

УДК 621.384.644

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ПУЧКА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ СПИРАЛЬНОЙ КАТУШКИ

А. В. Тузиков, В. С. Александров, В. Ф. Шевцов

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Рассматривается динамика пучка в магнитном поле, заданном интегральным выражением вектор-потенциала. Анализируется влияние поперечных компонент магнитного поля на смещение траектории пучка в спиральном соленоиде ускорителя ЛУЭ-200 установки ИРЕН (ОИЯИ, Дубна).

A beam dynamics in a magnetic field described by integral expression of a vector-potential is considered. An influence of transverse components of the magnetic field on a shift of a beam trajectory in the spiral solenoid of accelerator LUE-200 of installation IREN (JINR, Dubna) is analyzed.

1. МОДЕЛЬ МАГНИТНОГО ПОЛЯ КОНТУРА С ТОКОМ, ЗАДАВАЕМОГО АНАЛИТИЧЕСКИМИ ВЫРАЖЕНИЯМИ

Основой метода расчета компонент трехмерного магнитного поля через вектор-потенциалы, заданные в интегральном виде, является решение уравнения Пуассона

$$\Delta A_p = -\mu_0 i_p(x, y, z),$$

где $p = x, y$ или z :

$$A_p(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{i_p(x', y', z')}{r(x, y, z, x', y', z')} dV', \quad dV' = dx' dy' dz'.$$

Здесь A_p — компоненты вектор-потенциала магнитного поля; i — плотность тока; μ_0 — магнитная постоянная, r — расстояние между точками (x, y, z) и (x', y', z') .

В случае, если ток течет по проводу малого диаметра, представляющего собой кривую, ограниченную точками P_1 и P_2 , можно считать $\mathbf{i}(x', y', z') dV' = I d\mathbf{s}(x', y', z')$, где I — полный ток в проводе, \mathbf{s} — вектор, направленный по касательной к току. Таким образом, выражение для вектор-потенциала будет иметь следующий вид:

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{P_1}^{P_2} \frac{d\mathbf{s}(x', y', z')}{r(x, y, z, x', y', z')}.$$

Компоненты магнитной индукции находятся с помощью уравнения Максвелла: $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$.

В случае аналитического задания кривой, описывающей контур с током, расчет компонент магнитного поля сводится к интегрированию соответствующих выражений.

На основе вышесказанного производится расчет магнитного поля спиральной катушки [1]. Катушка представляет собой правовинтовую спираль с постоянным шагом h и радиусом a . В цилиндрической системе координат уравнение спирали может быть записано в виде

$$\rho' = a, \quad \varphi' = \frac{2\pi z'}{h} = \operatorname{ctg} \psi \frac{z'}{a}, \quad z' \in [-c; c],$$

где ψ — угол намотки катушки, связанный с величинами h и a соотношением $\operatorname{ctg} \psi = (2\pi a)/h$.

Компоненты вектор-потенциала выражаются в следующем виде:

$$A_\rho(\rho, \varphi, z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \operatorname{ctg} \psi \int_{-c}^c \frac{\sin(\varphi - \varphi')}{r(\rho, \varphi, z, a, \varphi', z')} dz',$$

$$A_\varphi(\rho, \varphi, z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \operatorname{ctg} \psi \int_{-c}^c \frac{\cos(\varphi - \varphi')}{r(\rho, \varphi, z, a, \varphi', z')} dz',$$

$$A_z(\rho, \varphi, z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-c}^c \frac{dz'}{r(\rho, \varphi, z, a, \varphi', z')}.$$

Здесь $r = \sqrt{(z - z')^2 + \rho^2 + a^2 - 2a\rho \cos(\varphi - \varphi')}$.

Из указанных выражений находим компоненты магнитной индукции:

$$B_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-c}^c \frac{\operatorname{ctg} \psi (z - z') \cos(\varphi - \varphi') - a \sin(\varphi - \varphi')}{r^3} dz',$$

$$B_\varphi = \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-c}^c \frac{\rho - a \cos(\varphi - \varphi') - \operatorname{ctg} \psi (z - z') \sin(\varphi - \varphi')}{r^3} dz',$$

$$B_z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\varphi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \operatorname{ctg} \psi \int_{-c}^c \frac{a - \rho \cos(\varphi - \varphi')}{r^3} dz'.$$

Магнитное поле многослойной спиральной катушки может быть представлено как суперпозиция полей отдельных спиралей с одинаковым шагом и различными радиусами намотки. При этом происходит чередование право- и левовинтовых спиралей. Уравнение азимутальной координаты для левовинтовой спирали записывается в виде $\varphi' = -(2\pi z')/h = \operatorname{ctg} \psi (z'/a)$, $\operatorname{ctg} \psi = -(2\pi a)/h < 0$. Выражения для компонент магнитного поля правовинтовой спирали справедливы и для левовинтовой. Также следует отметить, что аксиальные составляющие тока в соседних слоях намотки будут противоположны по знаку.

