

## ПЕРЕСЕЧЕНИЕ БЕТАТРОННЫХ РЕЗОНАНСОВ В ПРОЦЕССЕ ГРУППИРОВКИ ИНТЕНСИВНОГО ПУЧКА

*П. Р. Зенкевич, Н. И. Самаргин*

ФГУП «РНЦ РФ ИТЭФ», Москва

В процессе группировки интенсивного пучка частота бетатронных колебаний частиц изменяется из-за роста их отклонения по импульсу (при наличии хроматичности) и изменения кулоновского сдвига. Эти изменения приводят к пересечению бетатронных нелинейных резонансов. Построена математическая модель динамики ионов в процессе группировки интенсивного пучка с целью оценки влияния поперечных бетатронных резонансов на движение частиц. В модели учитывается влияние пространственного заряда на продольные и поперечные колебания частиц при наличии одномерных и двумерных бетатронных резонансов. Проанализировано движение частиц вблизи одномерного и двумерного резонансов третьего порядка. Приводятся результаты численного моделирования потерь частиц и роста эмиттанса в процессе группировки интенсивного пучка в накопителе ИТЭФ.

In the process of grouping an intense beam, betatron oscillation frequency of particle changed due to growth in their momentum rejection (in the presence of chromatics) and changes in the tune shift. These changes lead to the intersection of nonlinear betatron resonances. A mathematical model of the dynamics of ions in the process of grouping an intense beam is constructed to assess the influence of transverse betatron resonances on the motion of particles. The model takes into account the influence of space charge on the longitudinal and transverse oscillations of particles in the presence of one- and two-dimensional betatron resonances. Analysis of the motion of particles near the one and two dimensional third-order resonances is given. The results of numerical simulation of particle losses and emittance growth in the process of grouping an intense beam in the storage ИТЭФ are presented.

PACS: 29.20.df; 29.27.-a

### ВВЕДЕНИЕ

В 2001 г. на базе ускорителя ИТЭФ был сооружен накопитель ионов ТВН (тера-ваттный накопитель) и проведен его физический пуск [1]. Одной из основных задач комплекса ТВН-ИТЭФ является ускорение и накопление тяжелых ионов до интенсивности  $10^{12}$ – $10^{13}$  частиц за импульс с последующей компрессией пучка ионов до  $\sim 100$  нс и быстрым выводом на экспериментальные мишени для проведения исследований по физике высокой плотности энергии в веществе.

При компрессии пучка отклонение частицы по импульсу увеличивается, что при наличии хроматичности приводит к изменению бетатронной частоты и к пересечению резонансов бетатронных колебаний. При высокой интенсивности пучка бетатронные частоты

меняются также из-за повышения плотности пучка при сжатии, что вызывает рост кулоновского сдвига бетатронной частоты. Пересечение резонансов приводит к возрастанию эмиттанса и к потерям частиц в накопителе во время компрессии. В данной работе для оценки эффекта мы воспользовались упрощенным методом «крупных частиц», основанным на следующих исходных предположениях:

- Продольное движение частиц не зависит от их поперечного движения.
- Для анализа продольной компрессии использована модель «параболического» пучка, в которой продольные кулоновские силы являются линейными [2].
- Нелинейные резонансы третьего порядка описываются с помощью уравнений Гамильтона, записанных в переменных «действие–фаза».
- Импульс и продольная фаза частицы определяют ее бетатронные частоты; сдвиг частоты из-за импульса предполагается пропорциональным линейной хроматичности, а кулоновский сдвиг бетатронной частоты — пропорциональным линейной плотности пучка в месте нахождения частицы.

Программа численного расчета динамики частиц написана на языке FORTRAN 90 с помощью среды разработки Compaq Visual Fortran.

## 1. ПРОДОЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Продольная составляющая кулоновской силы имеет следующий вид [2]:

$$F_z = -\frac{g(eZ_i)^2}{4\pi\epsilon_0\gamma^2} \frac{\partial\lambda}{\partial z}, \quad (1)$$

