯ И ЕГО ВАРИАЦИЯ

Дальше переменные x^α считаются вещественными фукциями вещественых параметров u^k, а переменные ξ_k^α — частными производными $\dfrac{\partial x^\alpha}{\partial u^k}$. Параметры u^k по-прежнему размещаем в строку U длиной m, а операторы $\dfrac{\partial}{\partial u^k}$ размещаем в столбец $\dfrac{\partial}{\partial u}$ высотой m. Соответственно пишем

$$x^\alpha = x^\alpha(U),\ X = X(U), \quad \xi_k^\alpha = \xi_k^\alpha(U) = \frac{\partial}{\partial u^k} x^\alpha(U), \quad \Xi = \frac{\partial}{\partial U} X(U). \tag{4}$$

При этом функции (1)–(3) становятся следующими вещественными функциями вещественной строки U:

$$L(U) = L\left(U, X(U), \frac{\partial}{\partial U} X(U)\right), \tag{5}$$

$$L_\alpha(U) = L_\alpha\left(U, X(U), \frac{\partial}{\partial U} X(U)\right), \quad L_\alpha^k(U) = L_\alpha^k\left(U, X(U), \frac{\partial}{\partial U} X(U)\right), \tag{6}$$

$$T_i^k(U) = T_i^k\left(U, X(U), \frac{\partial}{\partial U} X(U)\right) = L_\alpha^k(U) \frac{\partial}{\partial u^i} x^\alpha(U) - \delta_i^k L(U). \tag{7}$$

Функция Лагранжа (5) называется плотностью действия.

Интеграл действия

$$S = \int\limits_\Omega L\left(U, X(U), \frac{\partial}{\partial U} X(U)\right) dU, \tag{8}$$

где $dU = du^1 \cdots du^m$, берется по m-мерной области Ω в пространстве параметров U. Интеграл действия является функционалом $S = S[X(U)]$ функции $X(U)$.

Вариацией функции $X(U)$, входящей в состав интеграла действия (8), называется такая вещественная функция $\delta X(U)$, значения которой вместе со значениями ее производной $\dfrac{\partial}{\partial U}\delta X(U)$ равняются нулю на границе области Ω.

Вариацией $\delta H[X(U)]$ всякого функционала $H[X(U)]$ называется производная

$$\frac{d}{d\epsilon} H[X(U) + \epsilon \delta X(U)] \tag{9}$$

по вещественной переменной ϵ при $\epsilon = 0$.

Соответственно, вариация интеграла действия (8) равна

$$\delta S = \int\limits_\Omega \left(L_\alpha(U) \delta X^\alpha(U) + L_\alpha^k(U) \frac{\partial}{\partial u^k} \delta X^\alpha(U)\right) dU. \tag{10}$$

По теореме Гаусса интеграл

$$\int\limits_\Omega \frac{\partial}{\partial u^k} (L_\alpha^k(U) \delta X^\alpha(U)) dU \tag{11}$$

равен нулю вследствие условий, наложенных на $\delta X(U)$. Поэтому

$$\delta S = \int\limits_\Omega \left(L_\alpha(U) - \frac{\partial}{\partial u^k} L_\alpha^k(U)\right) \delta X^\alpha(U) dU. \tag{12}$$

Так как в полученном интеграле (12) все r функций $\delta X^\alpha(U)$ принимают произвольные значения в области Ω, то условие

$$\delta H[X(U)] = 0 \tag{13}$$

для функционала действия (8) эквивалентно уравнениям Лагранжа

$$\frac{\partial}{\partial u^k} L_\alpha^k(U) - L_\alpha(U) = 0. \tag{14}$$

Это замечание называют вариационным принципом.

О роли вариационного исчисления в теоретической физике см. [6]. О связи квантовой механики с классической в случае, когда уравнения движения линейны, см. [7].

