P4-2007-167

Ю. В. Гапонов*

НОВЫЙ ПОДХОД К ОПИСАНИЮ МАЙОРАНОВСКИХ СВОЙСТВ НЕЙТРАЛЬНЫХ ЧАСТИЦ

Направлено в журнал «Nuclear Physics»

*РНЦ «Курчатовский институт», Москва, Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Институт Нильса Бора, Копенгаген

Гапонов Ю. В. Р4-2007-167

Новый подход к описанию майорановских свойств нейтральных частиц

Для описания майорановских свойств нейтральных частиц развиты две математические модели, основанные на паулиевских преобразованиях, включающих киральную $U(1)$ и паулиевскую $SU(2)$ группы, смешивающие частичные и античастичные состояния. Первая из них описывает систему, включающую левые и правые фермионы общего флейвора, и является обобщением модели, предложенной Майораной в его пионерской статье 1937 г. Вторая описывает двухфлейворную нейтринную систему, квантовые числа которой отвечают схеме Зельдовича–Конопинского–Махмуда (ЗКМ). Для безмассовых фермионов паулиевская симметрия является точной и приводит к сохраняющемуся обобщенному лептонному заряду. Он является вектором паулиевского изопространства, различные направления которого сопоставляются с дираковскими или обобщенными майорановскими свойствами. В случае частиц с не равной нулю массой эти модели описывают объединенные дираковско-майорановские свойства исследуемых нейтральных частиц, характеризуемые общим квантовым числом ЗКМ-типа, которым служит либо обобщенный лептонный заряд, либо собственное значение оператора, отвечающего произведению операторов лептонного заряда и киральности. Последний связан с оператором структуры массового члена лагранжиана системы или с обобщенным флейворным числом второй модели. При этом выбор базового оператора зависит от инверсного класса (A-B- или C-D-типа) исследуемых частиц по отношению к операции пространственной инверсии. Показано, что использование модифицированного варианта второй модели позволяет описать нейтринные осцилляционные эксперименты в простейшем двухфлейворном случае.

Работа выполнена в Лаборатории ядерных проблем им. В. П. Джелепова ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2007

Gaponov Yu. V. P4-2007-167

New Approach to Description of Majorana Properties of Neutral Particles

Two mathematical models based on Pauli transformations including $U(1)$ chiral group and Pauli $SU(2)$ group, that mixes particle and antiparticle states, are developed for description of Majorana properties of neutral particles. The first one describes a system, incorporating left- and right-handed fermions of the same flavor, and it is a generalization of the Majorana model of his pioneer article published in 1937. The second describes a two-flavor neutrino system with quantum numbers of Zel'dovich–Konopinsky–Mahmoud (ZKM) type. For massless fermions the Pauli symmetry is exact and leads to the conserved generalized lepton charge. It is a Pauli isospace vector, whose different directions are coordinated with Dirac or generalized Majorana properties. In nonzero-mass case the models describe the combined Dirac-Majorana properties of neutral particles, which are characterized either by the generalized lepton charges of ZKM-type or by the eigenvalues of the operator that is the product of the charge operator and chirality. The latter is connected with operator of the structure of Lagrangian mass term or with the generalized flavor number of the second model. The choice of the basic operator depends on the inversion classes (A-B or C-D-types) of the particles with respect to the space inversion. The modified second model can be used for description of neutrino oscillation in the simplest two-flavor case.

The investigation has been performed at the Dzhelepov Laboratory of Nuclear Problems, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2007

Исследование майорановских свойств частиц [1], прежде всего нейтрино, — одна из центральных задач современной физики слабых процессов, изучение которой существенно стимулировало недавнее открытие осцилляций в пучках атмосферных, солнечных и реакторных нейтрино [2–4].

Майорановские модели описания нейтрино развивались в литературе в двух основных вариантах: в схемах, идущих от работ Майораны и Понтекорво [1, 5], включающих в простейшем случае одну частицу, имеющую левые и правые состояния, и в феноменологических моделях, используемых сегодня при анализе нейтринных осцилляций, включающих левые нейтрино двух и более типов (флейворов) [6, 7] (см. также, например, [8–13]). При этом одной из существенных проблем таких моделей является отсутствие в них квантовых характеристик, пригодных для описания майорановских состояний.

Между тем, как было продемонстрировано автором в [14–17], возможен новый подход к построению майорановских схем, в котором эта проблема частично решается. Этот подход основан на применении группы общих паулиевских (кирально-паулиевских) преобразований [18] (группы Паули–Перси по терминологии 1950-х гг. [19–21]), использование которой позволяет построить примеры феноменологических моделей, куда могут быть введены квантовые числа, описывающие майорановские состояния.

В настоящей работе представлены две простейшие схемы такого типа, соответствующие указанным выше вариантам: модель, включающая левые и правые состояния общего флейвора, принадлежащие одной нейтральной частице, и двухфлейворная модель, включающая состояния двух разных флейворов, например, нейтрино электронного и мюонного типа. Последняя модель используется затем для описания нейтринных осцилляций.

План статьи следующий: в § 1 вводятся понятия, связанные с паулиевской группой, указанные модели изложены в § 2 и 3 соответственно, § 4 посвящен применению двухфлейворной модели к описанию нейтринных осцилляций, в заключительном § 5 обсуждаются особенности паулиевских моделей, отличающие их от существующих схем майорановских нейтрино.

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Как было впервые показано Паули [18], фермионные поля массы нуль симметричны относительно преобразований

$$\psi'(x) = \mathrm{e}^{i\gamma_5\chi/2}(a\psi(x) + b\gamma_5\gamma_2\gamma_4\overline{\psi}^T(x)) = \mathrm{e}^{i\gamma_5\chi/2}(a\psi(x) + b\gamma_5\psi^C(x)),$$
$$|a|^2 + |b|^2 = 1, \quad \psi^C(x) = \hat{C}\overline{\psi}^T(x) = \eta_C\gamma_2\gamma_4\overline{\psi}^T(x), \quad \eta_C = 1 \quad ([22]). \tag{1}$$

Такие преобразования сохраняют коммутаторы поля и включают собственно паулиевскую $SU(2)$-группу (тип I у Паули) и группу киральных $U(1)$-преобразований (тип II). Первая группа при $a = \mathrm{e}^{i\varphi/2}$, $b = 0$ редуцируется к подгруппе фазовых преобразований, на базе которой возможно построение сохраняющегося лептонного заряда. Вводя операторы $\hat{\kappa}_i$ $(i = x, y, z)$ и обобщенную двухкомпонентную функцию $\Psi(x)$:

$$\hat{\kappa}_x = \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix}, \ \hat{\kappa}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ +i & 0 \end{pmatrix}, \ \hat{\kappa}_z = \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$
$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi(x) \\ \gamma_5\psi^C(x) \end{pmatrix}, \tag{2}$$

легко показать, что при $a = \mathrm{e}^{i\varphi/2}\cos\theta/2$, $b = \mathrm{e}^{i\varphi/2}\mathrm{e}^{-i\phi}\sin\theta/2$ преобразование (1) приводится к стандартной форме

$$\Psi'(x) = \mathrm{e}^{i\gamma_5\chi/2}\mathrm{e}^{i\hat{\kappa}_z\varphi/2}\mathrm{e}^{i(\cos\phi\hat{\kappa}_y - \sin\phi\hat{\kappa}_x)\theta/2}\Psi(x) = S(\chi)S(\varphi)S(\phi,\ \theta)\Psi(x),$$
$$\hat{\kappa} = \cos\theta\hat{\kappa}_z + \sin\theta\cos\phi\hat{\kappa}_x + \sin\theta\sin\phi\hat{\kappa}_y, \quad S^+(\phi,\ \theta)\hat{\kappa}_z S(\phi,\ \theta) = \hat{\kappa}, \tag{3}$$

которую можно интерпретировать в терминах поворотов в киральном и паулиевском подпространствах. Последние включают повороты $S(\varphi) = \mathrm{e}^{i\hat{\kappa}_z\varphi/2}$ вокруг оси κ_z и преобразования $S(\phi,\ \theta) = S$ вектора $\boldsymbol{\kappa}_z$ в направлении вектора $\boldsymbol{\kappa}$, заданного стандартными углами Эйлера ϕ и θ. Возможны также другие представления обобщенной функции, при этом форма паулиевских преобразований (3) должна соответственно модифицироваться.

Анализ условия сохранения паулиевских преобразований при CPT-операции [22,23] показывает (см. детали в [16]), что CPT-инвариантность приводит к следующей связи между фазами дискретных P- и T-преобразований — η_P и η_T, вводимых согласно стандартному определению этих операций [22], и параметром паулиевских преобразований b:

$$b(1 + \eta_P^2/\eta_T^2) = 0, \quad \text{или} \quad \eta_P^2/\eta_T^2 = -1 \quad \text{при} \quad b \neq 0. \tag{4}$$

Последнее соотношение согласуется с известным условием $\eta_P^2 = -1$, $\eta_T^2 = +1$, принимаемым обычно для физических частиц [22]. Фермионы, удовлетворяющие условию $\eta_P = \pm i$, будем называть частицами инверсных А- и В-классов [24]. Однако для майорановских частиц нельзя априори исключить и возможность $\eta_P = \pm 1$, на что впервые обратил внимание Рака [25] (см. также [26, 27]). Такие фермионы мы будем относить к инверсным C- и D-классам* и рассматривать их как гипотетические частицы, для которых $\eta_P^2 = +1, \;\; \eta_T^2 = -1$.

Инверсные классы нейтральных частиц связаны с их майорановскими свойствами. Действительно, рассматривая достаточно общие условия майорановского типа

$$\psi^C(x, \zeta) = \lambda \mathrm{e}^{i\phi} \psi(x, \zeta), \tag{5а}$$

$$\psi^C(x, \zeta) = \lambda \mathrm{e}^{i\phi} \gamma_5 \psi(x, \zeta) \tag{5б}$$

(λ — действительное число, ζ — квантовые числа состояний), легко показать, что условие (5а) выполняется только для частиц инверсных A-B-классов, а условие (5б) — только для частиц C-D-классов. В современных майорановских моделях [10–13] обычно ограничиваются условием (5а), молчаливо предполагая, что исследуемые частицы принадлежат к инверсным A-B-классам. Мы, однако, не будем вводить это ограничение и будем допускать обе возможности. При этом для частиц C-D-классов общие майорановские условия должны иметь форму (5б).

§ 2. МАЙОРАНОВСКИЕ СВОЙСТВА НЕЙТРАЛЬНОГО ФЕРМИОНА

Возможное существование майорановских свойств у нейтрального фермиона было впервые продемонстрировано Э. Майораной, который исходя из уравнения Дирака показал существование у него специального решения — суперпозиции частичных и античастичных решений, удовлетворяющего условию $\psi^C(x) = \psi(x)$ [1]. С современной точки зрения он построил частное майорановское решение для простейшего случая одной частицы. Покажем, что, опираясь на паулиевские преобразования, можно обобщить этот результат и построить майорановскую модель для одного типа частиц, содержащую решения, удовлетворяющие аналогичным, но более общим майорановским условиям типа (5а), (5б), причем в такой модели возникает обобщение понятия лептонного заряда. Разовьем эту модель сначала для безмассовых частиц, а затем рассмотрим случай массивных частиц (такая модель впервые была предложена и исследована автором в [14–17].