2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ПУЧКА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ СПИРАЛЬНОЙ КАТУШКИ И СОЛЕНОИДА

Реализован программный модуль, позволяющий рассчитывать магнитные поля системы витков, задаваемых в виде аналитической кривой, а также проводить моделирование движения пучка частиц. С его помощью произведено моделирование динамики электронного пучка в спиральном соленоиде ускорителя ЛУЭ-200 установки ИРЕН [2]. Длина соленоида равна 260 см. Намотка соленоида состоит из десяти слоев. Средний радиус первого слоя — 25 см. Расстояние между соседними слоями при моделировании было взято равным 0,5 см. Шаг спирали составляет 1,3 см. Расчеты производились для канала длиной 4 м со свободными промежутками длиной 65 см перед соленоидом и 75 см после него. Начальная энергия электронов пучка равнялась 200 кэВ. Внутри соленоида пучок ускорялся до энергии 100 МэВ. Ускоряющее электрическое поле аппроксимировалось соответствующим однородным полем. Пучок имел равномерное распределение частиц по фазовому объему. Радиус пучка составлял 2 мм. Поперечный эмиттанс равнялся 10 мм·мрад. Ток пучка не учитывался. Число модельных частиц равнялось 100.

Целью моделирования являлось выяснение влияния поперечных компонент магнитного поля на движение пучка. Расчеты показали, что поперечные компоненты поля спиральной катушки на оси не равны нулю. В случае однослойной спиральной катушки отношение поперечной и продольной компонент поля на расстоянии нескольких десятков сантиметров от границы катушки составляет несколько процентов. В то же время для двухслойной катушки данное отношение на порядок меньше, т. е. поперечные компоненты магнитных полей, создаваемых соседними слоями спиральной намотки, частично компенсируют друг друга. Это обстоятельство позволяет сделать верхнюю оценку отклонения центра пучка от оси в поле соленоида ускорителя ЛУЭ-200, заменяя его полем соленоида двухслойной катушки.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

При моделировании динамики пучка в поле однослойной катушки видно смещение центра пучка от оси на расстояние в несколько миллиметров, в то время как в поле двухслойной катушки значительного смещения центра не наблюдалось. Максимальное отклонение в этом случае составляло величину порядка 10^{-3} см. Сравнивая результаты расчета динамики электронов в двухслойной катушке и соленоиде, составленном из кольцевых витков, приходим к выводу, что в обоих случаях параметры пучка на выходе, такие как размеры и эмиттанс, существенно не различаются. Изменение поперечных размеров пучка при его движении в спиральной двухслойной катушке и кольцевом соленоиде иллюстрируют рис. 1 и 2 соответственно.

4. ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ПАРАМЕТРОВ ДВУХСЛОЙНОЙ КАТУШКИ НА СМЕЩЕНИЕ ЦЕНТРА ПУЧКА

Одним из следствий неравенства нулю поперечных компонент поля спиральной катушки является смещение центра пучка относительно оси, которое не наблюдается в