3. ДИВЕРГЕНЦИЯ КАНОНИЧЕСКОГО ТЕНЗОРА (7)

Дивергенция канонического тензора (7) равна

$$\frac{\partial}{\partial u^k} T_i^k(U) = L_\alpha^k(U) \frac{\partial^2}{\partial u^k \partial u^i} x^\alpha(U) + \frac{\partial}{\partial u^k} L_\alpha^k(U) \frac{\partial}{\partial u^i} x^\alpha(U) - \frac{\partial}{\partial u^i} L(U). \tag{15}$$

Обозначим

$$E_i(U, X, \Xi) = -\frac{\partial}{\partial u^i} L(U, X, \Xi). \tag{16}$$

Дифференцируя функцию (5), получаем

$$\frac{\partial}{\partial u^i} L(U) = -E_i(U) + L_\alpha(U) \frac{\partial}{\partial u^i} x^\alpha(U) + L_\alpha^k(U) \frac{\partial^2}{\partial u^k \partial u^i} x^\alpha(U). \tag{17}$$

где

$$E_i(U) = E_i(U, X(U), \Xi(U)). \tag{18}$$

Подставляя в (15) производную (17), получаем

$$\frac{\partial}{\partial u^k} T_i^k(U) = E_i(U) + \left[\frac{\partial}{\partial u^k} L_\alpha^k(U) - L_\alpha(U)\right] \frac{\partial}{\partial u^i} x^\alpha(U). \tag{19}$$

Наконец, учитывая уравнения Лагранжа (14), получаем

$$\frac{\partial}{\partial u^k} T_i^k(U) = E_i(U). \tag{20}$$

4. ОДНОРОДНАЯ ФУНКЦИЯ ЛАГРАНЖА

Функция Лагранжа (1) называется однородной, если не зависит явно от переменных интегрирования U и если ее каноничекий тензор (3) тождественно равен нулю.

В работе [8] предложен общий метод приведения функции Лагранжа (1) к однородному виду.

Однородная функция $L = L(X, \Xi)$ при замене аргументов ξ_μ^α на $\Lambda_\mu^\beta \xi_\beta^\alpha$, где определитель $\mathrm{Det}\,(\Lambda) > 0$, преобразуется по закону

$$L(X, \Lambda\Xi) = L(X, \Xi)\,\mathrm{Det}\,(\Lambda). \tag{21}$$

См. об этом [6, с. 20–21].

Для однородной функции $L = L(X, \Xi)$ Лагранжа вместо (2) имеем

$$L_\alpha = L_\alpha(X, \Xi), \quad L_\alpha^k = L_\alpha^k(X, \Xi), \tag{22}$$

а вместо (3) имеем

$$T_i^k(X, \Xi) = \xi_i^\alpha L_\alpha^k(X, \Xi) - \delta_i^k L(X, \Xi) = 0. \tag{23}$$

В результате приведения функции Лагранжа (1) к однородному виду число r заменяется на число

$$n = m + r \tag{24}$$

и суммирование по паре одинаковых греческих индексов выполняется в новых пределах, а именно в пределах от 1 до n.

Теперь длина строки X равняется n, площадь матрицы Ξ равняется $m \times n$, причем

$$0 < m < n, \quad n \geqslant 2. \tag{25}$$

Вместо равенств (5), (6) имеем равенства

$$L(U) = L\left(X(U), \frac{\partial}{\partial U} X(U)\right), \tag{26}$$

$$L_\alpha(U) = L_\alpha\left(X(U), \frac{\partial}{\partial U} X(U)\right), \quad L_\alpha^k(U) = L_\alpha^k\left(X(U), \frac{\partial}{\partial U} X(U)\right). \tag{27}$$

Что до строки U, то ее длина остается равной m.

Совокупность функций

$$x^\alpha = x^\alpha(u^1, \ldots, u^m), \quad \alpha = 1, \ldots, n \tag{28}$$

теперь следует рассматривать как параметрическое задание m-мерной поверхности Ω в n-мерном пространстве.