*В литературе нет установившегося обозначения инверсных классов частиц. В настоящей работе мы придерживаемся определений монографии [24], которые, однако, противоположны обозначениям статьи [26].

Рассмотрим фермионное поле массы нуль, симметричное по отношению к преобразованиям Паули (1). В обобщенных функциях (2) лагранжиан такого поля

$$L_0(x) = -\frac{1}{2}[\overline{\Psi}(x)\gamma_\mu\partial_\mu\Psi(x)], \quad \Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi(x) \\ \gamma_5\psi^C(x) \end{pmatrix} \tag{6}$$

(волновые функции вторично квантованы). Подчеркнем, что выбранная форма обобщенной функции является универсальной, т. е. сохраняется при паулиевских преобразованиях (1). Инвариантность лагранжиана к киральным $S(\chi)$ и фазовым $S(\varphi)$ преобразованиям ведет к сохраняющимся киральному и лептонному зарядам

$$\begin{aligned} Q^{CH} &= \frac{1}{2}\int d^3x[\Psi^+(x)\gamma_5\Psi(x)] = \\ &= \frac{1}{2}\int d^3x[\psi^+(x)\gamma_5\psi(x) + \psi^{C+}(x)\gamma_5\psi^C(x)], \\ Q^L = Q^P_z &= \frac{1}{2}\int d^3x[\Psi^+(x)\hat{\kappa}_z\Psi(x)] = \\ &= \frac{1}{2}\int d^3x[\psi^+(x)\psi(x) - \psi^{C+}(x)\psi^C(x)], \end{aligned} \tag{7}$$

задающим характеристики базовых собственных функций $\Psi_0(x)$ — киральность $\rho = \pm 1$ $(L,\ R)$ и лептонный заряд $q_z = \pm 1$:

$$\begin{gathered} \gamma_5(\Psi_0)_{\rho,q_z}(x) = \rho(\Psi_0)_{\rho,q_z}(x), \quad \hat{\kappa}_z(\Psi_0)_{\rho,q_z}(x) = q_z(\Psi_0)_{\rho,q_z}(x), \\ (\Psi_0)_{\rho,q_z=+1}(x) = \begin{pmatrix} \psi_{0\rho}(x) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\Psi_0)_{\rho,q_z=-1}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma_5\psi^C_{0\rho}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho\psi^C_{0\rho}(x) \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{8}$$

Как видно из выражения (7), оператор лептонного заряда $\hat{\kappa}_z$ в пространстве паулиевских преобразований связан с вектором, направленным по оси z, причем частичное решение $q_z = +1$ и античастичное $q_z = -1$ соответствуют двум возможным проекциями этого вектора на ось z, а сохранение лептонного заряда — следствие из инвариантности лагранжиана относительно поворотов вокруг этого вектора. В паулиевской схеме этот вектор задает лептонный заряд, причем в случае безмассовых частиц ось z физически ничем не выделена.

Такая особенность паулиевской схемы позволяет ввести в ней понятие обобщенного лептонного заряда Q^P, сопоставляемого с произвольно выбранным направлением паулиевского изопространства. При этом его z-компонента сохраняет связь с лептонным зарядом Q^P_z, а x- и y-компоненты оказываются связаны с майорановскими свойствами частицы. Обобщенный лептонный заряд, получаемый из Q^P_z паулиевским преобразованием $S^+(\phi,\ \theta)$ волновой функции $\Psi_0(x)$ и оператора $\hat{\kappa}_z$, имеет вид

$$
\begin{aligned}
Q^P &= \frac{1}{2}\int d^3x \Psi^+(x)\hat{\kappa}\Psi(x) = \cos\theta Q_z^P + \sin\theta(\cos\phi Q_x^P + \sin\phi Q_y^P) = \\
&= \frac{1}{2}\int d^3x[\cos\theta(\psi^+(x)\psi(x) - \psi^{C+}(x)\psi^C(x)) + \\
&+ \sin\theta(\psi^+(x)\mathrm{e}^{-i\phi}\gamma_5\psi^C(x) + \psi^{C+}(x)\mathrm{e}^{+i\phi}\gamma_5\psi(x))], \\
\hat{\kappa} &= \cos\theta\hat{\kappa}_z + \sin\theta(\cos\phi\hat{\kappa}_x + \sin\phi\hat{\kappa}_y), \quad \Psi(x) = S^+(\phi,\ \theta)\Psi_0(x),
\end{aligned}
\tag{9}
$$

и сопоставляется с направлением κ, заданным в паулиевском изопространстве эйлеровыми углами $(\phi,\ \theta)$. Собственные функции оператора обобщенного лептонного заряда с квантовыми числами $\rho,\ q = \pm 1$ строятся из обобщенных функций $\Psi_0(x)$ (8) тем же преобразованием

$$
\begin{aligned}
\hat{\kappa}\Psi_{\rho,q}(x) = q\Psi_{\rho,q}(x), \quad \Psi_{\rho,+1}(x) = \begin{pmatrix} \psi_{\rho,+1}(x) \\ \gamma_5\psi^C_{\rho,+1}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\psi_{0\rho}(x) \\ \mathrm{e}^{i\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\psi_{0\rho}(x) \end{pmatrix}, \\
\Psi_{\rho,-1}(x) = \begin{pmatrix} \psi_{\rho,-1}(x) \\ \gamma_5\psi^C_{\rho,-1}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\rho\mathrm{e}^{-i\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\psi^C_{0\rho}(x) \\ \rho\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\psi^C_{0\rho}(x) \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{10}
$$

и описывают, соответственно, два независимых решения обобщенного заряда разных знаков $q = \pm 1$. При фиксированных значениях обобщенного заряда q между компонентами $\psi^C_{\rho,q}(x)$ и $\psi_{\rho,q}(x)$ новой системы собственных функций, сохраняющих универсальную форму (2), возникают связи, ведущие к соотношениям

$$
\begin{aligned}
\psi^C_q(x) = q\left(\mathrm{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^q \mathrm{e}^{i\phi}\gamma_5\psi_q(x), \quad q = \pm 1, \quad \psi_q(x) = \textstyle\sum_\rho \psi_{\rho,q}(x), \\
\Psi_q(x) = \textstyle\sum_\rho \Psi_{\rho,q}(x) = \begin{pmatrix} \psi_q(x) \\ \gamma_5\psi^C_q(x) \end{pmatrix}, \quad \displaystyle\int d^3x\Psi^+_q(x)\Psi_{q'}(x) = \delta_{q,q'},
\end{aligned}
\tag{11}
$$

которые суть проекционные условия, выделяющие конкретное собственное значение q и собственную функцию обобщенного лептонного заряда. Эти условия имеют вид модифицированных майорановских соотношений типа (5б) и выполняются только в том случае, когда исследуемая частица относится к инверсным C-D-классам. Последнее показывает, что выбор оператора обобщенного лептонного заряда в качестве базового согласован с определенными инверсными классами частицы.

Для описания частиц инверсных A-B-классов в качестве базового оператора следует выбирать произведение операторов обобщенного лептонного заряда и киральности. При этом обобщенную волновую функцию удобно представлять в новой универсальной форме, сохраняющейся при произвольных кирально-паулиевских преобразованиях; соответственно изменяется общая форма (3) этих преобразований:

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \begin{pmatrix}\psi_L(x) + \eta\psi_R^C(x)\\ \psi_R(x) + \eta\psi_L^C(x)\end{pmatrix},\\ \Phi'(x) &= \mathrm{e}^{i\gamma_5\chi/2}\mathrm{e}^{i\hat{\kappa}_z\gamma_5\varphi/2}\mathrm{e}^{i\eta(\cos\phi\hat{\kappa}_y - \sin\phi\hat{\kappa}_x\gamma_5)\theta/2}\Phi(x) =\\ &= S(\chi)S'(\varphi)S'(\phi,\theta)\Phi(x).\end{aligned} \tag{12}$$

В новом представлении паулиевское изопространство модифицируется: теперь оно построено на базовых векторах $\kappa_x\gamma_5, \kappa_y, \kappa_z\gamma_5$, сопоставленных осям x, y, z, что и отражается на форме паулиевских поворотов и лептонного заряда. В базовом случае, соответствующем (8), оператор лептонного заряда приобретает теперь форму $\hat{\kappa}_z\gamma_5$, а его произведение с оператором киральности описывается оператором $\hat{\kappa}_z$. Собственные функции с квантовым числом $\kappa_z = \rho q_z$ и зарядовой четностью $\eta = \pm 1$ имеют в этом представлении вид

$$\begin{aligned}\hat{\kappa}_z(\Phi_0)_{\kappa_z,\eta}(x) &= \kappa_z(\Phi_0)_{\kappa_z,\eta}(x);\\ (\Phi_0)_{\kappa_z=+1,\eta}(x) &= \begin{pmatrix}\psi_{0L}(x) + \eta\psi_{0R}^C(x)\\ 0\end{pmatrix}, \quad \psi_{0R}(x) = 0,\\ (\Phi_0)_{\kappa_z=-1,\eta}(x) &= \begin{pmatrix}0\\ \psi_{0R}(x) + \eta\psi_{0L}^C(x)\end{pmatrix}, \quad \psi_{0L}(x) = 0,\end{aligned} \tag{13}$$

а лептонный заряд в состоянии $\Phi_0(x)$ определяется соотношением

$$Q^L = Q_z^P = \int d^3x\Phi_0^+(x)\hat{\kappa}_z\gamma_5\Phi_0(x). \tag{14}$$

Функции (13) описывают два майорановских решения зарядовой четности η, построенные из левых частиц и их правых античастиц ($\kappa_z = +1$) или правых частиц и их левых античастиц ($\kappa_z = -1$). Подставляя их в (14), легко убедиться, что среднее значение лептонного заряда в этих состояниях равно нулю. Очевидно, что оператор $\hat{\kappa}_z$ может быть сопоставлен с осью z модифицированного паулиевского пространства, а майорановские решения (13) — с двумя проекциями на ось z вектора, построенного как произведение вектора лептонного заряда и киральности. В общем случае, который получается из (13) паулиевским поворотом $S'^+(\phi,\theta)$, собственные функции оператора $\hat{\kappa}$, отвечающего произведению оператора обобщенного лептонного заряда и киральности, будут следующими:

$$\hat{\kappa}\Phi_{\kappa,\eta}(x) = \kappa\Phi_{\kappa,\eta}(x),$$

$$\Phi_{+1,\eta}(x) = \begin{pmatrix} \cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)(\psi_{0L}(x) + \eta\psi^C_{0R}(x)) \\ \eta \mathrm{e}^{i\gamma_5\phi}\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)(\psi_{0L}(x) + \eta\psi^C_{0R}(x)) \end{pmatrix}, \qquad (15)$$

$$\Phi_{-1,\eta}(x) = \begin{pmatrix} -\eta \mathrm{e}^{-i\gamma_5\phi}\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)(\psi_{0R}(x) + \eta\psi^C_{0L}(x)) \\ \cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)(\psi_{0R}(x) + \eta\psi^C_{0L}(x)) \end{pmatrix},$$