где  $z$  — отклонение частицы от центра сгустка;  $\lambda(z)$  — линейная плотность ионов в пучке;  $g = 1 + \ln(b/a)$  — геометрический фактор экранировки;  $\epsilon_0$  — диэлектрическая проницаемость среды;  $b$  и  $a$  — диаметры поперечных сечений камеры и пучка соответственно. Заметим, что продольная фаза частицы  $\phi = 2\pi q(z/R)$ , где  $q$  — кратность группирующего поля (при группировке  $q = 1$ ),  $R$  — радиус орбиты. Запишем линейную плотность в виде  $\lambda = \frac{N}{2\pi R} f(\phi)$ , где  $N$  — полное число ионов в кольце. Для численного анализа продольного движения систему уравнений для продольного движения частиц с учетом продольного кулоновского поля удобно записать в следующей безразмерной форме [3]:

$$\begin{cases} \frac{d\Pi}{d\theta} = -Q_s^2 \left( \sin\phi + \chi \frac{\partial f}{\partial\phi} \right), \\ \frac{\partial\phi}{\partial\theta} = \Pi. \end{cases} \quad (2)$$

В уравнении (2) в качестве независимой переменной использован угол  $\theta = s/R$  ( $s$  — расстояние, отсчитываемое вдоль орбиты);  $\Pi = -q\Gamma(\Delta p/p_0)$  — «нормализованное отклонение импульса» (здесь  $\Gamma = (1/\gamma^2) - \alpha$ ,  $\alpha$  — коэффициент уплотнения орбит,  $p_0$  — импульс равновесной частицы,  $\Delta p$  — отклонение импульса от равновесного значения);  $Q_s$  — частота малых продольных колебаний в отсутствие кулоновских сил, отнесенная к частоте обращения  $\omega_0$  ( $Q_s = \Omega_s/\omega_0$ ,  $\Omega_s = \sqrt{\frac{q\Gamma e Z_i U}{2\pi\beta^2\gamma A_i m_0 c^2}}$ );  $Z_i$  и  $A_i$  — заряд и

атомная масса иона соответственно;  $U$  — группирующее напряжение,  $\chi = \frac{qgZ_0I}{2\beta\gamma^2U}$  — кулоновский параметр,  $Z_0$  — волновое сопротивление вакуума,  $I = \frac{eZ_iN\beta c}{2\pi R}$  — средний ионный ток в кольце.

Систему (2) можно линеаризовать, используя «параболическое» распределение для функции  $f(\phi)$ :  $f(\phi) = 3/4\xi \left(1 - (\phi/\xi)^2\right)$ , где  $\xi(\theta)$  — огибающая фазовых колебаний. Таким образом, мы получим

$$\begin{cases} \frac{d\Pi}{d\theta} = -Q_s^2 \left(1 - \frac{3}{2} \frac{\chi}{\xi^3}\right) \phi, \\ \frac{\partial\phi}{\partial\theta} = \Pi. \end{cases} \quad (3)$$

Линейность модели позволяет применить для решения задачи матричный метод. Решение системы уравнений (3) можно представить в матричной форме

$$\begin{pmatrix} \phi(\theta + \Delta\theta) \\ \phi'(\theta + \Delta\theta) \end{pmatrix} = M(\xi) \begin{pmatrix} \phi(\theta) \\ \phi'(\theta) \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где матрица передачи для продольного движения на интервале  $[\theta, \theta + \Delta\theta]$ :

$$M(\xi) = \begin{bmatrix} \cos(Q_s(\xi_0)\Delta\theta) & \frac{\sin(Q_s(\xi_0)\Delta\theta)}{Q_s(\xi_0)} \\ -Q_s(\xi_0)\sin(Q_s(\xi_0)\Delta\theta) & \cos(Q_s(\xi_0)\Delta\theta) \end{bmatrix}, \quad (5)$$

где  $\xi_0 = \xi(\theta)$ . Заметим, что «синхротронная частота»  $Q_s(\xi) = Q_s \sqrt{1 - \frac{3}{2} \frac{\chi}{\xi^3}}$ , а отклонение импульса  $\Delta p/p_0 = \phi'(\theta) (1/q\Gamma)$ . Продольные параметры Твисса —  $\alpha(\theta)$ ,  $\beta(\theta)$ ,  $\gamma(\theta)$  — связаны с элементами матрицы движения следующим соотношением [4]:

$$\begin{pmatrix} \beta_2 \\ \alpha_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11}^2 & -2m_{11}m_{12} & m_{12}^2 \\ -m_{11}m_{12} & 1 + 2m_{12}m_{21} & -m_{12}m_{22} \\ m_{21}^2 & -2m_{22}m_{21} & m_{22}^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \alpha_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где  $m_{ij}$  — элементы матрицы  $M(\xi)$ . Зная значения продольных параметров Твисса в начальный момент времени ( $\beta_2(0) = \xi(0)^2/\varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — фазовый объем пучка;  $\alpha_2(0) = 0$ ;  $\gamma_2(0) = 1/\beta_2(0)$ ), можно с помощью уравнения (6) определить эти же параметры в любой интересующий момент. Огибающая связана с бета-функцией известным соотношением  $\xi(\theta)^2 = \beta(\theta)\varepsilon$ .

## 2. ПОПЕРЕЧНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Реальное электромагнитное поле, действующее на частицы пучка, отличается от линейных расчетных полей. Это отличие приводит к наличию добавочных членов в функции Гамильтона, описывающей поперечное движение:

$$\delta H_{n,m} = c_{n,m}(s) x^n y^m. \quad (7)$$

В уравнении (7)  $x, y$  — поперечные координаты,  $n, m$  — целые положительные числа, функция  $c_{n,m}(s)$  описывает продольное распределение возмущения. Используя известную процедуру (см., например, [5]), уравнения поперечного движения вблизи резонанса можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{dJ_x}{d\theta} = n_x G_{j,n_x,n_y} J_x^{m/2} J_y^{n/2} \sin(\varepsilon_{j,n,m,n_x,n_y} \theta + \mu_{j,n,m,n_x,n_y} - n_x \alpha_x - n_y \alpha_y), \\ \frac{dJ_y}{d\theta} = n_y G_{j,n_x,n_y} J_x^{m/2} J_y^{n/2} \sin(\varepsilon_{j,n,m,n_x,n_y} \theta + \mu_{j,n,m,n_x,n_y} - n_x \alpha_x - n_y \alpha_y), \\ \frac{d\alpha_x}{d\theta} = -m G_{j,n_x,n_y} J_x^{(m/2)-1} J_y^{n/2} \cos(\varepsilon_{j,n,m,n_x,n_y} \theta + \mu_{j,n,m,n_x,n_y} - n_x \alpha_x - n_y \alpha_y), \\ \frac{d\alpha_y}{d\theta} = -n G_{j,n_x,n_y} J_x^{m/2} J_y^{(n/2)-1} \cos(\varepsilon_{j,n,m,n_x,n_y} \theta + \mu_{j,n,m,n_x,n_y} - n_x \alpha_x - n_y \alpha_y). \end{cases} \quad (8)$$

Здесь нормализованное действие  $J_{x,y} = I_{x,y}/I_{x,y}^0$ , где инвариант  $I_{x,y} = 4|\alpha_{x,y}|^2 \Delta$ ,  $\Delta = 1$  м,  $a_{x,y}$  — амплитуда колебаний частиц,  $\alpha_{x,y}$  — соответствующие фазы.  $I_{x,y}^0$  — опорное значение инварианта. Расстройка  $\varepsilon_{j,n_x,n_y}$  связана с целыми числами  $j, n_x, n_y$  соотношением

$$\varepsilon_{j,n_x,n_y} = j - n_x Q_x - n_y Q_y, \quad (9)$$

где  $Q_{x,y}$  — бетатронные частоты;  $j$  — номер резонансной гармоники. Условие  $j = n_x Q_x + n_y Q_y$  определяет точку пересечения резонанса, число  $p = |n_x| + |n_y|$  — порядок резонанса. В дальнейшем мы ограничимся анализом случая, когда  $|n_x| = m$ ,  $|n_y| = n$  (как правило, именно такие резонансы имеют наибольшую ширину). Амплитуда и фаза резонансной гармоники определяются формулой

$$G_{j,n_x,n_y} \exp(i\mu_{j,n_x,n_y}) = \frac{I_0^{\frac{|n_x|+|n_y|}{2}-1}}{\pi R 2^{p+1}} \int_0^L \beta_x^{\frac{|n_x|}{2}} \beta_y^{\frac{|n_y|}{2}} c_{n,m}(s) \exp(i(n_x \mu_x + n_y \mu_y)) ds, \quad (10)$$

где  $\mu_{x,y}(s) = \int_0^s \frac{ds}{\beta_{x,y}}$  — соответствующий набег фазы функций Флоке. Выражение для бетатронной частоты в рамках рассматриваемой модели имеет следующий вид:

$$Q_{x,y} = Q_{x,y}^0 + \lambda_{x,y} \frac{\Delta p}{p} - \Delta Q_{x,y} \left[ 1 - \left( \frac{\phi}{\xi} \right)^2 \right], \quad (11)$$