В частном случае

$$m = 1, \quad n \geqslant 2 \tag{29}$$

матрица Ξ становится строкой $(\xi^1, \ldots, \xi^n)$, строка U представляется своим единственным элементом u, а совокупность функций

$$x^\alpha = x^\alpha(u), \quad \alpha = 1, \ldots, n \tag{30}$$

следует рассматривать как параметрическое задание линии Ω в n-мерном пространстве. В этом случае интеграл действия

$$S = \int\limits_\Omega L\left(X(u), \frac{d}{du} X(u)\right) du \tag{31}$$

можно рассматривать как длину линии Ω.

На возможность такого определения длины линии (30) впервые указал Бернгард Риман в диссертационной лекции, прочитанной им в Геттингенском университете 10 июня 1854 г. в присутствии Карла Фридриха Гаусса [11].

Эта возможность была реализована Перером Финслером в 1918 г. (также в Геттингене). Поэтому линейную метрику, задаваемую интегралом (31), называют метрикой Финслера. Частным случаем метрики Финслера является метрика Римана.

В более обширном дополнительном случае

$$1 < m < n, \quad n \geqslant 3 \tag{32}$$

интеграл действия

$$S = \int\limits_{\Omega} L\left(X(U), \frac{\partial}{\partial U} X(U)\right) dU \tag{33}$$

можно рассматривать как площадь m-мерной поверхности Ω.

Такое определение площади поверхности (26) впервые предложил Виктор Владимирович Вагнер (Саратов, 1946 г.). Поэтому ареальную метрику, задаваемую интегралом (33), называют метрикой Вагнера.

5. ЭТАПЫ РАЗВИТИЯ ПОНЯТИЯ О ЛАГРАНЖИАНЕ РИМАНА

А. *Планиметрия Пифагора*

$$L^2 = \xi^2 + \eta^2. \tag{34}$$

Б. *Стереометрия и планиметрия Евклида*

$$L^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2. \tag{35}$$

Планиметрия Евклида является частным случаем ($z = \mathrm{const}$) его стереометрии и совпадает с планиметрией Пифагора.

В. *Стереометрия и планиметрия Лобачевского*

$$L^2 = (\xi^2 + \eta^2)\, \exp(-2z) + \zeta^2. \tag{36}$$

Планиметрия Лобачевского является частным случаем ($y = \mathrm{const}$) его стереометрии. См. [9] и [10]. На поверхности $z = \mathrm{const}$, названной Лобачевским орисферой, реализуется планиметрия Евклида.

Днем рождения геометрии Лобачевского является 12 (24) февраля 1826 г. В этот день в Казанском университете Николай Иванович Лобачевский доложил о своем открытии новой геометрии (см. [9]).

Г. *Планиметрия Гаусса* (1827)

$$L^2 = E(x,y)\xi^2 + 2F(x,y)\xi\eta + G(x,y)\eta^2, \tag{37}$$

$$E > 0, \quad G > 0, \quad EG - F^2 > 0.$$

См. [9, с. 11 и 16].

Д. *Стереометрия Римана и его n-мерная геометрия* (1854)

Квадрат лагранжиана равен квадратичной форме

$$L^2 = g_{\alpha\beta}(X)\xi^\alpha\xi^\beta, \tag{38}$$

равной, в свою очередь, сумме n квадратов линейных форм $F^\alpha = F^\alpha_\mu(X)\xi^\mu$, не обращающихся в нуль ни в одной из точек X.

Планиметрия Римана (случай $n = 2$) совпадает с планиметрией Гаусса.

В геометрии Римана уравнения Лагранжа (14) приводятся к виду

$$\frac{d^2x^\sigma}{ds^2} + \Gamma^\sigma_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} = 0, \tag{39}$$

где

$$Ldu = ds, \quad \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\sigma\mu}(\partial_\alpha g_{\mu\beta} + \partial_\beta g_{\mu\alpha} - \partial_\mu g_{\alpha\beta}). \tag{40}$$

Эти уравнения определяют геодезические линии в пространстве Римана.

