

P11-2007-102

И. М. Гостев, Л. А. Севастьянов

ОБ ИДЕНТИФИКАЦИИ ГЛАДКИХ
ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КРИВЫХ

Гостев И. М., Севастьянов Л. А.

P11-2007-102

Об идентификации гладких пространственных кривых

Рассматривается методология формирования информативных признаков незамкнутых пространственных кривых и исследуется их внутренняя геометрия на основе нескольких классов k -jet-эквивалентности. Для идентификации таких кривых вводятся несколько типов метрик. Определяется понятие сверхслабой k -jet-эквивалентности, в связи с чем вводятся еще несколько метрик для слабой идентификации кривых и их сегментов. Приведены примеры и области приложений, а также указан путь дальнейших исследований.

Работа выполнена в Лаборатории информационных технологий ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2007

Gostev I. M., Sevastianov L. A.

P11-2007-102

About Identification of Smooth Spatial Curves

Methodology of forming of information properties of unclosed spatial curves is discussed. The intrinsic geometry on the base of any class of k -jet equivalence is investigated. For identification of its curve some types of metrics are introduced. There is a defined conception of super slow k -jet identification of curves and their segments. Examples and area of application of this methodology are included and the path of next investigations is described.

The investigation has been performed at the Laboratory of Information Technologies, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2007

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время задачи обработки, анализа и идентификации треков частиц вновь приобретают высокий приоритет в теоретической и исследовательской деятельности многих ученых как в России, так и за рубежом. Это можно объяснить рядом факторов. Во-первых, вычислительная и измерительная техника претерпели существенные изменения и достигли значительных успехов. Во-вторых, количество результатов при проведении исследований стало настолько велико, что проведение анализа вручную, просматриванием слайдов, стало просто физически невозможным. В-третьих, ускорительная техника стала настолько совершенной, а во многих случаях и компактной, что ее начинают применять во множестве прикладных областей, таких как медицина, сельское хозяйство, машиностроение и т. п., что требует автоматизации всех процессов.

Все эти факторы приводят к тому, что обработка и анализ треков должны быть автоматическими или автоматизированными. Основной особенностью при решении такого рода задач является получение результатов в режиме реального времени, то есть непосредственно по ходу проводимого эксперимента или выполняемой работы. Среди таких задач можно выделить: обработку и анализ данных о треках на больших ускорителях, например на ЛНА, когда в секунду происходят тысячи событий, в каждом из которых имеется множество треков; калибровку магнитного поля систем по характеру получаемых результатов в виде траекторий частиц; «фильтрацию» треков в некотором событии для устранения лишних треков, не несущих информации, и многие другие аналогичные задачи.

Анализ показывает, что решение таких задач опирается на теорию обработки изображений и распознавание образов. Однако, несмотря на то, что в ней известны некоторые конкретные решения аналогичных задач*, можно заметить, что все они являются частными случаями другой теоретически более общей и сложной проблемы, которую можно сформулировать в следующем

* Авторы не ставят своей задачей в настоящей работе проведение исторического и тематического обзора. Такой обзор планируется опубликовать позднее и связать его с решением одной из конкретных задач.

виде: построение внутреннего описания некоторой пространственной кривой, такого, которое не изменяется при проективных аффинных преобразованиях (пространственный сдвиг, изменение масштаба, вращение и зеркальный поворот). Другими словами, основная цель заключается в выделении из функции некоторой системы признаков, инвариантных к определенной группе преобразований, а затем и построении метрики, которую можно использовать при сравнении этих функций.

Поскольку решение такой проблемы не является тривиальным, то авторы в этой публикации решили остановиться на более простой задаче, а именно построении такого описания и введении метрик для идентификации гладких функций.

Кроме того, в настоящей работе не будут рассматриваться вопросы, связанные с первичной обработкой используемых данных, поскольку, во-первых, таких работ достаточно много, а во-вторых, эта тема требует рассмотрения в отдельной работе.

На основании вышеизложенного содержание работы будет складываться из следующих разделов. В разд. 1 будет рассмотрена методология формирования информативных признаков незамкнутых кривых, на основе которой становится возможной их идентификация с учетом инвариантных 2d- и 3d-аффинных преобразований, таких как сдвиг, масштабирование, поворот и зеркальное отображение. В разд. 2 будут рассмотрены n -мерные спрямляемые кривые, их внутренняя геометрия, а также метрики в классах слабо k -jet-эквивалентных кривых. В разд. 3 будут приведены индуцированные метрики, которые позволят сравнивать такие классы кривых между собой. В разд. 4 будут анализироваться вопросы, связанные со сверхслабой идентичностью кривых, на основе которой для идентификации кривых вводится еще одна группа метрик на нерегулярных сетках. Разд. 5 посвящен обсуждению полученных результатов. В заключении сформулированы выводы по приведенному в работе материалу. Приложение содержит ряд малораспространенных сведений по дифференциальной геометрии кривых.

1. ВВЕДЕНИЕ В ОПИСАНИЕ КРИВЫХ

Идентификация графических образов существенно отличается от других типов распознавания тем, что для ее проведения может быть использована информация различной природы. Этот процесс может быть основан на идентификации внешних признаков объектов, таких как цвет, форма, толщина и тип линий, размер и многие другие, или — на внутренних признаках, представляющих собой параметры, получаемые на этапе предварительной обработки, например длина периметра объекта, компактность или его площадь [1]. Однако все эти признаки не являются репрезентативными при 2d-аффинных

преобразованиях (сдвиг, масштаб, поворот и зеркальное отображение). Следовательно, для правильной идентификации объекта наиболее важную роль играет принцип выбора информативных признаков, то есть таких свойств образа, по которым его можно выделить из окружающей группы объектов. Но что же представляют собой такие информативные признаки?

Рассмотрим в качестве примера некоторую кривую на плоскости. Пусть эта кривая не имеет толщины и типа прорисовки, то есть представляет собой некоторую функцию $f(t)$ в E^2 . Как построить ее описание, которое будет инвариантно к 2d-аффинным преобразованиям — сдвигу, масштабированию, повороту, зеркальному отображению?