где  $\lambda_{x,y}$  — линейные коэффициенты хроматичности (в численных расчетах для накопителя ИТЭФ мы приняли значения  $\lambda_x = -6,165$ ,  $\lambda_y = -11,528$ );  $\Delta Q_{x,y}$  — соответствующие кулоновские сдвиги частоты в центре сгустка. Для вычисления амплитуды резонансной гармоники необходимо знать функции  $c_{n,m}(s)$ , определяемые мультипольными коэффициентами разложения магнитного поля, которые предполагаются постоянными внутри блока. Обычно для магнитных элементов мультипольные коэффициенты определяются

интегралом  $K_{l-1} = \frac{1}{B\rho} \int_{L_0}^{L_0+L_l} \frac{\partial^{n-1} B}{\partial x^{n-1}} ds$ , где  $l$  — номер блока,  $L_l$  — длина блока. Тогда

$\frac{\partial^{n-1} B}{\partial x^{n-1}} = \frac{K_{n-1}}{L_l} B\rho$  и соответствующий магнитный потенциал  $U_{n,0} = \frac{1}{n} \frac{K_{n-1}^l B\rho}{L_l} x^n$ . Используя значения мультипольных коэффициентов, измеренные при установке магнитных

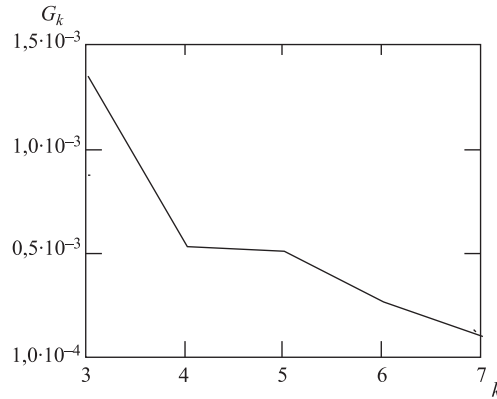


Рис. 1. Зависимость амплитуды резонансной гармоники одномерного горизонтального резонанса (в единицах бетатронной частоты) от порядка

блоков, мы рассчитали для накопителя ИТЭФ зависимость силы одномерного резонанса от его порядка (рис. 1).

На рис. 1 приведена зависимость амплитуды резонансной гармоники для порядков нелинейности от 3 до 7. Наибольшая амплитуда ( $1,38 \cdot 10^{-3}$ ) соответствует одиночному резонансу третьего порядка ( $n = 3, m = 0$ ), который в дальнейшем и будет рассматриваться. Следует, однако, отметить, что в процессе эксплуатации машины могли возникнуть дополнительные нелинейности; поэтому в дальнейшем мы рассматривали силу резонанса как свободный параметр.

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Интегрирование уравнений движения в данной программе выполнялось в два этапа: сначала вычислялись значения продольной огибающей пучка, а затем с использованием полученных значений огибающей вычислялись фаза и отклонение импульса частиц. Затем мы находили бетатронные частоты и интегрировали уравнения поперечного движения для каждой частицы, определяя новые инварианты и фазы. Частицы с амплитудой колебаний выше допустимой считались потерянными и в дальнейшем не участвовали в рассмотрении. Расчет был проведен для ионов алюминия с начальной энергией 600 МэВ и начальным среднеквадратичным разбросом по импульсам 0,01%; группирующее напряжение варьировалось от 40 до 120 кВ. Число частиц в сгустке было взято равным  $10^{12}$ . Число «крупных частиц» составляло 10000. Нормировочное значение инварианта  $I_0 = 10^{-6}$  м.

На рис. 2 представлены результаты численного моделирования эволюции огибающей фазовых колебаний ионов алюминия ( $Z_i = 13, A_i = 27$ ) при различных параметрах задачи.

На рис. 3 изображена огибающая колебаний при варьирующемся начальном разбросе по импульсам (при этом  $U = 40$  кВ).

На рис. 4–6 приведены графики роста потерь частиц и среднего значения действия (имеющего смысл среднего эммитанса пучка) от числа оборотов для различных значений силы одномерного резонанса с номером  $j = 28$ .