а соответствующий обобщенный лептонный заряд

$$Q^P(\kappa) = \int d^3x\Phi^+_{\kappa,\eta}(x)\hat{\kappa}\gamma_5\Phi_{\kappa,\eta}(x),$$
$$\hat{\kappa}\gamma_5 = \cos\theta\hat{\kappa}_z\gamma_5 + \eta\sin\theta(\cos\phi\hat{\kappa}_x\gamma_5 + \sin\phi\hat{\kappa}_y). \qquad (16)$$

Эти выражения описывают пару майорановских решений $\kappa = \pm 1$ в прежней системе собственных функций. Очевидно, что в состояниях с фиксированным квантовым числом κ среднее значение обобщенного заряда обращается в нуль и в общем случае. При фиксированных значениях κ между отдельными киральными компонентами $\psi_{\rho,\kappa}(x)$ и $\psi^C_{\rho,\kappa}(x)$, входящими в универсальную форму (12) обобщенной функции, возникают связи

$$\Phi_{\kappa,\eta}(x) = \begin{pmatrix} \psi_{L\kappa}(x) + \eta\psi^C_{R\kappa}(x) \\ \psi_{R\kappa}(x) + \eta\psi^C_{L\kappa}(x) \end{pmatrix},$$
$$\psi^C_{\rho,\kappa}(x) = \kappa\left(\mathrm{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{\rho\kappa}\mathrm{e}^{i\phi}\psi_{\rho,\kappa}(x), \quad \rho = \pm 1 \ (L,\ R), \qquad (17)$$

имеющие вид обобщенных майорановских условий типа (5а). Как и в случае (11), это проекционные условия, выделяющие определенные собственные значения оператора $\hat{\kappa}$, однако теперь они соответствуют случаю, когда рассматриваемые частицы относятся к инверсным A-B-классам.

Таким образом, в общем случае паулиевской схемы выбор базовых операторов для описания собственных функций состояний оказывается непосредственно связан с инверсными классами исследуемых частиц: для частиц инверсных C-D-классов в этом качестве должен выбираться оператор обобщенного лептонного заряда, для частиц инверсных A-B-классов — его произведение с оператором киральности. При этом проекционные условия, выделяющие фиксированные собственные состояния базового оператора, имеют вид общих майорановских условий типа (5а) или (5б). Хотя этот вывод сделан пока на основе исследования случая безмассовых частиц, он, как будет показано ниже, остается справедливым (за определенным исключением) и для частиц отличной от нуля массы.

Перейдем к описанию массивных частиц и сформулируем общую идеологию подхода в этом случае. Согласно представлениям Стандартной модели масса частиц определяется вакуумным средним хиггсовского поля, возникающим при спонтанном нарушении базовой симметрии, предполагаемой для этих частиц, когда их масса равна нулю. Введение массовых членов в лагранжиан (6), симметричный паулиевским преобразованиям (1), связано с нарушением этой симметрии. Можно предположить, что в исследуемой модели роль такой базовой симметрии играет паулиевская.

На примере дираковского частного случая можно убедиться, что это нарушение ведет к появлению в киральном и паулиевском подпространствах выделенных направлений. Если механизм нарушения универсален, то хиггсовские вакуумные средние, отвечающие разным выделенным направлениям, остаются связаны между собой после нарушения теми же преобразованиями, что и сами направления. Беря за основу дираковский случай, где механизм образования массы известен, можно таким образом построить массовые слагаемые лагранжианов исследуемой модели общего вида, включающие как дираковские, так и майорановские члены. В итоге возникает паулиевская схема для массивных свободных частиц, в основных чертах совпадающая со стандартной феноменологической, принятой в современных майорановских моделях [8–13], и являющаяся ее частным случаем, которая, однако, имеет ряд важных особенностей, связанных с тем, что она основана на паулиевских преобразованиях. Изложим эту схему (детали см. в [15–16]).

Начнем с дираковского случая и опишем его в представлении обобщенных функций (12). Лагранжиан дираковского типа, соответствующий ему лептонный заряд и дираковское уравнение имеют в этом представлении вид

$$
\begin{gathered}
L(x) = L_0(x) - \frac{M}{2}\overline{\Phi}_D(x)\hat{\kappa}_x\Phi_D(x), \\
Q^L = Q_z^P = \frac{1}{2}\int d^3x\Phi_D^+(x)\hat{\kappa}_z\gamma_5\Phi_D(x), \qquad (18) \\
(\gamma_\mu\partial_\mu + M\hat{\kappa}_x)\Phi_D(x) = 0, \quad \Phi_D(x) = \begin{pmatrix} \psi_{DL}(x) + \eta\psi_{DR}^C(x) \\ \psi_{DR}(x) + \eta\psi_{DL}^C(x) \end{pmatrix}.
\end{gathered}
$$

Как видно из этих выражений, инвариантность дираковского лагранжиана к киральной группе и к группе чисто паулиевских преобразований нарушена. Источником нарушений является массовое слагаемое лагранжиана, которое, однако, не нарушает инвариантность к фазовой подгруппе паулиевских поворотов вокруг оси z, с которой связан сохраняющийся лептонный заряд $Q^L = Q_z^P$. Выражение лептонного заряда через обобщенные дираковские функции $\Phi_D(x)$ аналогично (14) для фермионов массы нуль и, следовательно, не зависит от механизма нарушения, вводящего массу. В выбранном представлении оператор лептонного заряда сопоставляется с осью z паулиевского изопространства, а оператор, определяющий структуру массового члена, с осью x.

Таким образом, в дираковском случае в представлении обобщенных функций (12) спонтанное нарушение симметрии, вводящее массу, приводит к появлению в паулиевском изопространстве двух выделенных направлений: направления x, с которым сопоставлен оператор, задающий структуру массового члена, и оси z паулиевских поворотов, ответственной за существование сохраняющегося лептонного заряда.

Легко убедиться, что массовый член дираковского лагранжиана нечувствителен к инверсному классу частиц. По этой причине в дираковском случае возникает возможность альтернативного выбора базового оператора представления собственных функций решений: оператора лептонного заряда либо его произведения с оператором киральности, последний оказывается связан с оператором структуры массового слагаемого лагранжиана.

Представление (18) отвечает выбору в этом качестве оператора лептонного заряда. Собственные функции заряда $q_z = \pm 1$ имеют в нем следующую форму:

$$
\begin{gathered}
\hat{\kappa}_z \gamma_5 \Phi_{D,q_z}(x) = q_z \Phi_{D,q_z}(x), \quad \Phi_{D,q_z=+1}(x) = \begin{pmatrix} \psi_{DL}(x) \\ \psi_{DR}(x) \end{pmatrix}, \\
\Phi_{D,q_z=-1}(x) = \begin{pmatrix} \eta\psi^C_{DR}(x) \\ \eta\psi^C_{DL}(x) \end{pmatrix}, \quad \int d^3x \Phi^+_{D,q_z}(x) \Phi_{D,q'_z(x)} = \delta_{q_z,q'_z}.
\end{gathered} \tag{19}
$$

Такое представление решений эквивалентно обычному описанию частицы как «дираковской» («дираковское нейтрино»), частичное и античастичное состояния которой различаются значением лептонного заряда. Альтернативное представление возникает из (18) при паулиевском повороте $S'^+(\phi = 0, \theta = -\eta\pi/2)$ волновой функции $\Phi_D(x)$. При этом дираковский лагранжиан, уравнения и лептонный заряд преобразуются к форме

$$
\begin{gathered}
L(x) = L_0(x) - \frac{M}{2} \overline{\Phi}_{MD}(x) \hat{\kappa}_z \Phi_{MD}(x), \quad (\gamma_\mu \partial_\mu + M\hat{\kappa}_z) \Phi_{MD}(x) = 0, \\
Q^P = -\frac{1}{2} \int d^3x \Phi^+_{MD}(x) \hat{\kappa}_x \gamma_5 \Phi_{MD}(x), \\
\Phi_{MD}(x) = \mathrm{e}^{i\hat{\kappa}_y \pi/4} \Phi_D(x) = \\
= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \psi_{DL}(x) + \psi_{DR}(x) + \eta\psi^C_{DR}(x) + \eta\psi^C_{DL}(x)) \\ \psi_{DR}(x) - \psi_{DL}(x) + \eta\psi^C_{DL}(x) - \eta\psi^C_{DR}(x)) \end{pmatrix},
\end{gathered} \tag{20}
$$

причем базовый оператор $\hat{\kappa}_z$, задающий в этом представлении структуру массового слагаемого, совпадает с произведением базового оператора зарядового представления (18) $(\hat{\kappa}_z\gamma_5)$ и оператора киральности (γ_5) и сопоставлен с осью z. Его собственные функции с определенными значениями $\kappa_z = \pm 1,\ \eta = \pm 1$ имеют вид

$$\hat{\kappa}_z(\Phi_{MD})_{\kappa_z,\eta}(x) = \kappa_z(\Phi_{MD})_{\kappa_z,\eta}(x);$$

$$(\Phi_{MD})_{+1,\eta}(x) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\psi_D(x)+\eta\psi_D^C(x)\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\psi_{DL}(x)+\eta\psi_{DR}^C(x)\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\psi_{MD1}(x)\\ 0\end{pmatrix},$$

$$\psi_{DL(R)}^C(x) = \eta\psi_{DL(R)}(x), \tag{21}$$

$$(\Phi_{MD})_{-1,\eta}(x) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\ -\gamma_5(\psi_D(x)-\eta\psi_D^C(x))\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \psi_{DR}(x)+\eta\psi_{DL}^C(x)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \psi_{MD2}(x)\end{pmatrix},$$

$$\psi_{DL(R)}^C(x) = -\eta\psi_{DL(R)}(x),$$

и могут интерпретироваться как две независимые майорановские частицы $\psi_{MD1}(x),\ \psi_{MD2}(x)$. Они образуют полный набор решений, аналогичный паре частица–античастица, так что каждое из этих решений можно представить как суперпозицию последних и обратно. (Отметим, что выражения (21) отвечают вторично квантованной форме, а нормировка собственных функций по сравнению с (20) при учете дополнительных майорановских условий меняется). Собственные значения различают майорановские решения: $\kappa_z = +1$ зарядовой четности η, выделяемое проекционным условием $\psi_D^C(x) = \eta\psi_D(x)$, и $\kappa_z = -1$ той же зарядовой четности, выделяемое условием $\psi_D^C(x) = -\eta\psi_D(x)$, причем для каждого из них среднее значение лептонного заряда равно нулю. Отвечающие такому представлению решения известны как «майорановские» («майорановское нейтрино»), первое из них (при $\eta = +1$) было впервые построено Майораной в работе [1].