Отметим, что в настоящей работе под идентификацией будем понимать процесс сравнения двух групп признаков, выделенных из вещественных функций $f(t)$ и $g(t)$. Определим сначала систему признаков, на которой она будет проводиться. Очевидно, что для выбранного типа кривой такие признаки необходимо искать на основе внутренних свойств, которыми она обладает.

Воспользуемся понятием k -jet (k -струй) [2] для описания системы признаков. Напомним, что классы k -jet, эквивалентных k раз непрерывно дифференцируемой на $[a, b]$ вещественной функции $f(t)$, определяются отрезком ряда Тейлора, в котором проведена замена переменной с $(t - t_0)$ на z и рассматриваемая область расширена с окрестности точки t_0 на весь отрезок $[a, b]$:

$$(J_{t_0}^k f)(z) = f(t_0) + f'(t_0)z + \dots + \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!}z^k.$$

Введем следующие понятия.

Определение 1.1. Пусть f и g являются k раз непрерывно дифференцируемыми вещественными функциями на отрезке $[a, b]$. Будем говорить, что они k -jet-идентичны в точке $t_0 \in [a, b]$, если в ней совпадают все их производные до k -го порядка включительно: $f(t_0) = g(t_0), f^{(1)}(t_0) = g^{(1)}(t_0), \dots, f^{(k)}(t_0) = g^{(k)}(t_0)$, т.е. если они испытывают в точке t_0 касание k -го порядка (см. рис. 1).

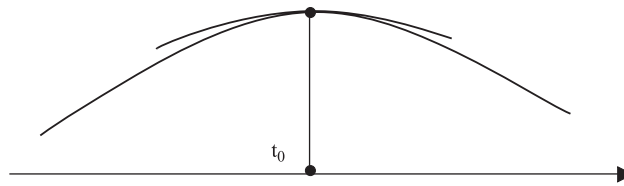


Рис. 1. Идентичность в точке

Определение 1.2. Пусть f и g являются k раз непрерывно дифференцируемыми вещественными функциями на отрезке $[a, b]$. Будем говорить, что они k -jet-идентичны на открытом интервале (c, d) , если $f(t) = g(t), f^{(1)}(t) = g^{(1)}(t), \dots, f^{(k)}(t) = g^{(k)}(t)$ при любом $t \in (c, d)$.

Определение 1.3. Пусть f и g являются k раз непрерывно дифференцируемыми вещественными функциями на отрезке $[a, b]$. Будем говорить, что они k -жет-идентичны на всем отрезке, если они k -жет-идентичны на любом открытом интервале отрезка $[a, b]$.

Определение 1.4. Пусть f и g являются k раз непрерывно дифференцируемыми вещественными функциями на отрезке $[a, b]$. Назовем k -жет-нулями j -го порядка ($1 \leq j \leq k$) функции f точки $t_1^{(j)}, t_2^{(j)}, \dots, t_{n_j}^{(j)}$, в которых j -я производная функции f обращается в нуль: $f^{(j)}(t_r^{(j)}) = 0, r = 1, \dots, n_j$.

Лемма. Если функция f k -жет-идентична функции g на отрезке $[a, b]$, то k -жет-нули j -го порядка функции f совпадают с k -жет-нулями j -го порядка функции g ($1 \leq j \leq k$).

Доказательство тривиально.

Определение 1.5. Пусть вещественная функция $f(t)$, заданная на отрезке $[a, b]$, k раз непрерывно дифференцируема. Обозначим через G_f множество, образованное точками, в которых $f'(t) = 0, f''(t) = 0, \dots, f^{(k)}(t) = 0$. Тогда множество точек $G_f = \{a = t_0 < t_1 < t_2 \dots < t_i < \dots < t_m = b\}$, полученных от производных разных порядков и упорядоченное на $[a, b]$ по возрастанию параметра t , будем называть множеством k -жет-нулей функции $f(t)$.

Например, для невырожденной кубической параболы это множество будет состоять из трех точек: двух экстремальных и одной перегиба (см. рис. 2, а). Для развертки шестилепестковой эпициклоиды ($a = 2, b = 12$), см. рис. 2, б, формула которой записывается как

$$r(t) = \sqrt{\left((a+b) \cos(t) - a \cos\left(\frac{(a+b)t}{a}\right) \right)^2 + \left((a+b) \sin(t) - a \sin\left(\frac{(a+b)t}{a}\right) \right)^2},$$

число нулей на $[0, 2\pi]$, полученных от первой производной, составляет 8, от второй производной — 8, от третьей производной — 16 и т. д.

Определение 1.6. Пусть f и g являются k раз непрерывно дифференцируемыми вещественными функциями на отрезке $[a, b]$, пусть у них совпадают

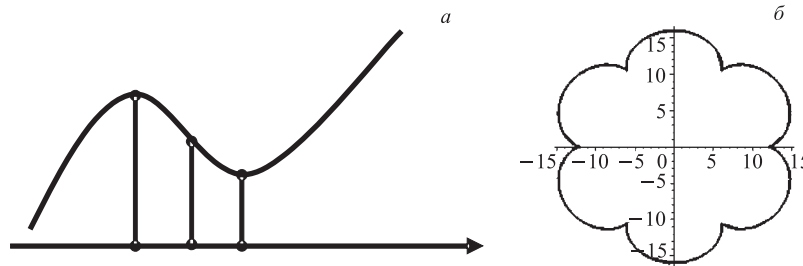


Рис. 2. Кубическая парабола (а) и эпициклоида (б)

все k -jet-нули всех порядков до k -го порядка включительно и пусть, кроме того, значения функций f и g совпадают во всех k -jet-нулях. Тогда мы будем говорить, что функции f и g являются слабо k -jet-идентичными на отрезке $[a, b]$.

2. ВНУТРЕННЯЯ ГЕОМЕТРИЯ КРИВЫХ

В этом разделе будем рассматривать n -мерные спрямляемые кривые L , параметризованные натуральным параметром s — длиной дуги кривой L . Каждая из них описывается ограниченной n -мерной вектор-функцией $\mathbf{r}(s)$, координаты которой $r_1(s), \dots, r_n(s)$ являются функциями с ограниченной вариацией, а их производные $r'_1(s), \dots, r'_n(s)$ — непрерывными функциями.