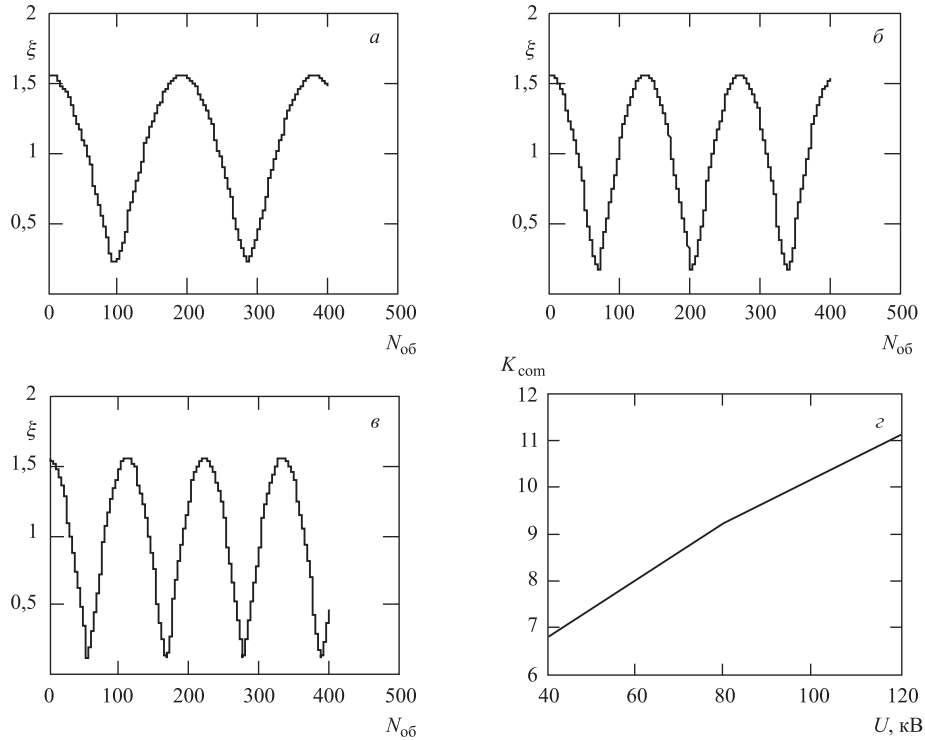


Рис. 2. Огибающая фазовых колебаний при токе частиц  $I = 1,337$  А,  $dp/p_0 = 0,1\%$ : а)  $U = 40$  кВ; б)  $U = 80$  кВ; в)  $U = 120$  кВ; г) коэффициент компрессии в зависимости от  $U$

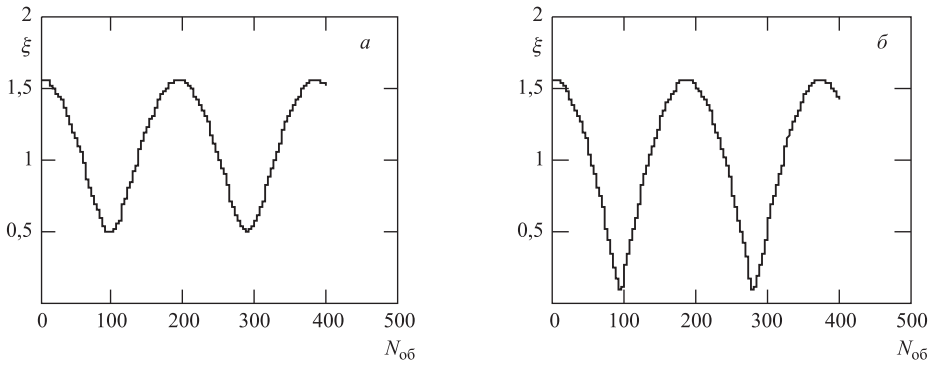


Рис. 3. Огибающая фазовых колебаний,  $I = 1,337$  А: а)  $dp/p_0 = 0,2\%$  ( $K_{com} = 3,12$ ); б)  $dp/p_0 = 0,05\%$  ( $K_{com} = 16,38$ )

Был рассмотрен также и двумерный резонанс, определяемый условием  $Q_x + 2Q_y = 28$ . Амплитуда данного резонанса сравнима с амплитудой одномерного резонанса, рассмотренного выше, и по предварительным расчетам составляет  $1,27 \cdot 10^{-3}$  в единицах бетатронной частоты. Далее, на рис. 7–9 приведены результаты расчетов динамики частиц в накопителе при совместном учете двух резонансов (одномерного и двумерного).