6. ПЛОЩАДЬ m-МЕРНОЙ ПОВЕРХНОСТИ В n-МЕРНОМ РИМАНОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Такая площадь определяется лагранжианом вагнеровского типа

$$L = \sqrt{\det(f_{kl})}, \tag{41}$$

где

$$f_{kl} = g_{\alpha\beta}\xi^\alpha_k\xi^\beta_l. \tag{42}$$

Имеем

$$L_\alpha = \frac{1}{2}Lf^{kl}\xi^\mu_k\xi^\beta_l\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^\alpha}, \quad L^a_\alpha = Lf^{ak}\xi^\mu_k g_{\mu\alpha}. \tag{43}$$

Следовательно, левая часть уравнений (14) в данном случае равняется

$$\frac{\partial}{\partial u^a}L^a_\alpha(U) - L_\alpha(U) = Lg_{\alpha\sigma}\left(Dx^\sigma + f^{kl}\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}\xi^\alpha_k\xi^\beta_l\right), \tag{44}$$

где

$$Dx^\mu = \frac{1}{L}\frac{\partial}{\partial u^k}\left(Lf^{kl}\frac{\partial x^\mu}{\partial u^l}\right), \quad f^{ak}f_{kb} = \delta^a_b, \tag{45}$$

и уравнения Лагранжа приводятся к виду

$$Dx^\mu + f^{kl}\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\xi^\alpha_k\xi^\beta_l = 0. \tag{46}$$

Поверхность, задаваемую в римановом пространстве в виде (28), будем называть геодезической, если функции (28) удовлетворяют уравнениям (46).

В частности, минимальные поверхности в трехмерном пространстве Евклида являются геодезическими.

В одном крайнем случае, когда $m = 1$, уравнения (46) переходят в (39). Отсюда при $1 < m < n$ название «геодезические поверхности».

В другом крайнем случае, когда $m = n$, уравнения (46) переходят в тождество

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(\sqrt{g}g^{\nu\alpha}) + g^{\alpha\beta}\Gamma^\nu_{\alpha\beta} = 0. \tag{47}$$

7. ВРЕМЕНИПОДОБНЫЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ В $(n+1)$-МЕРНОМ РИМАНОВОМ МИРЕ

Многообразие с римановой метрикой $g_{\alpha\beta}(X)dx^\alpha dx^\beta$ простейшего гиперболического вида мы называем времениподобным. Если размерность такого многообразия равна $n+1$, то его метрика приводится к следующему виду:

$$g_{\alpha\beta}(X)dx^\alpha dx^\beta = F^1F^1 + \ldots + F^nF^n - F^{n+1}F^{n+1}, \tag{48}$$

где $F^\alpha = F^\alpha_\mu(X)dx^\mu$.

На времениподобной мировой линии $x^\alpha = x^\alpha(u)$

$$g_{\alpha\beta}(X(u))\frac{dx^\alpha}{du}\frac{dx^\beta}{du} < 0. \tag{49}$$

Всякая $(n+1)$-мерная мировая область времениподобна.

На времениподобной мировой поверхности

$$x^\alpha = x^\alpha(u^1, \ldots, u^{m+1}) \tag{50}$$

метрика имеет простейший гиперболический вид и равняется

$$f_{kl}(U)du^k du^l = g_{\alpha\beta}(X(U))\frac{\partial x^\alpha}{\partial u^k}\frac{\partial x^\beta}{\partial u^l}du^k du^l. \tag{51}$$

Элемент площади (т. е. $(m+1)$-мерного объема) этой поверхности равняется

$$dV_{m+1} = \frac{1}{c}\sqrt{-f}du^1 \cdots du^{m+1}. \tag{52}$$

где f — определитель матрицы (f_{kl}); c — скорость света.

Геодезические времениподобные мировые поверхности удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial u^k}\left(\sqrt{-f}f^{kl}\frac{\partial x^\alpha}{\partial u^l}\right) + \sqrt{-f}f^{kl}\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial u^k}\frac{\partial x^\nu}{\partial u^l} = 0, \tag{53}$$

где $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ — связность Кристоффеля для метрического тензора $g_{\alpha\beta}$. Подчеркнем, что в (51) и (53) суммирование по k, l ведется от 1 до $m+1$.