Замечание 2.1. Инвариантность планируемых операций над кривыми относительно пространственных сдвигов, пространственных поворотов, пространственных отражений, растяжений и сжатий n -мерного пространства значений функций $\mathbf{r}(s)$ следует из проведения ряда процедур над n -мерными параметрическими кривыми, а именно:

- $\mathbf{r}(s) \mapsto \mathbf{r}'(s) = \frac{\mathbf{r}(s)}{\max_{s \in [0, S]} |\mathbf{r}(s)|}$ — масштабирование размеров кривой к 1;
- $r_k(s) \mapsto r''_k(s) = (-1)^{j_k} r_k(s)$, $j_k = \overline{0, 1}$, $k = \overline{1, n}$ — частичная инверсия в области значений;
- $s \mapsto s' = S - s$ — инверсия параметра кривой;
- $s \mapsto s'' = \frac{s}{S}$ — масштабирование параметра кривой.

Введем в рассмотрение множество ограниченных n -мерных вектор-функций $\mathbf{r}(s)$ на отрезке $s \in [0, 1]$. Введем на этом множестве структуру векторного (аффинного) пространства, индуцированную аналогичной структурой в области значений. В получившемся линейном пространстве зададим метрику равномерной сходимости

$$\rho(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \|\mathbf{f} - \mathbf{g}\|_C = \max_{s \in [0, 1]} |\mathbf{f}(s) - \mathbf{g}(s)|. \quad (2.1)$$

Зададим на отрезке $[0, 1]$ неравномерную сетку $0 < t_0 < t_1 < \dots < t_{m-1} < t_m = 1$, которая каждую функцию $\mathbf{f}_m \in \mathbb{R}$ проецирует на сеточную функцию $f_m = \{\mathbf{f}(t_0), \dots, \mathbf{f}(t_m)\}$.

При фиксированном числе m разбиений отрезка $[0, 1]$ получающиеся сеточные функции являются элементами $n \times (m + 1)$ -мерного линейного пространства (векторного или аффинного). Расстояние (2.1) индуцирует расстояние между ними по формуле

$$\rho_m(\mathbf{f}_m, \mathbf{g}_m) = \|\mathbf{f}_m - \mathbf{g}_m\|_C = \max_{t_j} |\mathbf{f}(t_j) - \mathbf{g}(t_j)|. \quad (2.2)$$

В общем случае, повышая порядок k -jet-описания многомерных кривых L_f , мы увеличиваем количество k -jet-нулей функции f , т. е. мощность множества G_f . Однако в некоторых случаях это множество может стабилизироваться, так что дальнейшее увеличение порядка k -jet в описании не добавляет k -jet-нулей. В частности, такое насыщение наблюдается для функций, удовлетворяющих уравнению $\frac{d^{k_0} f}{dt^{k_0}} = \alpha_f f$ с некоторым комплексным числом α_f . В этом случае $\frac{d^{k_0+n} f}{dt^{k_0+n}} = \frac{d^n f}{dt^n}$, так что увеличение множества k -jet-нулей происходит лишь до $k = k_0$, а затем они повторяются.

Из общей теории сеточных функций известно, что при измельчении сетки точность аппроксимации исходной вектор-функции f с помощью сеточных функций f_m повышается при увеличении m (см., например, [3]).

Для любых двух функций f и g класса слабой k -jet-эквивалентности наборы пар

$$\{G, F\} = \{(t_0, f(t_0)), \dots, (t_n, f(t_n))\}$$

и

$$\{G, H\} = \{(t_0, h(t_0)), \dots, (t_n, h(t_n))\}$$

совпадают. И, наоборот, из совпадения $\{G, F\}$ и $\{G, H\}$ следует слабая k -jet-эквивалентность функций f и g .

Утверждение 2.1. Класс слабой k -jet-эквивалентности однозначно определяется сеточной функцией $\{G, F\}$, единой для всех представителей класса. Данная сеточная функция, т. е. пара $\{G, F\}$ задает ломаную линию L_f^m , вписанную в исходную спрямляемую кривую L_f (см. приложение). Эта вписанная ломаная L_f^m описывается кусочно-линейной функцией f_m^n , принадлежащей линейному пространству \mathbb{R} , а точнее конечномерному размерности $n \times (m+1)$ подпространству \mathbb{R}_m^n .

Расстояние $\rho(f, f_m^n) = \|f - f_m^n\|_C$ между кривой и вписанной ломаной зависит от исходной кривой L_f и от степени k -jet-описания кривой, задающей мощности множеств $G_f^k = G_h^k$ и множества пар $\{G, F\} = \{G, H\}$, однако расстояния $\rho(f, f_m^n)$ и $\rho(h, h_m^n)$ могут не совпадать. При этом расстояние между вписанными ломаными, совпадающими для кривых L_f и L_h , равно нулю, т. е. $\rho(f_m^n, h_m^n) = 0$.

Это легко объясняется следующими выкладками. Пусть $\rho(f, f_m^n) = \delta_f$, а $\rho(h, h_m^n) = \delta_h$, тогда в предположении, что максимум достигается на одном и том же участке $[t_k, t_{k+1}]$, мы можем оценить приращение длины ломаной при добавлении точки $t_* \in [t_k, t_{k+1}]$, в которой этот максимум достигается. В приближении линейных приращений это можно сделать с помощью теоремы Пифагора.

С другой стороны, справедлива оценка

$$\rho(f, h) \leq \rho(f, f_m^n) + \rho(f_m^n, h_m^n) + \rho(h_m^n, h) = \delta_f + \delta_h.$$

Добавление точки t_* к множеству $G_f = G_h$, так что $G^* = G \cup \{t_*\}$ разделит f и g на разные классы слабой k -jet-эквивалентности.

Если же максимум достигается в различных точках $t_f^* \neq t_g^*$, а тем более на разных сегментах отрезка, добавление этих точек делает различными $G_f^* = G_h^*$ и тем более разводит f и g по разным классам.