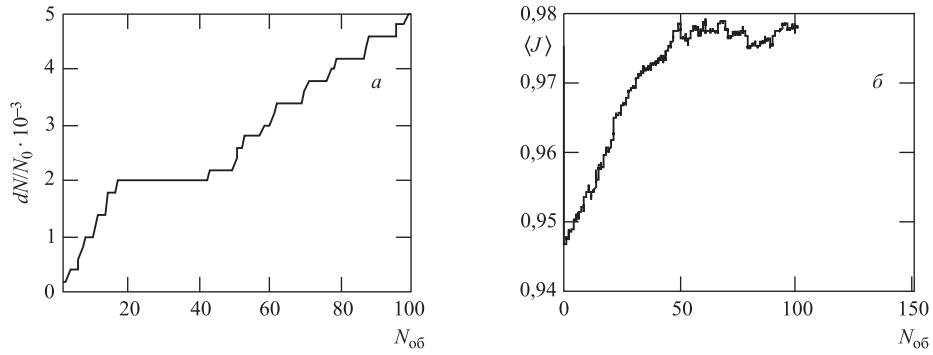


Рис. 4. Зависимость числа потерянных частиц от количества оборотов (а) и изменение среднего значения действия (эммитанса) от числа оборотов (б) при  $G = 1,38 \cdot 10^{-3}$

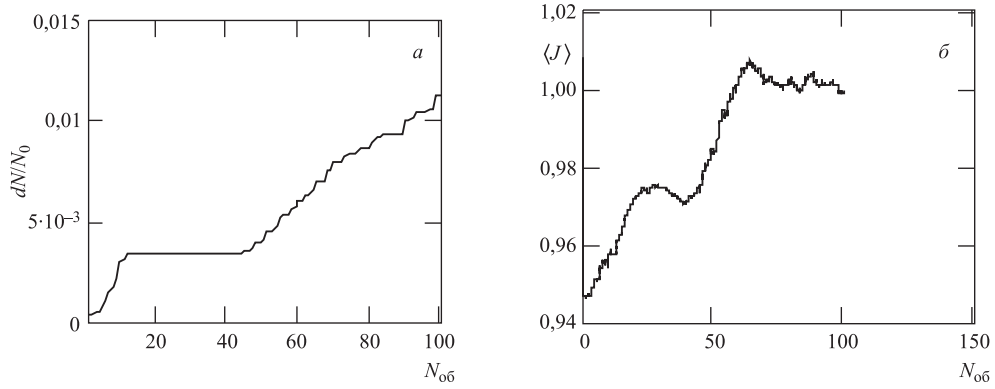


Рис. 5. Зависимость числа потерянных частиц от количества оборотов (а) и изменение среднего значения действия (эммитанса) от числа оборотов (б) при  $G = 2 \cdot 10^{-3}$

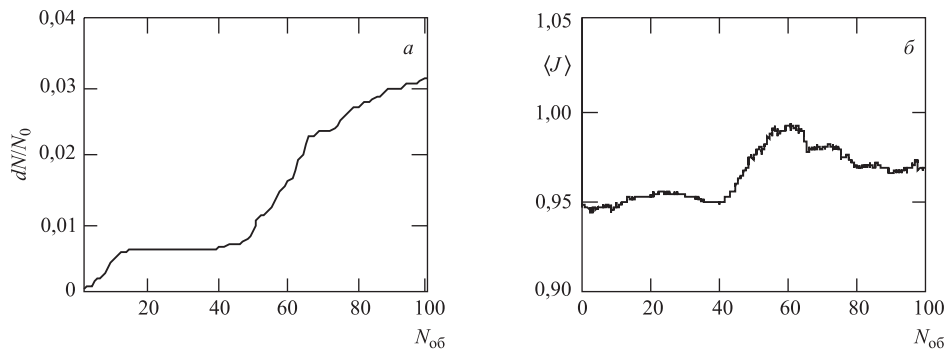


Рис. 6. Зависимость числа потерянных частиц от числа оборотов (а) и изменение среднего значения действия (эммитанса) от числа оборотов (б) при  $G = 3 \cdot 10^{-3}$