В заключение рассмотрим два крайних случая.

Случай $m = 0$. В этом случае

$$f^{11}f_{11} = 1, \quad f = f_{11} = g_{\alpha\beta}(X(u))dx^\alpha dx^\beta, \quad cdV_1 = \sqrt{-f}du = d\tau, \tag{54}$$

так что уравнение (53) принимает вид

$$\frac{d}{du}\left(\sqrt{-f}f^{11}\frac{dx^\alpha}{du}\right) + \sqrt{-f}f^{11}\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{du}\frac{dx^\nu}{du} = 0, \tag{55}$$

или иначе

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = 0. \tag{56}$$

Случай $m = n$. Докажем, что в этом случае равенство (53) является не уравнением, а тождеством.

Действительно, при $m = n$ параметры $u^1, \ldots, u^{n+1}$ можно рассматривать как новые координаты $\check{x}^1, \ldots, \check{x}^{n+1}$ в римановом мире наравне со старыми координатами $x^1, \ldots, x^{n+1}$, причем латинские индексы, как и греческие, принимают знчения от 1 до $n+1$.

Далее, так как при $m = n$

$$f^{kl}\frac{\partial x^\mu}{\partial u^k}\frac{\partial x^\nu}{\partial u^l} = g^{\mu\nu} = \check{g}^{\rho\sigma}\frac{\partial x^\mu}{\partial \check{x}^\rho}\frac{\partial x^\nu}{\partial \check{x}^\sigma}, \quad f^{kl}\frac{\partial x^\alpha}{\partial u^l} = \frac{\partial u^k}{\partial x^\mu}g^{\alpha\mu},$$

то левая часть равенства (53) равняется

$$\frac{\partial}{\partial u^k}\left(\sqrt{-f}\frac{\partial u^k}{\partial x^\mu}g^{\alpha\mu}\right) + \sqrt{-f}g^{\mu\nu}\Gamma^\alpha_{\mu\nu} =$$
$$= \sqrt{\frac{-f}{-g}}\left[\frac{\partial}{\partial x^\mu}(\sqrt{-g}g^{\mu\alpha}) + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\right] + \sqrt{-g}g^{\alpha\mu}\frac{\partial}{\partial u^k}\left[\sqrt{\frac{-f}{-g}}\frac{\partial u^k}{\partial x^\mu}\right].$$

Следовательно, в силу известного тождества для связности Кристоффеля

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}(\sqrt{-g}g^{\mu\alpha}) + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = 0 \tag{57}$$

левая часть равенства (53) представляется как

$$\sqrt{-g}g^{\alpha\mu}\frac{\partial}{\partial u^k}\left[\sqrt{\frac{-f}{-g}}\frac{\partial u^k}{\partial x^\mu}\right] = \sqrt{-g}g^{\alpha\mu}\frac{\partial}{\partial \check{x}^\sigma}\left[\sqrt{\frac{-\check{g}}{-g}}\frac{\partial \check{x}^\sigma}{\partial x^\mu}\right].$$

Теперь докажем тождество

$$\frac{\partial}{\partial \check{x}^\sigma}\left[\sqrt{\frac{-\check{g}}{-g}}\frac{\partial \check{x}^\sigma}{\partial x^\mu}\right] = 0. \tag{58}$$

Имеем

$$\frac{\partial}{\partial \check{x}^\sigma}\left[\sqrt{\frac{-\check{g}}{-g}}\frac{\partial \check{x}^\sigma}{\partial x^\mu}\right] = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial \check{x}^\sigma}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial \check{x}^\sigma}\sqrt{-\check{g}} + \sqrt{-\check{g}}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{1}{\sqrt{-g}} + \sqrt{\frac{-\check{g}}{-g}}\frac{\partial}{\partial \check{x}^\sigma}\frac{\partial \check{x}^\sigma}{\partial x^\mu}.$$