Замечание 2.2. Расстояние $\rho(f, f_m^n)$ является расстоянием функции f от подпространства \mathbb{R}_m^n в смысле m -поперечников Колмогорова [4].

Замечание 2.3. Длина кривой L_f равна единице, а длина вписанной ломаной L_f^m меньше единицы. Причем при $m \rightarrow \infty$ $L_f^m \rightarrow 1$, и чем меньше $1 - L_f^m$, тем меньше расстояние $\rho(f, f_m^n)$ и наоборот, чем меньше $\rho(f, f_m^n)$, тем меньше $1 - L_f^m$.

Утверждение 2.2. Если функция $f(t)$ k раз непрерывно дифференцируема, тогда она может быть аппроксимирована линейной ломаной L в узлах множества G , при этом точность аппроксимации определяется порядком производных (см. разд. 3).

Утверждение 2.3. Для каждого класса слабой k -jet-идентичности функций на отрезке $[a, b]$ существует единственная представляющая этот класс кусочно-линейная функция L , совпадающая со всеми функциями класса в k -jet-нулях и линейная на фрагментах $[t_i, t_{i+1}]$, принадлежащих множеству нулей k -jet.

Замечание 2.4. Согласно теореме Вейерштрасса [5] для непрерывной функции на отрезке предполагается, что внутри отрезка она либо имеет экстремум, либо монотонна. Рассмотрим $(k - 1)$ -ю производную функции f на любом из фрагментов, лежащем между двумя соседними k -jet-нулями. Она монотонна на каждом из них, т.к. все ее экстремумы являются нулями k -й производной, а значит концами рассматриваемых фрагментов. Аналогично, все производные меньшего порядка и сама функция также монотонны на каждом из этих фрагментов в силу все той же теоремы.

3. ИДЕНТИФИКАЦИЯ КРИВЫХ

В разд. 2 были введены конструкции, позволяющие определить характерные признаки для идентификации гладких пространственных кривых. Использование k -jet-нулей позволяет наглядным образом описать те метрики, которые мы ниже вводим на пространстве классов. Они предназначены для эффективной реализации автоматических процедур численной идентификации кривых на основе их свойств, изложенных в данном разделе. Теперь будут рассмотрены практические методы сравнения двумерных кривых на основе этих признаков, для чего будут построены следующие метрики.

Рассмотрим теоретический случай, когда мы хотим сравнить некоторую кривую L_f с эталонной кривой L_g и имеющими описание в виде вектор-

функций $\tilde{f}(s)$ с длиной S_f и $\tilde{g}(s)$ с длиной S_g . Вычислим $\|\tilde{f}\| = \max_S |\tilde{f}(s)|$ и $\|\tilde{g}\| = \max_S |\tilde{g}(s)|$. Промасштабируем область значений и определим таким образом, чтобы выполнялись соотношения

$$\mathbf{f}(x') = \frac{\tilde{f}(x)}{\|\tilde{f}\|}, \quad x' = \frac{s}{S_f}, \quad \mathbf{g}(y) = \frac{\tilde{g}(s)}{\|\tilde{g}\|}, \quad y = \frac{s}{S_g}.$$

Тогда двум кривым L_f и L_g будут поставлены в соответствие два элемента f и g из \mathbb{R} .

Для каждой из функций f и g определим множества G_f и G_g их k -жет-нулей, которые формируют сетки (не обязательно совпадающие и, возможно, разной мощности) на отрезке $[0, 1]$.

Определение 3.1. Пусть для эталонной кривой $f = f(s)$ множество $G_f = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_l = b\}$ образовано $l + 1$ точками, а для идентифицируемой кривой $g = g(s)$ $G_g = \{c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d\}$ содержит $m + 1$ точку. Пусть $l > m$, то есть предположим, что идентифицируемая кривая представляет собой фрагмент эталонной, в противном случае они поменяются местами. Если представить, что рассматриваемые кривые имеют псевдопериодичность, то необходимо доопределить G_s множеством точек того же размера, что и G_0 следующим образом:

$$G_s^* = x_0, x_1, \dots, x_l, x_{l+1} = x_l + x_1 - x_0, \dots, x_{l+m} = x_l + x_m - x_0.$$

Другими словами, будем рассматривать случай, когда $|G_f|^{=m} < |G_g|^{=k}$, т. е. множество k -жет-нулей кривой L_f меньше множества k -жет-нулей кривой L_g . При этом множество G_g необходимо доопределить до множества G_{gf} по правилу

$$|G_{gf}| = |G_g| + |G_f| - 1.$$

Определение 3.2. Для некоторого множества нулей k -jet $G = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_l = b\}$, зеркальным ему назовем множество $G_z = \{b = y_0 = x_n, > y_1 = x_{n-1} >, \dots, > y_n = x_0 = a\}$.

Введем многомерную функцию разности с учетом возможных инверсий (отражений) в области значений функций f и g следующим образом:

$$\eta_{i,j}^k = |f_k(t_{i+j})| - |g_k(\tau_i)|, \quad i = \overline{0, l-m}, \quad j = \overline{0, m}.$$

Из полученного набора можно либо сформировать линейную функцию разности первого типа $\eta_{i,j}^{(1)} = \max_{l=1, n} |\eta_{i,j}^l|$, либо линейную функцию разности второго

типа — $\eta_{i,j}^{(2)} = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n |\eta_{i,j}^l|$.