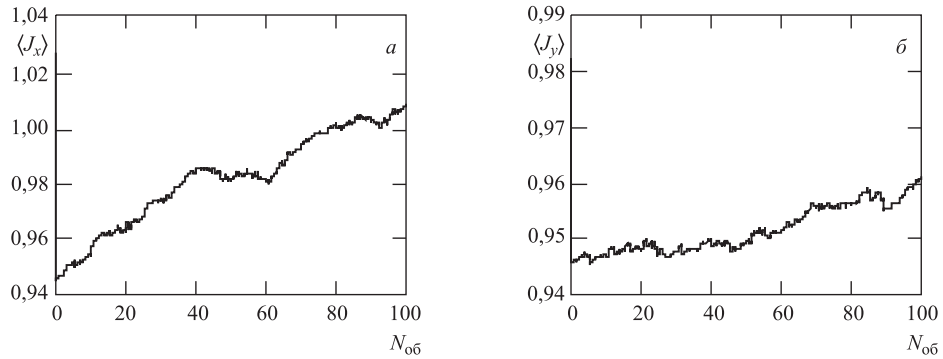


Рис. 7. Изменение среднего значения действия (эмиттанса) в зависимости от числа оборотов в горизонтальной (а) и вертикальной (б) плоскости при  $G_{3,0} = 1,38 \cdot 10^{-3}$  и  $G_{1,2} = 1,27 \cdot 10^{-3}$

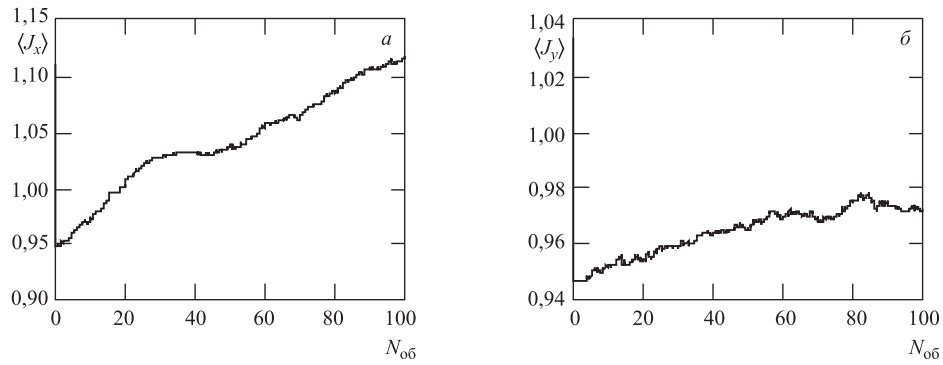


Рис. 8. Изменение среднего значения действия (эмиттанса) в зависимости от числа оборотов в горизонтальной (а) и вертикальной (б) плоскости при  $G_{3,0} = G_{1,2} = 2 \cdot 10^{-3}$

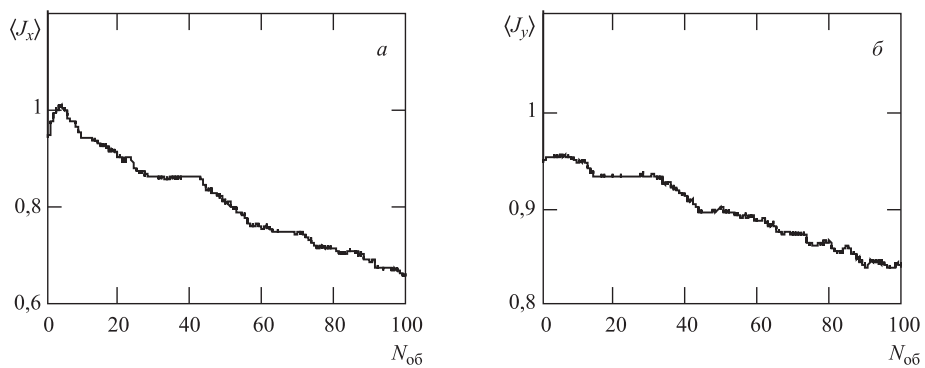


Рис. 9. Изменение среднего значения действия (эмиттанса) в зависимости от числа оборотов в горизонтальной (а) и вертикальной (б) плоскости при  $G_{3,0} = G_{1,2} = 3 \cdot 10^{-3}$