Итак, в дираковском случае существуют два альтернативных представления решений, связанных с различным выбором выделенных направлений паулиевского изопространства, возникающих при спонтанном нарушении симметрии, ответственном за образование массы. В зарядовом («дираковском») представлении лептонный заряд связан с вектором, направленным по оси z, а массовое слагаемое — с вектором по оси x. В «майорановском» (массовом) представлении ситуация обратная: с осью z сопоставлен вектор, связанный с оператором структуры массового слагаемого лагранжиана, а лептонный заряд — с осью x. Связывающее их паулиевское преобразование есть поворот вокруг оси y на угол $\pi/2$. В силу независимости дираковского лагранжиана от инверсного класса частиц для описания как физических частиц инверсных A-B-классов, так и гипотетических частиц инверсных C-D-классов могут использоваться оба представления.

В отличие от дираковского в общем случае паулиевской схемы выбор базового оператора представления существенно связан с инверсным классом частиц. В обычной записи наиболее общая форма лагранжиана паулиевской модели и его обобщенного заряда следующие:

$$
\begin{gathered}
L(x) = L_0(x) - \frac{M}{2}\{\cos\theta(\mathrm{e}^{+i\chi}\overline{\psi}_R(x)\psi_L(x) + \mathrm{e}^{+i\chi}\overline{\psi}_L^{GC}(x)\psi_R^{GC}(x)+ \\
+\mathrm{e}^{-i\chi}\overline{\psi}_L(x)\psi_R(x) + \mathrm{e}^{-i\chi}\overline{\psi}_R^{GC}(x)\psi_L^{GC}(x)) + \sin\theta(\overline{\psi}_R(x)\psi_L^{GC}(x)+ \\
+\overline{\psi}_L^{GC}(x)\psi_R(x) - \overline{\psi}_R^{GC}(x)\psi_L(x) - \overline{\psi}_L(x)\psi_R^{GC}(x))\}, \\
Q^P = \frac{1}{2}\int d^3x[\cos\theta(\psi_L^{+}(x)\psi_L(x) - \psi_L^{GC+}(x)\psi_L^{GC}(x)+ \\
+\psi_R^{+}(x)\psi_R(x) - \psi_R^{GC+}(x)\psi_R^{GC}(x)) + \sin\theta(\psi_L^{+}(x)\mathrm{e}^{-i\chi}\psi_L^{GC}(x)+ \\
+\psi_L^{GC+}(x)\mathrm{e}^{+i\chi}\psi_L(x) - \psi_R^{+}(x)\mathrm{e}^{i\chi}\psi_R^{GC}(x) - \psi_R^{GC+}(x)\mathrm{e}^{-i\chi}\psi_R(x))], \\
(\psi_L(x))^{GC} = \psi_R^{GC}(x) = \mathrm{e}^{-i(\chi+\phi)}\psi_R^{C}(x), \\
(\psi_R(x))^{GC} = \psi_L^{GC}(x) = \mathrm{e}^{+i(\chi-\phi)}\psi_L^{C}(x),
\end{gathered}
\tag{22}
$$

где последними соотношениями вводятся обозначения, связанные с новой дискретной операцией обобщенного зарядового сопряжения (GC-сопряжения). Действительно, легко убедиться, что лагранжиан (22) паулиевской схемы инвариантен по отношению к преобразованию

$$
\psi_L(x) \leftrightarrow \psi_R^{GC}(x), \quad \psi_R(x) \leftrightarrow \psi_L^{GC}(x), \tag{23}
$$

которое меняет знак его обобщенного заряда Q^P. В определение операции обобщенного зарядового GC-сопряжения входят два фазовых фактора: универсальный, зависящий от угла ϕ, введение которого эквивалентно введению общего фазового сомножителя $\eta_C = \mathrm{e}^{-i\phi}$ в определение стандартного зарядового сопряжения (1), и дополнительный, зависящий от киральных характеристик частицы, появление которого является особенностью исследуемой паулиевской схемы. Последний учитывает, что фазовый фактор η_C у левых и правых частиц принципиально может быть различным. Как показывает сопоставление общего паулиевского лагранжиана (22) с существующими майорановскими моделями [10–12, 29], это различие связывается здесь с нарушением CP-четности.

Отметим особенность массовых слагаемых общего лагранжиана и обобщенного заряда (22), характерную для исследуемой модели: их дираковские части (пропорциональные $\cos\theta$) являются скалярными по отношению к операции пространственного отражения независимо от инверсных классов описываемых частиц. Однако аналогичные свойства их майорановских членов (пропорциональных $\sin\theta$) существенно зависят от последних: для частиц инверсных C-D-классов майорановские слагаемые — скаляры, но для частиц A-B-классов часть из них является скалярами, а другая — псевдоскалярами. Это обстоятельство приводит к тому, что выбор базового оператора представления, в котором описываются собственные функции частиц, в общем случае оказывается зависимым от их инверсного класса.

При переходе от дираковского случая (18) к общей форме зарядового представления с обобщенным лептонным зарядом в качестве базового оператора лагранжиан и обобщенный заряд приобретают вид

$$\begin{gathered} L(x) = L_0(x) - \frac{M}{2}\overline{\Phi}^{GC}(x)\times \\ \times[\cos\theta(\cos\chi\hat{\kappa}_x + \sin\chi\hat{\kappa}_y) - \eta\sin\theta\hat{\kappa}_z]\Phi^{GC}(x), \\ Q^P = \frac{1}{2}\int d^3x\Phi^{GC+}(x)\times \\ \times[\cos\theta\hat{\kappa}_z + \eta\sin\theta(\cos\chi\hat{\kappa}_x + \sin\chi\hat{\kappa}_y)]\gamma_5\Phi^{GC}(x). \end{gathered} \tag{24}$$

Входящие в эти выражения GC-функции соответствуют форме (12), в которой операция C-сопряжения заменена операцией зарядового GC-сопряжения, и имеют свой закон паулиевских преобразований

$$\begin{gathered} \Phi^{GC}(x) = \begin{pmatrix} \psi_L(x) + \eta\psi_R^{GC}(x) \\ \psi_R(x) + \eta\psi_L^{GC}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_L(x) + \eta\mathrm{e}^{-i(\chi+\phi)}\psi_R^C(x) \\ \psi_R(x) + \eta\mathrm{e}^{+i(\chi-\phi)}\psi_L^C(x) \end{pmatrix}, \\ \Phi'^{GC}(x) = \mathrm{e}^{i\eta(\cos\chi\hat{\kappa}_y - \sin\chi\hat{\kappa}_x)\theta/2}\mathrm{e}^{i\hat{\kappa}_z\gamma_5\varphi/2}\mathrm{e}^{i\gamma_5\chi/2}\Phi^{GC}(x) = \\ = S'(\chi,\theta)S'(\varphi)S(\chi)\Phi^{GC}(x). \end{gathered} \tag{25}$$

Существенно, что при использовании GC-функций величины, входящие в (24), вновь оказывается возможным интерпретировать как векторы в базовом паулиевском изопространстве, построенном на векторах $\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z$, ассоциируемых с осями x, y, z. При этом выражения (24) включают только углы χ и θ, а угол ϕ, введенный в определение обобщенной GC-функции, в них в явной форме уже не присутствует.

Собственные функции обобщенного лептонного заряда, возникающие из дираковских (19) при общем паулиевском преобразовании, получают вид

$$
\begin{gathered}
[\cos\theta\hat{\kappa}_z + \eta\sin\theta(\cos\chi\hat{\kappa}_x + \sin\chi\hat{\kappa}_y)]\gamma_5\Phi_q(x) = q\Phi_q(x), \\
\Phi_q^{GC}(x) = S'^{+}(\chi,\theta)\mathrm{e}^{-i\hat{\kappa}_z\chi/2}\Phi_{D,q_z}(x), \quad q = q_z, \\
\Phi_{q=+1}^{GC}(x) = \begin{pmatrix} \psi_L(x) + \eta\psi_R^{GC}(x) \\ \psi_R(x) + \eta\psi_L^{GC}(x) \end{pmatrix}_{q=+1} = \\
= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-i\chi/2}\cos(\theta/2)\psi_{DL}(x) - \eta\mathrm{e}^{-i\chi/2}\sin(\theta/2)\psi_{DR}(x) \\ \mathrm{e}^{+i\chi/2}\cos(\theta/2)\psi_{DR}(x) + \eta\mathrm{e}^{+i\chi/2}\sin(\theta/2)\psi_{DL}(x) \end{pmatrix}, \qquad (26) \\
\Phi_{q=-1}^{GC}(x) = \begin{pmatrix} \psi_L(x) + \eta\psi_R^{GC}(x) \\ \psi_R(x) + \eta\psi_L^{GC}(x) \end{pmatrix}_{q=-1} = \\
= \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{-i\chi/2}\sin(\theta/2)\psi_{DL}^C(x) + \eta\mathrm{e}^{-i\chi/2}\cos(\theta/2)\psi_{DR}^C(x) \\ \mathrm{e}^{+i\chi/2}\sin(\theta/2)\psi_{DR}^C(x) + \eta\mathrm{e}^{+i\chi/2}\cos(\theta/2)\psi_{DL}^C(x) \end{pmatrix}.
\end{gathered}
$$

Как следует из этих соотношений, для отдельных компонент собственных функций обобщенного лептонного заряда с квантовыми числами $q = \pm 1$ выполняются модифицированные проекционные майорановские условия, характерные для частиц инверсных C-D-классов:

$$
\psi_q^C(x) = \textstyle\sum_\rho \psi_{q,\rho}^C(x) = q(\mathrm{tg}(\theta/2))^q\mathrm{e}^{i\phi}\gamma_5\psi_q(x). \qquad (27)
$$