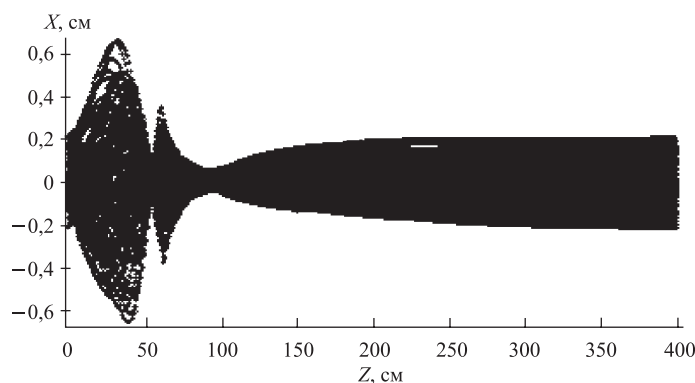


Рис. 1. Динамика пучка в магнитном поле двухслойной спиральной катушки

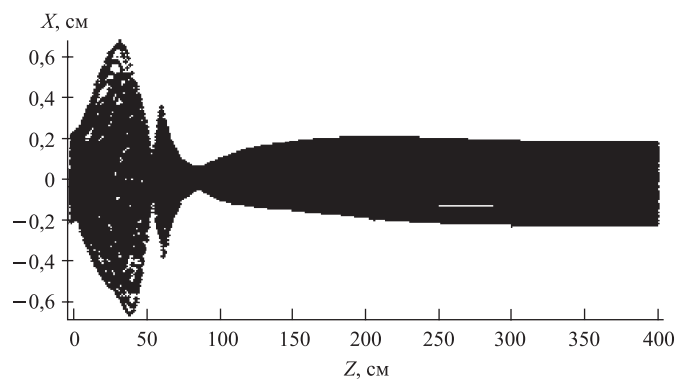


Рис. 2. Динамика пучка в магнитном поле кольцевого соленоида

поле кольцевого соленоида. Для выяснения различия между динамикой центра пучка в магнитном поле спиральной катушки и поле кольцевых витков был проведен ряд расчетов при различных значениях параметров двухслойной катушки. Параметры катушки выбирались в следующих интервалах: радиус первого слоя катушки — от 5 до 35 см; расстояние между слоями катушки — от 2 до 10 мм; шаг катушки — от 6 до 18 мм; длина катушки — от 27 до 99 см. Так как на смещение пучка также влияет длина свободного промежутка перед катушкой, расчеты проводились при ее значениях в интервале от 0 см до длины катушки. Мерой удаленности траектории центра пучка в поле спиральной катушки от его траектории в поле кольцевого соленоида служило среднее квадратичное отклонение центра пучка от оси катушки.

В заданных пределах значений параметров катушки максимальное среднее квадратичное отклонение составило около 0,6 мм, что соответствует максимальному отклонению центра пучка от оси, приблизительно равному 1–1,5 мм. Анализ результатов вычислений показал, что величиной, наиболее сильно коррелирующей со среднее квадратичным отклонением центра пучка от оси, является угол катушки. С помощью регрессионного анализа было получено выражение для приближенного вычисления среднее квадратичного

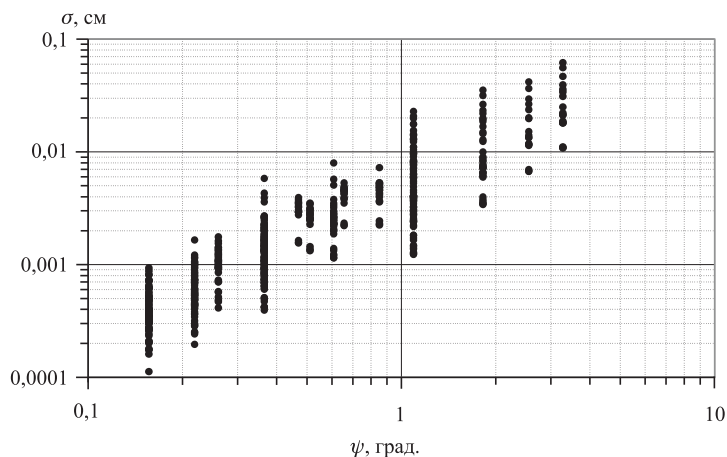


Рис. 3. Зависимость среднеквадратичного отклонения центра пучка от угла намотки катушки

отклонения:

$$\sigma \approx 0,98 \operatorname{tg}^{1,32} \psi \approx 0,087 \left(\frac{h}{a} \right)^{1,32}.$$

На рис. 3 показана зависимость среднеквадратичного отклонения центра пучка от угла намотки (шкала логарифмическая).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Расчеты показали, что для моделирования динамики частиц в поле спиральной катушки с четным числом слоев и угле намотки порядка градуса и менее достаточно приближения компонент магнитного поля аналитическими выражениями для поля кольцевых витков. При больших углах намотки траектория движения пучка может иметь существенное отклонение от оси, которое необходимо учитывать при моделировании.

Разработанная программа может быть использована для расчета магнитных полей, создаваемых контурами с током сложной, но аналитически задаваемой конфигурации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бухгольц Г. Расчет электрических и магнитных полей. М., 1961.
2. Александров В. С. и др. Расчет динамики пучка электронов ускорителя ЛУЭ-200 // Письма в ЭЧАЯ. 2004. Т. 1, № 3(120). С. 70–77.