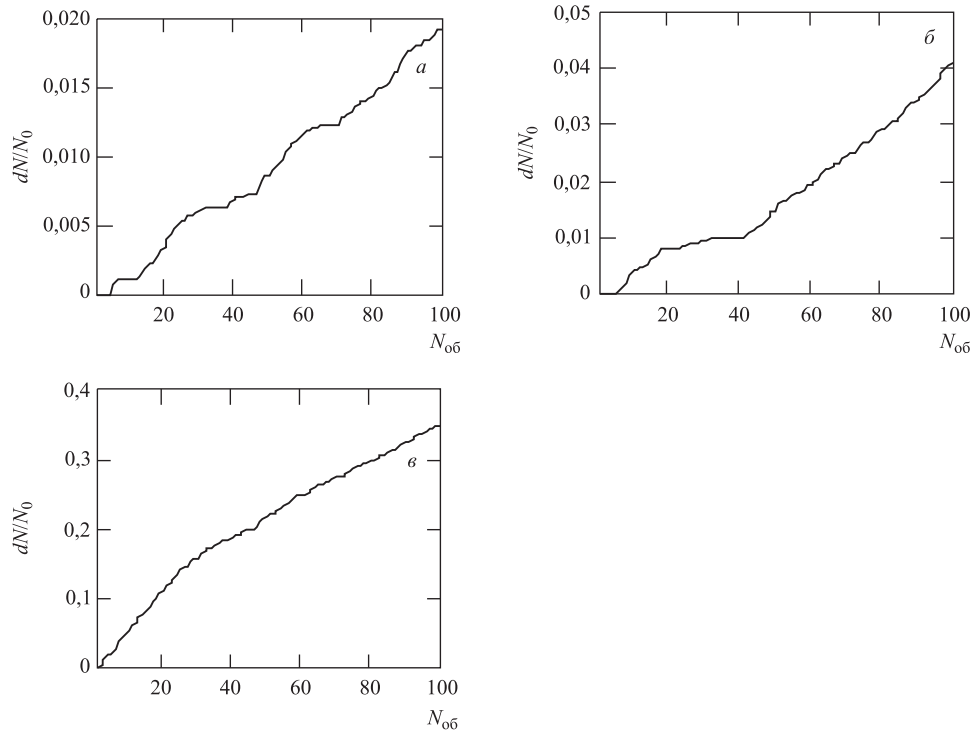


Рис. 10. Зависимость числа потерянных частиц от количества оборотов при: а)  $G_{3,0} = 1,38 \cdot 10^{-3}$  и  $G_{1,2} = 1,27 \cdot 10^{-3}$ ; б)  $G_{3,0} = G_{1,2} = 2 \cdot 10^{-3}$ ; в)  $G_{3,0} = G_{1,2} = 3 \cdot 10^{-3}$

Уменьшение среднего эмиттанта пучка на вышеприведенных рисунках можно объяснить значительным увеличением потерь частиц в процессе группировки. На рис. 10 показано изменение потерь частиц в процессе группировки пучка при различных значениях силы резонанса.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Авторами разработана программа совместного решения уравнений для продольных и поперечных колебаний частиц в процессе группировки интенсивного пучка заряженных частиц. Программа позволяет изучать влияние как одномерных, так и двумерных резонансов поперечных колебаний третьего порядка. Расчет проводится методом крупных частиц, что позволяет оценить рост эмиттанта и потери частиц. Продольное движение рассмотрено с помощью матричного формализма. Расчет поперечного движения частиц проводится с помощью численных методов решения дифференциальных уравнений: метода Рунге–Кутты и метода Адамса.

Предварительные результаты расчетов для накопителя ионов ИТЭФ показали, что при расчетных амплитудах резонансов увеличение среднего значения эмиттанта пучка и число потерянных частиц во время компрессии сравнительно невелико. Однако увеличение силы резонанса в 2–3 раза может значительно усилить оба эффекта.

Разработанная программа представляет интерес для анализа динамики частиц и в других кольцевых машинах с высокой интенсивностью, в которых предполагается компрессия пучка (например, в проектируемом синхротроне SIS100, ГСИ, Дармштадт).

Данная работа выполнена при финансовой поддержке Росатома.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sharkov B. Yu. et al.* Heavy Ion Fusion Program in Russia // Nucl. Instr. Meth. A. 2001. V. 464, No. 1–3. P. 615–620.
2. *Бархударян А. В., Кошкарев Д. Г.* Продольная компрессия ионных пучков. Препринт ИТЭФ № 25. М., 1982.
3. *Бархударян А. В., Зенкевич П. Р.* Продольная компрессия ионных пучков с учетом нелинейности внешнего и кулоновского поля. Препринт ИТЭФ № 44. М., 1989.
4. *Bovet C. et al.* A Selection of Formulae and Data Useful for the Design of A.G. Synchrotrons; MPS-S1/Int. DL/68-3. 1968.
5. *Guignard G.* A General Treatment of Resonances in Accelerators. CERN Report 78-11. 1978.