Определим функции абсолютной ошибки идентификации первого и второго типа

$$\delta_i^q = \frac{1}{(m+1)} \sum_{j=0}^m \left| \eta_{i,j}^{(q)} \right|, \quad q = 1, 2, \quad i = \overline{0, (k-m)},$$

и функции относительной ошибки идентификации первого и второго типа

$$\sigma_i^{(q)} = \frac{1}{(m+1)} \sum_{j=0}^m \left| \delta_i^{(q)} - \eta_{i,j}^{(q)} \right|, \quad q = 1, 2, \quad i = \overline{0, (k-m)}.$$

Определение 3.3. Функцию распознавания для идентификации незамкнутых кривых на основе *линейной корреляции 1* (ЛК1) запишем как

$$\lambda_{LK1} = \begin{cases} 1, & (\rho_{LK1} < \varepsilon_{LK1}) \vee (\rho_{LK1}^z < \varepsilon_{LK1}), \\ 0, & (\rho_{LK1} \geq \varepsilon_{LK1}) \wedge (\rho_{LK1}^z \geq \varepsilon_{LK1}), \end{cases} \quad (3.1)$$

где $\rho_{LK1} = \min_i \delta_i$ — метрика ЛК1; ρ_{LK1}^z — метрика ЛК1, вычисленная на зеркальном множестве k -jet-нулей объекта, а ε_{LK1} — классификационный допуск ЛК1. Равенство $\lambda_{LK1} = 1$ будет означать успешную идентификацию кривой, а i — сдвиг положения объекта относительно начала эталонной линии.

Определение 3.4. Функцию распознавания для идентификации незамкнутых кривых на основе *линейной корреляции №2* (ЛК2) запишем как

$$\lambda_{LK2} = \begin{cases} 1, & (\rho_{LK2} < \varepsilon_{LK2}) \vee (\rho_{LK2}^z < \varepsilon_{LK2}), \\ 0, & (\rho_{LK2} \geq \varepsilon_{LK2}) \wedge (\rho_{LK2}^z \geq \varepsilon_{LK2}), \end{cases} \quad (3.2)$$

где $\rho_{LK2} = \min_i \sigma_i$ — метрика ЛК2; ρ_{LK2}^z — метрика ЛК2 №2, вычисленная на зеркальном множестве k -jet-нулей объекта, а ε_{LK2} — классификационный допуск ЛК2. Равенство $\lambda_{LK2} = 1$ будет означать успешную идентификацию объекта, а i — сдвиг положения объекта относительно начала эталонной линии.

Замечание 3.1. Если вероятность идентификации зеркально повернутых кривых исключается, то части формулы с зеркальной функцией ρ^z в (2.1) и (2.2) исключаются.

Реализация методов ЛК1 и ЛК2 аналогична методам геометрической корреляции, детально изложенным в [6] и [7].

4. ИДЕНТИФИКАЦИЯ НА СЕТКАХ

Предложенные в данной работе методы идентификации пространственных кривых рассчитаны на случай обработки больших массивов данных. В случае же, когда количество обрабатываемых кривых становится особенно большим, процедуру идентификации можно разбить на несколько последовательных этапов (см. метод последовательного взвешивания в [8]). При этом на начальном этапе выполняется более грубая классификация, а на последующих этапах используются более медленные и прецизионные методы.

В первом разделе были описаны два отношения эквивалентности: более сильное отношение k -jet-эквивалентности и более грубое отношение слабой k -jet-эквивалентности. Для предварительной классификации кривых можно использовать еще более грубое отношение эквивалентности, которое будем называть *сверхслабой k -jet-эквивалентностью*. Для его определения проведем следующие построения.

В отличие от случая слабой k -jet-эквивалентности в качестве значений функции выберем расстояния между двумя соседними узлами множества G , а в качестве аргументов положение этих узлов. То есть заменим F множеством $F^* = \{f(t_i) = t_{i-1} - t_i, \quad i = \overline{1, k+1}\}$, где значения аргумента принадлежат множеству G .

Для достижения инвариантности относительно линейных размеров кривых введем нормирующий множитель, который будет приводить суммарные длины рассматриваемых кривых к 1.

Воспользуемся методологией *Определения 3.1.* и обозначим «длины ординат» эталонной кривой как S_j^s , а идентифицируемой — S^o :

$$S_j^s = \sum_{i=1}^m \Delta t_{i+j}^s, \quad j = \overline{0, (k-m)}, \quad S^o = \sum_{i=1}^m \Delta t_i^o.$$

Введем функцию *относительного попарного расстояния*

$$\eta_{i,j} = \frac{\Delta t_{i+j}^s}{S_j^s} - \frac{\Delta t_j^o}{S^o}, \quad i = \overline{0, k-m}, \quad j = \overline{0, m},$$

где $\Delta t_{i+j}^s = t_{i+j+1}^s - t_{i+j}^s$, а $\Delta t_i^o = t_{i+1}^o - t_i^o$ (при отсутствии псевдопериодичности $i = \overline{0, k-m}$).

Запишем функции *абсолютной ошибки идентификации на сетке*

$$\delta_i = \frac{1}{m+1} \sum_{j=0}^m |\eta_{i,j}|, \quad i = \overline{0, (k-m)},$$

и относительной ошибки идентификации на сетке

$$\sigma_i = \frac{1}{m+1} \sum_{j=0}^m |\delta_i - \eta_{i,j}|, \quad i = \overline{0, (k-m)}.$$

Определение 4.1. Функцию распознавания для идентификации незамкнутых кривых на основе линейной сеточной корреляции № 1 (СК1) запишем как

$$\lambda_{\text{НК1}} = \begin{cases} 1, & (\rho_{\text{НК1}} < \varepsilon_{\text{НК1}}) \vee (\rho_{\text{НК1}}^z < \varepsilon_{\text{НК1}}) , \\ 0, & (\rho_{\text{НК1}} \geq \varepsilon_{\text{НК1}}) \wedge (\rho_{\text{НК1}}^z \geq \varepsilon_{\text{НК1}}) , \end{cases} \quad (4.1)$$

где $\rho_{\text{НК1}} = \min_i \delta_i$ — метрика СК1; $\rho_{\text{НК1}}^z$ — метрика СК1, вычисленная на зеркальном множестве k -jet-нулей объекта, а $\varepsilon_{\text{НК1}}$ — классификационный допуск СК1. Равенство $\lambda_{\text{НК1}} = 1$ будет означать успешную идентификацию объекта, а i — сдвиг положения объекта относительно начала эталонной линии.