Иная ситуация возникает при обобщении представления майорановского типа (20), когда в качестве базового выбирается оператор структуры массового слагаемого лагранжиана. Теперь общий лагранжиан и заряд в терминах GC-функций приобретают вид

$$
\begin{gathered}
L(x) = L_0(x) - \frac{M}{2}\overline{\Phi}_M^{GC}(x)[\cos\theta\hat{\kappa}_z + \eta\sin\theta(\cos\chi\hat{\kappa}_x + \sin\chi\hat{\kappa}_y)]\Phi_M^{GC}(x), \\
Q^P = -\frac{1}{2}\int d^3x\Phi_M^{GC+}(x)[\cos\theta(\cos\chi\hat{\kappa}_x + \sin\chi\hat{\kappa}_y) - \eta\sin\theta\hat{\kappa}_z]\gamma_5\Phi_M^{GC}(x), \\
\Phi_M^{GC}(x) = \mathrm{e}^{i(\cos\chi\hat{\kappa}_y - \sin\chi\hat{\kappa}_x)\pi/4}\Phi^{GC}(x) = \qquad (28) \\
= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \psi_L(x) + \mathrm{e}^{-i\chi}\psi_R(x) + \eta\psi_R^{GC}(x) + \eta\mathrm{e}^{-i\chi}\psi_L^{GC}(x) \\ \psi_R(x) - \mathrm{e}^{+i\chi}\psi_L(x) + \eta\psi_L^{GC}(x) - \eta\mathrm{e}^{i\chi}\psi_R^{GC}(x) \end{pmatrix}.
\end{gathered}
$$

Соответствующие им собственные функции оператора структуры массового слагаемого в общем случае

$$[\cos\theta\hat{\kappa}_z + \eta\sin\theta(\cos\chi\hat{\kappa}_x + \sin\chi\hat{\kappa}_y)]\Phi^{GC}_{M\kappa}(x) = \kappa\Phi^{GC}_{M\kappa}(x),$$

$$\Phi^{GC}_{M\kappa=+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\psi_L(x) + \mathrm{e}^{-i\chi}\psi_R(x) + \eta\psi^{GC}_R(x) + \eta\mathrm{e}^{-i\chi}\psi^{GC}_L(x)\\ \psi_R(x) - \mathrm{e}^{+i\chi}\psi_L(x) + \eta\psi^{GC}_L(x) - \eta\mathrm{e}^{i\chi}\psi^{GC}_R(x)\end{pmatrix}_{\kappa=+1} =$$

$$= \begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-i\chi/2}\cos{(\theta/2)}(\psi_{DL}(x) + \psi_{DR}(x))\\ \mathrm{e}^{+i\chi/2}\eta\sin{(\theta/2)}(\psi_{DL}(x) + \psi_{DR}(x))\end{pmatrix}, \tag{29}$$

$$\Phi^{GC}_{M\kappa=-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\psi_L(x) + \mathrm{e}^{-i\chi}\psi_R(x) + \eta\psi^{GC}_R(x) + \eta\mathrm{e}^{-i\chi}\psi^{GC}_L(x)\\ \psi_R(x) - \mathrm{e}^{+i\chi}\psi_L(x) + \eta\psi^{GC}_L(x) - \eta\mathrm{e}^{i\chi}\psi^{GC}_R(x)\end{pmatrix}_{\kappa=-1} =$$

$$= \begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-i\chi/2}\eta\sin{(\theta/2)}(\psi_{DL}(x) - \psi_{DR}(x))\\ \mathrm{e}^{+i\chi/2}\cos{(\theta/2)}(\psi_{DR}(x) - \psi_{DL}(x))\end{pmatrix},$$

причем входящие в выражения $\Phi^{GC}_{M\kappa}(x)$ функции удовлетворяют проекционным условиям, приводящим к майорановским соотношениям, не зависящим от кирального угла и характерным для частиц инверсных A-B-классов:

$$\begin{gathered}\psi^C_{\kappa,L}(x) = \kappa\eta\left(\mathrm{tg}\left(\eta\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)^{\kappa}\mathrm{e}^{i\phi}\psi_{\kappa,L}(x),\\ \psi^C_{\kappa,R}(x) = \kappa\eta\left(\mathrm{ctg}\left(\eta\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)^{\kappa}\mathrm{e}^{i\phi}\psi_{\kappa,R}(x),\\ \psi^C_{\kappa,\rho}(x) = \kappa\eta\left(\mathrm{tg}\left(\eta\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)^{\kappa\rho}\mathrm{e}^{i\phi}\psi_{\kappa,\rho}(x),\quad \rho = \pm1(L,\ R).\end{gathered} \tag{30}$$

Представления (24) и (28) являются, таким образом, двумя возможными общими формами описания частиц исследуемой модели, причем выбор базового оператора представления, а тем самым формы (24) или (28), определяется инверсным классом частиц. Для частиц A-B-классов (физических) это оператор, задающий структуру массового слагаемого лагранжиана, для частиц C-D-классов (гипотетических) это оператор обобщенного заряда. Легко убедиться, что первый (в своем базовом представлении) можно представить как произведение второго (в своем представлении) и оператора киральности. Использование в общих формах (24) и (28) GC-функций позволяет интерпретировать эти операторы в терминах векторов паулиевского изопространства, построенного на $\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z$, связываемых соответственно с осями x, y, z. При этом паулиевские преобразования интерпретируются как повороты, зависящие от угла θ, вводящего в лагранжиан и в обобщенный заряд (22) майорановские слагаемые, и угла χ, описывающего киральные преобразования и вводящего нарушение CP-четности.

Сопоставление общей формы паулиевского лагранжиана с существующими майорановскими моделями [11, 12–29] показывает, что он отвечает специальному случаю системы, включающей левые и правые частицы одного флейвора с равными по величине, но противоположными по знаку правыми и левыми майорановскими массами $M_R = -M_L = M \sin\theta \mathrm{e}^{i\chi}$ и комплексной дираковской массой $M_D = M \cos\theta \mathrm{e}^{i\chi}$. Величина $M^2 = |M_{L(R)}|^2 + |M_D|^2$ есть инвариант группы общих паулиевских (кирально-паулиевских) преобразований.

Таким образом, использование паулиевских преобразований в качестве теоретической базы описания нейтральной частицы приводит к майорановской модели специального вида, в рамках которой общая майорановская схема редуцируется к случаю, отвечающему равным и противоположным по знаку левой и правой майорановским массам при произвольной дираковской. Вместе с тем в такой модели, в отличие от общих феноменологических схем, возникает возможность обобщить понятие лептонного заряда и связать его с формой массового члена лагранжиана, причем собственные функции оператора обобщенного лептонного заряда и оператора структуры массового слагаемого могут использоваться для описания произвольных как дираковских, так и майорановских состояний паулиевской модели. При этом проекционные условия для собственных функций базовых операторов имеют форму майорановских соотношений, общий вид которых определяется инверсным классом исследуемых частиц.

Исключением из общего правила является дираковский случай, где в силу независимости формы лагранжиана от инверсного класса частиц существуют два альтернативных представления решений: как собственных функций оператора лептонного заряда или оператора, задающего структуру массового слагаемого лагранжиана. Эта альтернатива отвечает известным дираковскому и майорановскому представлениям решений. Модель описывается в изопространстве кирально-паулиевских преобразований, причем базовые операторы, задающие конкретные представления, имеют свойства векторов этого пространства.

§ 3. ДВУХФЛЕЙВОРНАЯ МОДЕЛЬ МАЙОРАНОВСКИХ НЕЙТРИНО

Используем полученные результаты для построения модели, включающей два типа нейтрино разного флейвора, предполагая для определенности, что они относятся к электронному (e) и мюонному (μ) типам. Предположим, что в первом случае частицами являются левые состояния (ν_{eL}), а их античастицами — правые (ν^C_{eR}), а во втором частицами являются правые состояния

($\nu_{\mu R}$), а их античастицами — левые ($\nu^C_{\mu L}$). Установим соответствие такой модели с моделью, развитой в § 2, проводя в последней замены:

$$\begin{aligned} &\psi_L(x) \to \nu_{eL}(x), \quad \psi_R(x) \to \nu_{\mu R}(x), \\ &\psi^C_R(x) \to \nu^C_{eR}(x), \quad \psi^C_L(x) \to \nu^C_{\mu L}(x). \end{aligned} \tag{31}$$

Такая схема — аналог схемы Зельдовича–Конопинского–Махмуда (ЗКМ-схемы) [31, 32], предложенной ими для описания заряженных e^--, μ^+-лептонов, для нейтрино такие схемы рассматривались, например, в [10].

Согласно общим результатам Паули [18] такая модель при нулевых массах нейтрино инвариантна к кирально-паулиевским преобразованиям

$$\begin{aligned} \nu'_{eL}(x) &= \mathrm{e}^{i\chi/2}\mathrm{e}^{i\varphi/2}[\cos(\theta/2)\nu_{eL}(x) + \sin(\theta/2)\mathrm{e}^{-i\phi}\nu^C_{\mu L}(x)], \\ \nu'_{\mu R}(x) &= \mathrm{e}^{-i\chi/2}\mathrm{e}^{i\varphi/2}[\cos(\theta/2)\nu_{\mu R}(x) - \sin(\theta/2)\mathrm{e}^{-i\phi}\nu^C_{eR}(x)], \\ \nu' C_{eR}(x) &= \mathrm{e}^{-i\chi/2}\mathrm{e}^{-i\varphi/2}[\cos(\theta/2)\nu^C_{eR}(x) + \sin(\theta/2)\mathrm{e}^{+i\phi}\nu_{\mu R}(x)], \\ \nu' C_{\mu L}(x) &= \mathrm{e}^{i\chi/2}\mathrm{e}^{-i\varphi/2}[\cos(\theta/2)\nu^C_{\mu L}(x) - \sin(\theta/2)\mathrm{e}^{+i\phi}\nu_{eL}(x)]. \end{aligned} \tag{32}$$

Такие преобразования являются каноническими и в данном случае смешивают между собой электронные и мюонные состояния частичного и античастичного типов общей киральности, сохраняя коммутационные соотношения квантовых безмассовых нейтринных полей.

Переход к двухфлейворной схеме заменами (31) одновременно ведет к трансформации стандартных определений дискретных C-, P-, T-преобразований [22] к следующей форме:

$$\begin{aligned} &[\nu_{eL}(x)]^C = \nu^C_{eR}(x), \quad [\nu_{\mu R}(x)]^C = \nu^C_{\mu L}(x), \\ &[\nu_{eL}(Px)]^{(P)} = \eta_P\gamma_4\nu_{\mu R}(x), \quad [\nu_{\mu R}(Px)]^{(P)} = \eta_P\gamma_4\nu_{eL}(x), \\ &[\nu_{eL}(Tx)]^{(T)} = -\eta_T\gamma_2\overline{\nu}^T_{eL}(x), \quad [\nu_{\mu R}(Tx)]^{(T)} = +\eta_T\gamma_2\overline{\nu}^T_{\mu R}(x), \\ &P\mathbf{x} = -\mathbf{x},\ Px_4 = x_4, \quad T\mathbf{x} = \mathbf{x},\ Tx_4 = -x_4. \end{aligned} \tag{33}$$

В рамках этих определений результаты исследованной выше модели, связанные со свойствами инверсных классов частиц, остаются при заменах (31) в силе в двухфлейворной нейтринной схеме.