В случае связности Кристоффеля

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\sqrt{-g} = \sqrt{-g}\Gamma^\alpha_{\alpha\mu} = \sqrt{-g}\Gamma_\mu. \tag{59}$$

Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial \check{x}^\sigma}\left[\sqrt{\frac{-\check{g}}{-g}}\frac{\partial \check{x}^\sigma}{\partial x^\mu}\right] = \sqrt{\frac{-\check{g}}{-g}}\left[\frac{\partial \check{x}^\sigma}{\partial x^\mu}\check{\Gamma}_\sigma - \Gamma_\mu + \frac{\partial}{\partial \check{x}^\sigma}\frac{\partial \check{x}^\sigma}{\partial x^\mu}\right].$$

Так как для любой свернутой аффинной связности

$$\frac{\partial \check{x}^\sigma}{\partial x^\mu}\check{\Gamma}_\sigma - \Gamma_\mu + \frac{\partial x^\nu}{\partial \check{x}^\sigma}\frac{\partial^2 \check{x}^\sigma}{\partial x^\nu \partial x^\mu} = 0, \tag{60}$$

то в случае $m = n$ равенство (53) является тождеством.

Значит, всякая $(n+1)$-мерная мировая область является геодезической областью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вагнер В. В.* Геометрия пространства с ареальной метрикой и ее приложение к вариационному исчислению // Матем. сб. 1946. Т. 19(61), вып. 3. С. 341–404.

2. *Шавохина Н. С.* Ареальные модели релятивистских пространственно-ограниченных объектов // Гравитация и электромагнетизм. Минск: Университетское, 1988. С. 268–272.

3. *Шавохина Н. С.* Минимальные поверхности в релятивистской механике, в нелинейной электродинамике и в теории гравитации. (Работа выполнена в ЛЯП ОИЯИ, Дубна.) Автореферат дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Ин-т физики АН БССР, 2-89-480. Минск, 1989.

4. *Melnikov V. N., Gavrilov V. R.* Multicomponent cosmological models with variable equations of state // Тр. междунар. семинара «Применение и развитие идей Лобачевского в современной физике», посвященного 75-летию профессора Николая Александровича Черникова, Дубна, 25–27 февраля 2004 г. Дубна: ОИЯИ, 2004.

5. *Черников Н. А., Шавохина Н. С.* Геодезические поверхности в мире Римана // Сб. [4]. С. 27.

6. *Жотиков В. Г.* Геометрия вариационного исчисления и ее приложения к теоретической физике. Томск: Изд-во НТЛ, 2002. 416 с.

7. *Черников Н. А.* Система с гамильтонианом в виде зависящей от времени квадратичной формы от $\hat{x}$ и $\hat{p}$ // ЖЭТФ. 1967. Т. 53, вып. 3(9). С. 1006–1017.

8. *Федоров Ф. И., Шавохина Н. С.* Геометрический метод приведения произвольных лагранжианов к однородному виду // Тр. 3-го Междунар. семинара «Гравитационная энергия и гравитационные волны». ОИЯИ, Р2-91-164. Дубна, 1991. С. 22–28.

9. *Черников Н. А.* К истории открытия Лобачевским неевклидовой геометрии // Письма в ЭЧАЯ. 2002. № 3[112]. С. 5–18.

10. *Черников Н. А.* Преобразование Боголюбова и планиметрия Лобачевского // Письма в ЭЧАЯ. 2006. Т. 3, № 1(130). С. 7 –16.
    Черников Н. А. Планиметрия Лобачевского, модель Пуанкаре и преобразование Боголюбова в теории сверхтекучести. Сообщение ОИЯИ Р2-94-469. Дубна, 1994. 18 с.

11. *Риман Б.* О гипотезах, лежащих в основании геометрии // *Риман Б.* Сочинения. М.; Л.: ОГИЗ, ГИТТЛ, 1948. С. 279–293.

Получено 26 февраля 2006 г.