Определение 4.2. Функцию распознавания для идентификации незамкнутых кривых на основе линейной сеточной корреляции № 2 (СК2) запишем как

$$\lambda_{\text{НК2}} = \begin{cases} 1, & (\rho_{\text{НК2}} < \varepsilon_{\text{НК2}}) \vee (\rho_{\text{НК2}}^z < \varepsilon_{\text{НК2}}) , \\ 0, & (\rho_{\text{НК2}} \geq \varepsilon_{\text{НК2}}) \wedge (\rho_{\text{НК2}}^z \geq \varepsilon_{\text{НК2}}) , \end{cases} \quad (4.2)$$

где $\rho_{\text{НК2}} = \min_j \sigma(j)$ — метрика линейной сеточной корреляции № 2; $\rho_{\text{НК2}}^z$ — метрика линейной сеточной корреляции № 2, вычисленная на зеркальном множестве k -jet-нулей объекта, а $\varepsilon_{\text{НК2}}$ — классификационный допуск СК1. Равенство $\lambda_{\text{НК2}} = 1$ будет означать успешную идентификацию объекта, а j — сдвиг положения объекта относительно начала эталонной линии.

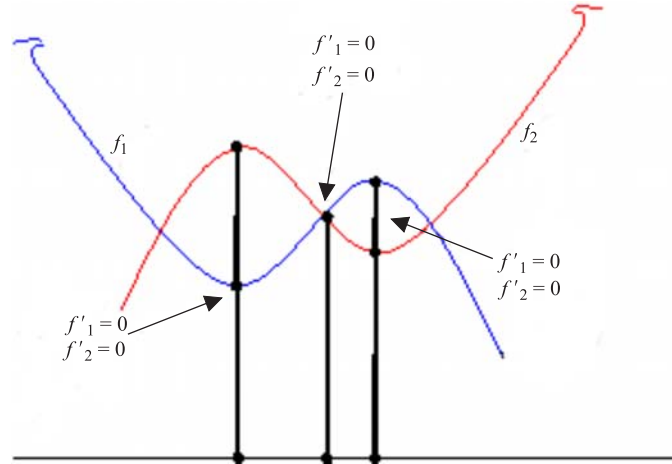


Рис. 3. Идентификация двух зеркальных кубических парабол

Замечание 4.1. Если вероятность идентификации зеркально повернутых кривых исключается, то части формулы с зеркальной функцией ρ^z в (3.1) и (3.2) исключаются.

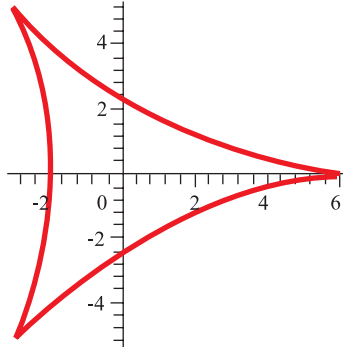


Рис. 4. График трехлепестковой гипоциклоиды

Так, на рис.3 показаны две кубические параболы в зеркальном отображении, которые в приведенных метриках СК1 и СК2 являются неотличимыми.

Приведем еще один пример с использованием линейной сеточной идентификации на основе трехлепестковой гипоциклоиды, уравнение развертки которой записывается как

$$f(t) = 2 \cdot \sqrt{5 + 4 \cos(t) \cos(2t) - 4 \sin(t) \sin(2t)}$$

и имеет бесконечное число производных. Ее график показан на рис. 4.

Для развертки этой кривой множество k -jet-нулей, вычисленное для параметра $k = 2$ на отрезке, $[0, 360^\circ]$ будет иметь вид $G = \{0, 5, 60, 115, 120, 125, 180, 235, 249, 245, 300, 355\}$ (см. рис. 5).

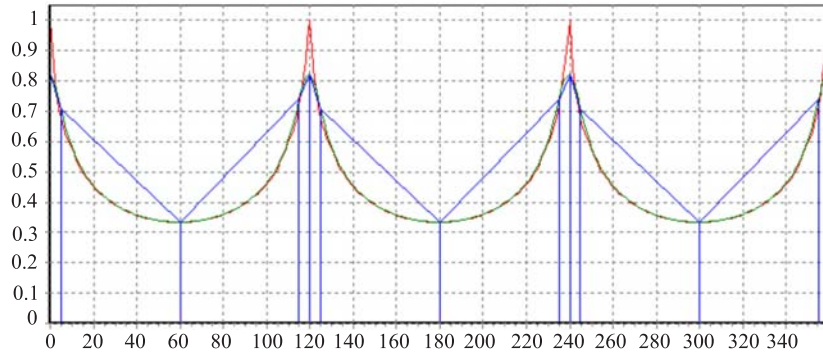


Рис. 5. Развертка трехлепестковой гипоциклоиды до и после фильтрации. Вертикальные абсциссы показывают нули k -jet, ломаная показывает аппроксимирующую кусочно-ломаную кривую

А множество $F^* = \{5, 55, 55, 5, 5, 55, 5, 5, 55, 55, 5, 5\}$. Как легко заметить для симметричной кривой с тройной центральной симметрией, для идентификации по методам СК1 и СК2 достаточно только четырех точек (учитывая три оси центральной симметрии).

5. ОБСУЖДЕНИЕ

Внесение понятия струй в теорию распознавания образов и рассмотрение процесса идентификации плоских кривых на основе множества нулей k -jet открывает много новых возможностей работы с функциями.

Во-первых, такой подход делает возможным построение описания функций для их идентификации инвариантно к аффинным преобразованиям (сдвиг, масштаб, поворот, зеркальное отображение). Введение метрик линейной и сеточной корреляции позволяет осуществить процесс идентификации функций — распознавания формы незамкнутых кривых.

Во-вторых, в используемых методах существует некоторая «неточность» идентификации, приводящая к тому, что две сравниваемые кривые, принадлежащие разным классам, но имеющие на некотором отрезке одинаковый набор k -jet-нулей могут быть идентифицированы как функции одного класса с точностью k -jet. Это означает, что появляется возможность распознавать не только форму кривых, но и относить функции к определенному классу, называемому слабо- k -jet-эквивалентном или сверхслабо- k -jet-эквивалентном. Причем описание класса можно получить априори, теоретически, путем расчета множества нулей k -jet, которое будет полностью определять нужный класс функций. Например, зная параметры некоторой частицы и параметры масс-спектрометра, можно рассчитать параметры ее траектории в нем. При этом можно получить точки множества нулей k -jet и затем, контролируя поведение траекторий в этих точках, идентифицировать треки частиц на совпадение значений функций в этих точках на основе предложенных метрик. В решении этой задачи возможны вариации, рассмотрение которых требует написания отдельной статьи.