Наиболее общая форма лагранжиана двухфлейворной модели для случая массивных нейтрино, получаемая из (22) заменами (31), имеет вид

$$
\begin{gathered}
L(x) = L_0(x) - \frac{M}{2}\{\cos\theta(\overline{\nu}_{\mu R}(x)\mathrm{e}^{+i\chi}\nu_{eL}(x) + \overline{\nu}^C_{\mu L}(x)\mathrm{e}^{-i\chi}\nu^C_{eR}(x)+ \\
+\overline{\nu}_{eL}(x)\mathrm{e}^{-i\chi}\nu_{\mu R}(x) + \overline{\nu}^C_{eR}(x)\mathrm{e}^{+i\chi}\nu^C_{\mu L}(x)) + \sin\theta(\overline{\nu}_{\mu R}(x)\mathrm{e}^{+i(\chi-\phi)}\nu^C_{\mu L}(x)+ \\
+\overline{\nu}^C_{\mu L}(x)\mathrm{e}^{-i(\chi-\phi)}\nu_{\mu R}(x) - \overline{\nu}^C_{eR}(x)\mathrm{e}^{+i(\chi+\phi)}\nu_{eL}(x) - \overline{\nu}_{eL}(x)\mathrm{e}^{-i(\chi+\phi)}\nu^C_{eR}(x))\} = \\
= L_0(x) - \frac{M}{2}\{\cos\theta(\overline{\nu}_{\mu R}(x)\mathrm{e}^{+i\chi}\nu_{eL}(x) + \overline{\nu}^{GC}_{\mu L}(x)\mathrm{e}^{+i\chi}\nu^{GC}_{eR}(x)+ \\
+\overline{\nu}_{eL}(x)\mathrm{e}^{-i\chi}\nu_{\mu R}(x) + \overline{\nu}^{GC}_{eR}(x)\mathrm{e}^{-i\chi}\nu^{GC}_{\mu L}(x)) + \sin\theta(\overline{\nu}_{\mu R}(x)\nu^{GC}_{\mu L}(x)+ \\
+\overline{\nu}^{GC}_{\mu L}(x)\nu_{\mu R}(x) - \overline{\nu}^{GC}_{eR}(x)\nu_{eL}(x) - \overline{\nu}_{eL}(x)\nu^{GC}_{eR}(x))\}, \\
(\nu_{eL}(x))^{GC} = \nu^{GC}_{eR}(x) = \mathrm{e}^{-i(\chi+\phi)}\nu^C_{eR}(x), \\
(\nu_{\mu R}(x))^{GC} = \nu^{GC}_{\mu L}(x) = \mathrm{e}^{+i(\chi-\phi)}\nu^C_{\mu L}(x).
\end{gathered} \tag{34}
$$

Особенностью паулиевской нейтринной схемы является существование в ней сохраняющегося обобщенного лептонного заряда, который для лагранжиана (34) имеет вид

$$
\begin{gathered}
Q^P = \frac{1}{2}\int d^3x[\cos\theta(\nu^+_{eL}(x)\nu_{eL}(x) - -\nu^{GC+}_{\mu L}(x)\nu^{GC}_{\mu L}(x) + \nu^+_{\mu R}(x)\nu_{\mu R}(x)- \\
- \nu^{GC+}_{eR}(x)\nu^{GC}_{eR}(x)) + \sin\theta(\nu^+_{eL}(x)\mathrm{e}^{-i\chi}\nu^{GC}_{\mu L}(x) + \nu^{GC+}_{\mu L}(x)\mathrm{e}^{+i\chi}\nu_{eL}(x)- \\
- \nu^+_{\mu R}(x)\mathrm{e}^{+i\chi}\nu^{GC}_{eR}(x) - -\nu^{GC+}_{eR}(x)\mathrm{e}^{-i\chi}\nu_{\mu R}(x))].
\end{gathered} \tag{35}
$$

Другое важное ее свойство — инвариантность лагранжиана (34) при преобразовании

$$
\begin{aligned}
\nu_{eL}(x) \to (\nu_{eL}(x))^{GC}, \quad \nu^{GC}_{eR}(x) \to \nu_{eL}(x), \\
\nu_{\mu R}(x) \to (\nu_{\mu R}(x))^{GC}, \quad \nu^{GC}_{\mu L}(x) \to \nu_{\mu R}(x),
\end{aligned} \tag{36}
$$

меняющем знак обобщенного лептонного заряда (35), что эквивалентно обобщенному зарядовому GC-сопряжению (23) предшествующей модели. В данном случае оно переводит электронные (левые) и мюонные (правые) нейтрино в их собственные античастицы с учетом того, что фазовые факторы, входящие в определение обобщенного зарядового сопряжения, для электронного и мюонного флейвора могут быть различными. Последнее учитывается введением кирального угла $\chi \neq 0$. При этом в паулиевской модели, как подчеркивалось в связи с введением операции GC-сопряжения (см. дискуссию после (23)), такое различие связывается с CP-нарушением.

Лагранжиан (34) описывает частный случай двухфлейворной майорановской нейтринной системы ЗКМ-типа, включающей левое электронное нейтрино с майорановской массой $M_L(\nu_e)$ и правое мюонное нейтрино с майорановской массой $M_R(\nu_\mu)$, причем в силу паулиевского характера схемы они связаны соотношением $M_R(\nu_\mu) = -M_L(\nu_e) = M\sin\theta$. Эти два типа нейтрино могут смешиваться между собой, что описывается массовыми слагаемыми лагранжиана «квазидираковского» типа, зависящими от параметра $M_D(\nu_\mu\nu_e) = M\cos\theta \mathrm{e}^{i\chi}$. При этом эффективные массы базовых, несмешивающихся нейтринных электронного и мюонного состояний, возникающие при диагонализации лагранжиана (34), равны и противоположны по знаку:

$$M(\nu_1,\nu_2) = \mp\sqrt{\frac{1}{4}(M_R(\nu_\mu) - M_L(\nu_e))^2 + |M_D(\nu_\mu\nu_e)|^2} = \mp M, \qquad (37)$$

так что длина нейтринных осцилляций между ними равна бесконечности. Угол смешивания θ_{mix}, вводимый стандартно [11–12, 28], задается отношением «квазидираковских» и майорановских масс:

$$\text{tg }(2\theta_{\text{mix}}) = \text{ctg }\theta = \frac{2|M_D(\nu_\mu\nu_e)|}{M_R(\nu_\mu) - M_L(\nu_e)} = \frac{|M_D(\nu_\mu\nu_e)|}{M_R(\nu_\mu)}. \qquad (38)$$

Очевидно, что среди лагранжианов вида (34) всегда можно выделить один или несколько основных, получая из них остальные с помощью подходящих паулиевских (кирально-паулиевских) преобразований. В модели одного типа частиц это дираковский лагранжиан, на базе которого в § 2 были введены два основных представления собственных функций — зарядовое и майорановское (массовое) [15, 16]. Их базовыми операторами служили, соответственно, оператор лептонного заряда $\hat{\kappa}_z\gamma_5$ и массового слагаемого лагранжиана $\hat{\kappa}_z$. В нейтринной двухфлейворной модели с аналогичными базовыми операторам оказываются связаны разные основные лагранжианы.

Действительно, в стандартных нейтринных феноменологических схемах в качестве основного выбирается представление, в котором соответствующие ему базовые майорановские нейтринные поля не смешиваются. В исследуемой нейтринной модели такое представление строится на базовом операторе $\hat{\kappa}_z$, что соответствует выбору значения параметра $\theta = \eta\pi/2$ ($\theta_{\text{mix}} = 0$) в лагранжиане (34). При этом лагранжиан и обобщенный лептонный заряд получают следующую двухкомпонентную форму:

$$\begin{aligned} L(x) = L_0(x) + \frac{M}{2}\overline{\nu}_0(x)\hat{\kappa}_z\nu_0(x) = \\ = L_0(x) + \frac{M}{2}\{\overline{\nu}_{0e}(x)\nu_{0e}(x) - \overline{\nu}_{0\mu}(x)\nu_{0\mu}(x)\} = \\ = L_0(x) + \frac{M\eta}{2}\{\overline{\nu}_{0eL}(x)\nu^{GC}_{0eR}(x) + \overline{\nu}^{GC}_{0eR}(x)\nu_{0eL}(x) - \\ - \overline{\nu}_{0\mu R}(x)\nu^{GC}_{0\mu L}(x) - \overline{\nu}^{GC}_{0\mu L}(x)\nu_{0\mu R}(x)\}, \end{aligned} \qquad (39)$$

$$
\begin{aligned}
Q^P = \frac{1}{2}\int d^3x \nu_0^+(x)(\cos\chi\hat{\kappa}_x + \sin\chi\hat{\kappa}_y)\gamma_5\nu_0(x) = \\
= \frac{\eta}{2}\int d^3x[\nu_{0eL}^+(x)\mathrm{e}^{-i\chi}\nu_{0\mu L}^{GC}(x) + \nu_{0\mu L}^{GC+}(x)\mathrm{e}^{+i\chi}\nu_{0eL}(x) - \\
- \nu_{0\mu R}^+(x)\mathrm{e}^{+i\chi}\nu_{0eR}^{GC}(x) - \nu_{0eR}^{GC+}(x)\mathrm{e}^{-i\chi}\nu_{0\mu R}(x)],
\end{aligned}
$$

где двухкомпонентная базовая функция нейтрино $\nu_0(x)$ имеет вид

$$
\begin{gathered}
\nu_0(x) = \begin{pmatrix}\nu_{0e}(x)\\ \nu_{0\mu}(x)\end{pmatrix}, \\
\nu_{0e}(x) = \nu_{0eL}(x) + \eta\nu_{0eR}^{GC}(x) = \nu_{0eL}(x) + \eta\mathrm{e}^{-i(\chi+\phi)}\nu_{0eR}^{C}(x), \\
\nu_{0\mu}(x) = \nu_{0\mu R}(x) + \eta\nu_{0\mu L}^{GC}(x) = \nu_{0\mu R}(x) + \eta\mathrm{e}^{+i(\chi-\phi)}\nu_{0\mu L}^{C}(x),
\end{gathered}
\tag{40}
$$

аналогичный форме (12), модифицированной переходом к операции GC-сопряжения, и включает пару несмешивающихся базовых майорановских решений: электронное $\nu_{0e}(x)$ и мюонное $\nu_{0\mu}(x)$. Эти решения имеют общую зарядовую четность $\eta = \pm 1$ по отношению к GC-сопряжению и различаются собственными значениями оператора $\hat{\kappa}_z$, который является оператором нейтринного флейвора, задающим структуру массового члена лагранжиана (39):

$$
\begin{gathered}
\hat{\kappa}_z\nu_{0\ \kappa}(x) = \kappa\nu_{0\ \kappa}(x), \\
\nu_{0\ +1}(x) = \begin{pmatrix}\nu_{0e}(x)\\ 0\end{pmatrix}, \quad \Big(\kappa = +1\Big), \quad \nu_{0\ -1}(x) = \begin{pmatrix}0\\ \nu_{0\mu}(x)\end{pmatrix}, \quad \kappa = -1.
\end{gathered}
\tag{41}
$$

Описывающие их уравнения в двухкомпонентном и обычном виде будут, соответственно:

$$
\begin{gathered}
\gamma_\mu\partial_\mu\nu_0(x) - M\hat{\kappa}_z\nu_0(x) = 0, \\
\gamma_\mu\partial_\mu\nu_{0eL}(x) - M\eta\nu_{0eR}^{GC}(x) = 0, \quad \gamma_\mu\partial_\mu\nu_{0\mu R}(x) + M\eta\nu_{0\mu L}^{GC}(x) = 0, \\
\gamma_\mu\partial_\mu\nu_{0eR}^{GC}(x) - M\eta\nu_{0eL}(x) = 0, \quad \gamma_\mu\partial_\mu\nu_{0\mu L}^{GC}(x) + M\eta\nu_{0\mu R}(x) = 0,
\end{gathered}
\tag{42}
$$

причем нижняя пара уравнений GC сопряжена предшествующей. Отметим, что эквивалентные уравнения, связывающие левую частичную (электронное нейтрино) и правую античастичную (электронное антинейтрино) компоненты, в пределе $\chi = \phi = 0, \quad \eta = +1$ были получены и исследованы Кейсом [30]. При этом правая частичная и левая античастичная (мюонные) компоненты им отбрасывались, так что фактически он изучал решение $\kappa = +1$ при дополнительном условии $\nu_{0\mu R}(x) = \nu_{0\mu L}^{GC}(x) = 0$.

Для описания основного представления зарядового типа, когда в качестве базового используется оператор лептонного заряда, сохраним дираковскую форму лагранжиана, отвечающую полному смешиванию нейтринных электронных и мюонных компонент обобщенной функции ($\theta = 0,\ \theta_{\rm mix} = \pi/4$ в (34)), что ведет к лагранжиану и лептонному заряду вида

$$\begin{aligned} L(x) = L_0(x) - \frac{M}{2}\overline{\nu}_D(x)(\cos\chi\hat{\kappa}_x + \sin\chi\hat{\kappa}_y)\nu_D(x) = \\ = L_0(x) - \frac{M}{2}(\overline{\nu}_{D\mu R}(x)\mathrm{e}^{+i\chi}\nu_{DeL}(x) + \overline{\nu}^{GC}_{D\mu L}(x)\mathrm{e}^{+i\chi}\nu^{GC}_{DeR}(x) + \\ + \overline{\nu}_{DeL}(x)\mathrm{e}^{-i\chi}\nu_{D\mu R}(x) + \overline{\nu}^{GC}_{DeR}(x)\mathrm{e}^{-i\chi}\nu^{GC}_{D\mu L}(x)), \end{aligned} \tag{43}$$

$$\begin{aligned} Q^L = \frac{1}{2}\int d^3x\nu^+_D(x)\hat{\kappa}_z\gamma_5\nu_D(x) = \\ = \frac{1}{2}\int d^3x(\nu^+_{DeL}(x)\nu_{DeL}(x) + \nu^+_{D\mu R}(x)\nu_{D\mu R}(x) - \nu^{GC+}_{D\mu L}(x)\nu^{GC}_{D\mu L}(x) - \\ - \nu^{GC+}_{DeR}(x)\nu^{GC}_{DeR}(x)), \end{aligned}$$

$$\nu_D(x) = \begin{pmatrix}\nu_{De}(x)\\ \nu_{D\mu}(x)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\nu_{DeL}(x) + \eta\nu^{GC}_{DeR}(x)\\ \nu_{D\mu R}(x) + \eta\nu^{GC}_{D\mu L}(x)\end{pmatrix}.$$

Частный случай $\chi = 0$ соответствует действительной массе и аналогичен дираковскому уравнению (18), из которого он получается заменами (31), хотя точнее его определять как квазидираковский. Собственные функции решений с фиксированным лептонным зарядом $q_z = \pm 1$:

$$\begin{gathered} \hat{\kappa}_z\gamma_5\nu_{D,q_z}(x) = q_z\nu_{D,q_z}(x), \\ \nu_{D,q_z=+1}(x) = \begin{pmatrix}\nu_{DeL}(x)\\ \nu_{D\mu R}(x)\end{pmatrix}, \quad \nu_{D,q_z=-1}(x) = \begin{pmatrix}\eta\nu^{GC}_{DeR}(x)\\ \eta\nu^{GC}_{D\mu L}(x)\end{pmatrix}, \end{gathered} \tag{44}$$

причем в соответствии с ЗКМ-схемой лептонный заряд $+1$ имеют левое электронное и правое мюонное нейтрино, а -1 — правое электронное и левое мюонное антинейтрино.

Отметим, что, используя паулиевское преобразование на угол $\theta' = -\pi/2$ волновых функций и операторов, описывающих массовый член и обобщенный заряд представления (39), можно получить альтернативное описание квазидираковского случая в флейворных переменных, поскольку оператор флейвора при таком преобразовании остается базовым, хотя приобретает новую форму $-(\cos\chi\hat{\kappa}_x + \sin\chi\hat{\kappa}_y)$ (см.(43)), отвечающую недиагональному представлению. Обобщенная функция квазидираковского представления $\nu_D(x)$

получает вид

$$\nu_D(x) = \mathrm{e}^{-i(\cos\chi\hat{\kappa}_y - \sin\chi\hat{\kappa}_x)\theta'/2}\nu_0(x) = \mathrm{e}^{+i(\cos\chi\hat{\kappa}_y - \sin\chi\hat{\kappa}_x)\pi/4}\nu_0(x) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & +\mathrm{e}^{-i\chi} \\ -\mathrm{e}^{+i\chi} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \nu_{0e}(x) \\ \nu_{0\mu}(x) \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \nu_{0eL}(x) + \mathrm{e}^{-i\chi}\nu_{0\mu R}(x) + \eta\nu^{GC}_{0eR}(x) + \eta\mathrm{e}^{-i\chi}\nu^{GC}_{0\mu L}(x) \\ \nu_{0\mu R}(x) - \mathrm{e}^{i\chi}\nu_{0eL}(x) + \eta\nu^{GC}_{0\mu L}(x) - \eta\mathrm{e}^{i\chi}\nu^{GC}_{0eR}(x) \end{pmatrix},$$
$$\begin{aligned} \nu_{DeL}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\nu_{0eL}(x) + \eta\mathrm{e}^{-i\chi}\nu^{GC}_{0\mu L}(x)), \\ \nu_{D\mu R}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\nu_{0\mu R}(x) - \eta\mathrm{e}^{i\chi}\nu^{GC}_{0eR}(x)) \\ \nu^{GC}_{DeR}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\nu^{GC}_{0eR}(x) + \eta\mathrm{e}^{-i\chi}\nu_{0\mu R}(x)) \\ \nu^{GC}_{D\mu L}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\nu^{GC}_{0\mu L}(x) - \eta\mathrm{e}^{i\chi}\nu_{0eL}(x)). \end{aligned} \tag{45}$$

Квантовой характеристикой альтернативного представления служит обобщенное флейворное число $\kappa = \pm 1$, его собственные функции получаются из (40) тем же преобразованием

$$-(\cos\chi\hat{\kappa}_x + \sin\chi\hat{\kappa}_y)\nu_{D,\kappa}(x) = \kappa\nu_{D,\kappa}(x),$$

$$\nu_{D,\kappa=+1}(x) = \begin{pmatrix} \nu_{DeL}(x) + \eta\nu^{GC}_{DeR}(x) \\ \nu_{D\mu R}(x) + \eta\nu^{GC}_{D\mu L}(x) \end{pmatrix}_{\kappa=+1} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \nu_{0eL}(x) + \eta\nu^{GC}_{0eR}(x) \\ -\mathrm{e}^{i\chi}(\nu_{0eL}(x) + \eta\nu^{GC}_{0eR}(x)) \end{pmatrix}, \tag{46}$$
$$\nu_{D,\kappa=-1}(x) = \begin{pmatrix} \nu_{DeL}(x) + \eta\nu^{GC}_{DeR}(x) \\ \nu_{D\mu R}(x) + \eta\nu^{GC}_{D\mu L}(x) \end{pmatrix}_{\kappa=-1} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-i\chi}(\nu_{0\mu R}(x) + \eta\nu^{GC}_{0\mu L}(x)) \\ \nu_{0\mu R}(x) + \eta\nu^{GC}_{0\mu L}(x) \end{pmatrix},$$

причем дополнительные условия проекционного типа, выделяющие определенные значения обобщенного флейвора κ, можно представить раздельно или объединить в одно общее:

$$\begin{aligned} \nu^C_{D\mu L}(x) &= -\eta\mathrm{e}^{i\phi}\nu_{DeL}(x), \quad \nu^C_{DeR}(x) = -\eta\mathrm{e}^{i\phi}\nu_{D\mu R}(x), \quad \kappa = +1, \\ \nu^C_{D\mu L}(x) &= \eta\mathrm{e}^{i\phi}\nu_{DeL}(x), \quad \nu^C_{DeR}(x) = \eta\mathrm{e}^{i\phi}\nu_{D\mu R}(x), \quad \kappa = -1, \\ \nu_{D\mu}(x) &= -\kappa\mathrm{e}^{i\chi}\nu_{De}(x), \quad \kappa = \pm 1. \end{aligned} \tag{47}$$

Последнее соотношение означает, что в состояниях определенного обобщенного флейвора электронная и мюонная майорановские составляющие дираковского нейтрино ЗКМ-схемы совпадают по величине с точностью до фазы. Решения (44) и (46) дают, таким образом, пример альтернативного описания квазидираковского случая двухфлейворной нейтринной паулиевской модели в терминах лептонного заряда ЗКМ-типа или обобщенного флейвора.