В-третьих, предложенные методы обладают определенной вариативностью относительно точности идентификации кривых, с точки зрения порядка используемых производных. Так, очевидно, что при идентификации кубических парабол все производные выше 3-й будут равны нулю. Однако можно искать фрагменты таких парабол в кривых более высокого порядка (по трем точкам), и таких фрагментов может быть много. Более того, можно осуществлять постоянный контроль процесса на появление в нем определенной формы сигнала. Точность такого поиска будет определяться величиной классификационного допуска и порядком k -jet. С другой стороны, можно вырезать фрагмент кривой высокого порядка и искать по нему места, совпадающие с кубическими параболой. Такая ситуация возможна в тех случаях, когда часть функции утрачена, а по оставшимся фрагментам невозможно определить ее порядок. Более подробно такая ситуация будет рассмотрена в дальнейших работах.

В-четвертых, предложенные методы идентификации кривых являются чрезвычайно простыми в вычислительном отношении и могут использоваться

в режиме реального времени, то есть прямо в ходе проведения некоторого эксперимента.

В-пятых, необходимо особо отметить, что существуют функции, удовлетворяющие условиям Определения 1.3. и, тем не менее, не идентифицируемые в смысле Леммы. К ним, например, относятся функции вида $f(t) = \exp\{h(t)\}$, такие что $f'(t) = h'(t) \exp\{h(t)\} \Rightarrow f''(t) = \{h'(t)^2 + h''(t)\} \times \exp\{h(t)\} \Rightarrow f^{(n)}(x) = P(h', \dots, h^{(n)}) \exp\{h(t)\}$ и попадающие в класс $f^{(n)} = P(f) \cdot f$. Так, например, при $n = 1$ такой функцией будет $e^{-\frac{1}{x^2}}$, которая имеет производные n -го порядка, вычисляемые по формуле $f^{(n)}(x) = \frac{P}{x^n} e^{-\frac{1}{x^2}}$ [9]. Все производные этой функции равны нулю при $x = 0$, а множество k -jet-нулей вырождается в одну точку, то есть не обладает достаточным количеством опорных точек* типа k -jet-нулей. Кроме того, среди функций, в которых количество опорных точек не увеличивается с возрастанием порядка k -jet, находятся правильная окружность (на плоскости) и винтовая линия на цилиндре (в пространстве). Однако для их идентификации имеются другие методы, в частности, основанные на методах геометрической корреляции.

К сожалению, обсуждаемая методология обладает и недостатками, среди которых необходимо отметить сложности вычисления производных высоких порядков и неустойчивость их поведения. Для устранения этого нами была использована интерполяция на основе метода Гаусса.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенная методология обладает широким спектром применимости. Она может быть использована при анализе треков заряженных частиц, идентификации формы сигналов, распознавания фрагментов графических изображений (когда утрачена целостность формы контура) и во многих других областях науки и техники. Преимуществом этого подхода является инвариантность к аффинным преобразованиям и простота вычислений метрики, что позволяет использовать его в режиме реального времени.

Применение для идентификации кривых k -jet-методологии дает возможность представления и распознавания как плоских кривых, так и кривых в n -мерном пространстве. Это делает ее еще более актуальной и перспективной в научном и техническом аспектах.

*Т.е. точек, в которых значения абсцисс k -jet-нулей не совпадают.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Многие тезисы, на которые опирается настоящая работа, были опубликованы в 30-е годы XX века. В связи с этим они в настоящее время могут быть недоступны. Напомним некоторые понятия теории кривых, чтобы далее свободно их использовать [10].

Пусть кривая задана векторной функцией $\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$.

Пусть кривая задана функциями $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ аргумента t , которые непрерывны на отрезке $t \in [a, b]$. Рассмотрим множество L точек плоскости $M(x, y)$, координаты x, y которых определяются соотношениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad a \leq t \leq b. \quad (\text{п.1})$$

Определение п.1. Множество L будем называть простой плоской кривой или кривой *Жордана*, если различным значениям параметра $t \in [a, b]$ отвечают различные точки этого множества.

Точки $M(x, y)$, координаты которых определяются соотношениями (п.1), называются точками кривой L . Точки A и B , отвечающие граничным значениям a и b аргумента t , называются граничными точками кривой L .

Обозначим через M_0 точку кривой L , отвечающую значению t_0 параметра, а через M точку кривой L , отвечающую значению параметра t из некоторой окрестности значения t_0 , так что $M \rightarrow M_0$ при $t \rightarrow t_0$. Прямая M_0M называется касательной к кривой L в точке M_0 , если при $M \rightarrow M_0$ меньший угол между этой прямой и переменной прямой M_0M стремился к 0.

Кривая L называется гладкой в точке M_0 , если в этой точке существует касательная к кривой L и некоторая окрестность точки M_0 на кривой L однозначно проектируется на эту касательную. Кривая называется гладкой, если она является гладкой в каждой точке ее определения и касательные в точках кривой L изменяются непрерывно.

Понятие пространственной трехмерной и n -мерной кривой в пространстве E^n вводится в полной аналогии с понятием плоской кривой. Теперь пространственная кривая L задана параметрически следующими уравнениями

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad \dots, \quad x_n = \varphi_n(t), \quad t \in [a, b] \quad (\text{п.2})$$

(функции $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ непрерывны на множестве $[a, b]$).

Теорема п.1 Пусть n -мерная кривая L задана векторной функцией

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \dots \\ \varphi_n(t) \end{pmatrix}, \text{ имеющей в некоторой окрестности точки } t_0 \in [a, b] \text{ непре-}$$

рывную производную $\mathbf{r}'(t_0) \neq 0$, тогда кривая L называется гладкой кривой в точке M_0 , соответствующей значению t_0 .

Теорема n.2 (достаточные условия гладкости кривой). Пусть кривая L задана векторной функцией $\mathbf{r}(t)$, $t \in [a, b]$, имеющей непрерывную производную $\mathbf{r}'(t)$. Если $\mathbf{r}'(t) \neq 0$ для любого $t \in [a, b]$, то кривая L гладкая.

Если $\varphi(t)$, $\psi(t)$ и $\chi(t)$ — координаты трехмерной векторной функции $\mathbf{r}(t)$, то производные m -го порядка записываются $\mathbf{r}^{(m)}(t) = \varphi^{(m)}(t)i + \psi^{(m)}(t)j + \chi^{(m)}(t)k$.

Если у векторной функции $\mathbf{r}(t)$ существуют и непрерывны все производные до порядка m включительно, то записывают $\mathbf{r}(t) \in C^m$.

Определение n.2. Пусть гладкая кривая L задана векторной функцией $\mathbf{r}(t)$. Если $\mathbf{r}(t) \in C^m$, $m \geq 2$, то кривая L называется регулярной кривой класса C^m .

Пусть L простая плоская кривая, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$, ее радиус-вектор. Разобьем отрезок $[a, b]$ на части точками $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$.

Отметим на кривой L точки M_i , отвечающие значениям t_i , и построим ломаную $M_0, M_1, \dots, M_{n-1}, M_n$, вписанную в кривую L . Кривая L называется *спрямляемой*, если множество длин всевозможных ломаных, вписанных в простую кривую L указанным выше способом, ограничено. Точная верхняя грань этого множества называется длиной дуги кривой L , или просто длиной кривой L .

Если простая кривая L разбита точкой N на спрямляемые части L' и L'' , то кривая L спрямляема, а для длин $S(L')$, $S(L'')$, $S(L)$ дуг кривых L , L' , L'' выполняется соотношение $S(L') + S(L'') = S(L)$.

Пусть A и B — граничные точки спрямляемой кривой L , а M — точка кривой, соответствующая некоторому значению $t \in [a, b]$. Обозначим через $s(t)$ длину дуги кривой. Функция $s(t)$ строго монотонна и непрерывна на отрезке $[a, b]$, а также положительна при $t > a$.

Пусть S — длина кривой L . Вследствие того, что функция $s = s(t)$ на отрезке $[a, b]$ непрерывна и строго возрастает от 0 до S на сегменте $[0, S]$, существует строго возрастающая и непрерывная функция $t = t(s)$. Это означает, что параметр t на спрямляемой кривой есть строго монотонная и непрерывная функция длины дуги s . Отсюда следует, что на спрямляемой простой кривой в качестве параметра может быть выбрана длина дуги s . Такая параметризация спрямляемой кривой называется натуральной или естественной, а периметр S (длина дуги) — натуральным параметром.

Замечание n.1. Для спрямляемости простой кривой L необходимо и достаточно, чтобы функции $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ были функциями ограниченной вариации.

Замечание n.2. Длина параметрической спрямляемой кривой равна сумме длин ее простых сегментов.

Теорема п.3. Пусть простая n -мерная кривая L задана векторной функцией $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$. Тогда если функции $\varphi'_k(t)$, $k = \overline{1, n}$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, то кривая L спрямляема и длина дуги может быть вычислена по формуле

$$S = \int_a^b \{\varphi'_1(t)^2 + \dots + \varphi'_n(t)^2\}^{1/2} dt = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)| dt. \quad (\text{п.3})$$

Следствие п.1. Если M — точка кривой L , соответствующая значению t , то длина дуги равна

$$s(t) = \int_a^t |\mathbf{r}'(\tau)| dt. \quad (\text{п.4})$$

Следствие п.2. Пусть $\mathbf{r}'(t) \neq \vec{0}$, тогда существует функция $t(s)$, обратная функции $s(t)$ и дифференцируемая столько же раз, сколько и $\mathbf{r}(t)$.

Следствие п.3. Если L — регулярная кривая класса C^k , то при переходе к натуральному параметру s она также будет регулярной кривой класса C^k .

Из формулы (п.4) дифференцированием по верхнему пределу получаем

$$s'(t) = |\mathbf{r}'(t)| = (\varphi'_1(t)^2 + \dots + \varphi'_n(t)^2)^{1/2}.$$

Отсюда получаем выражение для дифференциала дуги

$$ds = s'(t)dt = (d\varphi_1^2 + \dots + d\varphi_n^2)^{1/2}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гостев И. М.* О методах повышения качества идентификации графических объектов в методах геометрической корреляции // Изв. РАН ТиСУ. 2005. № 3. С. 62–71.
2. *Арнольд В. И.* Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Ижевск: Изд-во «Регулярная и хаотическая динамика», 2000.
3. *Самарский А. А.* Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971.
4. *Колмогоров А. А.* О наилучшем приближении функций заданного функционального класса // Избранные труды «Математика и механика». М.: Наука, 1985. С. 186.
5. *Гурса Э.* Курс математического анализа, Т. 1, Ч. 1. М.: Государственное техническо-теоретическое издательство, 1933.

6. *Гостев И. М.* О методах распознавания графических образов // Изв. РАН ТиСУ. 2004. № 1.
7. *Гостев И. М.* Об идентификации графических объектов по контурным функциям // Изв. РАН ТиСУ. 2005. № 1. С. 144–151.
8. *Гостев И. М.* О принципах построения эталона в системах распознавания графических образов // Изв. РАН ТиСУ. 2004. № 5. С. 135–142.
9. *Гребенников А. И.* Метод сплайнов и решение некорректных задач теории приближений. М.: Изд-во МГУ, 1983.
10. *Позняк Э. Д., Шикин Е. В.* Дифференциальная геометрия. Первое знакомство. М.: Изд-во МГУ, 1990.

Получено 9 июля 2007 г.

Редактор *М. И. Зарубина*

Подписано в печать 26.10.2007.

Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 1,31. Уч.-изд. л. 1,60. Тираж 310 экз. Заказ № 55931.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.

E-mail: publish@jinr.ru

www.jinr.ru/publish/