Перейдем к общему случаю двухфлейворной модели, для чего, отталкиваясь от лагранжиана основного случая флейворного представления $\theta = \eta\pi/2$ (39) и используя паулиевское преобразование, построим общее выражение для двухкомпонентной волновой функции:

$$\nu(x) = \begin{pmatrix} \nu_e(x) \\ \nu_\mu(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_{eL}(x) + \eta\nu_{eR}^{GC}(x) \\ \nu_{\mu R}(x) + \eta\nu_{\mu L}^{GC}(x) \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{-i(\cos\chi\hat{\kappa}_y - \sin\chi\hat{\kappa}_x)\theta'/2}\nu_0(x)$$
$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta'/2)\nu_{0e}(x) - \sin(\theta'/2)\mathrm{e}^{-i\chi}\nu_{0\mu}(x) \\ \cos(\theta'/2)\nu_{0\mu}(x) + \sin(\theta'/2)\mathrm{e}^{+i\chi}\nu_{0e}(x) \end{pmatrix}, \quad \theta' = \eta\theta - \pi/2. \tag{48}$$

Параметр паулиевского преобразования θ' может быть связан с углом смешивания, вводимым в стандартном феноменологическом описании двухфлейворных майорановских моделей [10–12], и характеризует степень отклонения исследуемого лагранжиана от основного, в котором нейтринные электронная и мюонная компоненты обобщенной функции не смешаны. Лагранжиан и сохраняющийся обобщенный лептонный заряд в этом случае имеют вид

$$\begin{aligned} L(x) &= L_0(x) + \frac{M}{2}\overline{\nu}(x)[\cos\theta'\hat{\kappa}_z + \sin\theta'(\cos\chi\hat{\kappa}_x + \sin\chi\hat{\kappa}_y)]\nu(x), \\ Q^P &= \frac{1}{2}\int d^3x\nu^+(x)[\cos\theta'(\cos\chi\hat{\kappa}_x + \sin\chi\hat{\kappa}_y) - \sin\theta'\hat{\kappa}_z]\gamma_5\nu(x), \end{aligned} \tag{49}$$

а соответствующая система уравнений для отдельных компонент

$$\begin{aligned} \gamma_\mu\partial_\mu\nu_{eL}(x) - M\sin\theta'\mathrm{e}^{-i\chi}\nu_{\mu R}(x) - M\eta\cos\theta'\nu_{eR}^{GC}(x) = 0, \\ \gamma_\mu\partial_\mu\nu_{\mu R}(x) - M\sin\theta'\mathrm{e}^{+i\chi}\nu_{eL}(x) + M\eta\cos\theta'\nu_{\mu L}^{GC}(x) = 0, \\ \gamma_\mu\partial_\mu\nu_{\mu L}^{GC}(x) - M\sin\theta'\mathrm{e}^{+i\chi}\psi_{eR}^{GC}(x) + M\eta\cos\theta'\nu_{\mu R}(x) = 0, \\ \gamma_\mu\partial_\mu\nu_{eR}^{GC}(x) - M\sin\theta'\mathrm{e}^{-i\chi}\nu_{\mu L}^{GC}(x) - M\eta\cos\theta'\nu_{eL}(x) = 0. \end{aligned} \tag{50}$$

Она же в двухкомпонентной форме

$$\gamma_\mu\partial_\mu\nu(x) - M\sin\theta'(\cos\chi\hat{\kappa}_x + \sin\chi\hat{\kappa}_y)\nu(x) - M\cos\theta'\hat{\kappa}_z\nu(x) = 0. \tag{51}$$

Полезно отметить, что общей формой сохраняющегося тока $J_\mu^P(x)$ является форма

$$J_\mu^P(x) = \frac{i}{2}\overline{\nu}(x)\gamma_\mu\gamma_5[\cos\theta'(\cos\chi\hat{\kappa}_x + \sin\chi\hat{\kappa}_y) - \sin\theta'\hat{\kappa}_z]\nu(x) =$$

$$= \frac{i}{2}[\cos\theta'(\overline{\nu}_{eL}(x)\gamma_\mu\nu_{\mu L}^C(x) + \overline{\nu}_{\mu L}^C(x)\gamma_\mu\nu_{eL}(x) - \overline{\nu}_{\mu R}(x)\gamma_\mu\nu_{eR}^C(x) -$$

$$- \overline{\nu}_{eR}^C(x)\gamma_\mu\nu_{\mu R}(x)) - \sin\theta'(\overline{\nu}_{eL}(x)\gamma_\mu\nu_{eL}(x) + \overline{\nu}_{\mu R}(x)\gamma_\mu\nu_{\mu R}(x) -$$

$$- \overline{\nu}_{\mu L}^C(x)\gamma_\mu\nu_{\mu L}^C(x) - \overline{\nu}_{eR}^C(x)\gamma_\mu\nu_{eR}^C(x))], \quad (52)$$

содержащая два слагаемых: нейтральный ток, не меняющий флейворного числа (пропорциональный $\sin\theta'$), и ток, изменяющий флейвор нейтрино с электронного на мюонный и обратно (пропорциональный $\cos\theta'$), включающий переходы $\nu_\mu \to \nu_e$ $(\Delta\kappa = +2)$ и $\nu_e \to \nu_\mu$ $(\Delta\kappa = -2)$.

Используя соотношения (48), построим собственные функции общего вида в случае, когда в качестве базового выбран оператор, описывающий структуру массового слагаемого лагранжиана — обобщенный оператор флейвора. Собственные функции с фиксированным квантовым числом $\kappa = \pm 1$ имеют вид

$$[\cos\theta'\hat{\kappa}_z + \sin\theta'(\cos\chi\hat{\kappa}_x + \sin\chi\hat{\kappa}_y)]\nu_\kappa(x) = \kappa\nu_\kappa(x),$$

$$\nu_{\kappa=+1}(x) = \begin{pmatrix}\nu_e(x)\\ \nu_\mu(x)\end{pmatrix}_{\kappa=+1} = \begin{pmatrix}\cos(\theta'/2)\nu_{0e}(x)\\ \sin(\theta'/2)\mathrm{e}^{i\chi}\nu_{0e}(x)\end{pmatrix}, \quad \kappa = +1, \quad (53)$$

$$\nu_{\kappa=-1}(x) = \begin{pmatrix}\nu_e(x)\\ \nu_\mu(x)\end{pmatrix}_{\kappa=-1} = \begin{pmatrix}-\sin(\theta'/2)\mathrm{e}^{-i\chi}\nu_{0\mu}(x)\\ \cos(\theta'/2)\nu_{0\mu}(x)\end{pmatrix}, \quad \kappa = -1.$$

При этом для их киральных компонент реализуются связи

$$\begin{aligned}\nu_{\mu L}^C(x) &= \kappa\eta(\mathrm{tg}\ (\theta'/2))^\kappa\mathrm{e}^{i\phi}\nu_{eL}(x),\\ \nu_{eR}^C(x) &= \kappa\eta(\mathrm{ctg}\ (\theta'/2))^\kappa\mathrm{e}^{i\phi}\nu_{\mu R}(x), \quad \kappa = \pm 1,\end{aligned} \quad (54)$$

приводимые к объединенной форме

$$\nu_{\mu,\kappa}(x) = \kappa(\mathrm{tg}\ (\theta'/2))^\kappa\mathrm{e}^{i\chi}\nu_{e,\kappa}(x), \quad \kappa = \pm 1. \quad (55)$$

Это соотношение обобщает связь (47), найденную выше для квазидираковского случая. Из него следует, что в состояниях определенного обобщенного флейвора вклады майорановских нейтринных электронной и мюонной компонент в общем случае взаимосвязаны. При этом вклад мюонной составляющей в состояния обобщенного электронного флейвора ($\kappa = +1$) равен нулю в случае основного лагранжиана (39) и пропорционален тангенсу половинного угла θ', характеризующего смешивание, в общем случае. Аналогичной величиной определяется вклад майорановской электронной составляющей в состояния обобщенного мюонного флейвора ($\kappa = -1$). В «квазидираковских» состояниях эти вклады совпадают по величине.

В исследуемой двухфлейворной ЗКМ-модели эти связи — аналог майорановских соотношений проекционного типа модели из § 2. Анализ их поведения при пространственном отражении показывает, что в предположении универсальности фаз пространственных преобразований они реализуются только для частиц инверсных A-B-классов ($\eta_P^2 = -1$). Однако, если электронные и мюонные нейтрино принадлежат разным инверсным классам, допустимо, что электронные нейтрино относятся к C-классу ($\eta_{P(e)} = +1$), а мюонные — к D-классу ($\eta_{P(\mu)} = -1$), или наоборот ($\eta_{P(e)} = -1,\ \eta_{P(\mu)} = +1$).

В альтернативном описании, когда в качестве квантового числа используется обобщенный лептонный заряд, базовым выбирается его оператор и основным становится лагранжиан (43), в котором уже совершен паулиевский поворот на угол $\theta' = -\pi/2$ относительно лагранжиана (39), так что для согласования с предшествующим случаем достаточно провести дополнительный поворот на угол $\eta\theta$. После такого поворота возникают лагранжиан и обобщенный лептонный заряд типа (24):

$$\begin{aligned} L(x) &= L_0(x) - \frac{M}{2}\overline{\nu'}(x)[\cos\theta(\cos\chi\hat{\kappa}_x + \sin\chi\hat{\kappa}_y) - \eta\sin\theta\hat{\kappa}_z]\nu'(x), \\ Q^L &= \frac{1}{2}\int d^3x\nu'^+(x)[\cos\theta\hat{\kappa}_z + \eta\sin\theta(\cos\chi\hat{\kappa}_x + \sin\chi\hat{\kappa}_y)]\gamma_5\nu'(x), \end{aligned} \tag{56}$$

причем выражения (43) и (56) связаны паулиевским преобразованием

$$\begin{aligned} \nu'(x) &= \mathrm{e}^{-i\eta(\cos\chi\hat{\kappa}_y - \sin\chi\hat{\kappa}_x)(\theta/2)}\nu_D(x) = \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -\eta\sin(\theta/2)\mathrm{e}^{-i\chi} \\ \eta\sin(\theta/2)\mathrm{e}^{+i\chi} & \cos(\theta/2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \nu_{De}(x) \\ \nu_{D\mu}(x) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta/2)\nu_{DeL}(x) - \eta\sin(\theta/2)\mathrm{e}^{-i\chi}\nu_{D\mu R}(x) + \\ \qquad + \eta\cos(\theta/2)\nu_{DeR}^{GC}(x) - \sin(\theta/2)\mathrm{e}^{-i\chi}\nu_{D\mu L}^{GC}(x) \\ \cos(\theta/2)\nu_{D\mu R}(x) + \eta\sin(\theta/2)\mathrm{e}^{+i\chi}\nu_{DeL}(x) + \\ \qquad + \eta\cos(\theta/2)\nu_{D\mu L}^{GC}(x) + \sin(\theta/2)\mathrm{e}^{+i\chi}\nu_{DeR}^{GC}(x) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{57}$$

Собственные функции частиц с фиксированным обобщенным лептонным зарядом $q = \pm 1$ получаются из (44) тем же преобразованием и имеют вид

$$[\cos\theta\hat{\kappa}_z + \eta\sin\theta(\cos\chi\hat{\kappa}_x + \sin\chi\hat{\kappa}_y)]\gamma_5\nu'_q(x) = q\nu'_q(x), \quad \theta = \eta(\theta' + \pi/2),$$

$$\nu'_{q=+1}(x) = \begin{pmatrix}\nu'_e(x)\\ \nu'_\mu(x)\end{pmatrix}_{q=+1} =$$

$$= \begin{pmatrix}\cos(\theta/2)\nu_{DeL}(x) - \eta\sin(\theta/2)\mathrm{e}^{-i\chi}\nu_{D\mu R}(x)\\ \cos(\theta/2)\nu_{D\mu R}(x) + \eta\sin(\theta/2)\mathrm{e}^{i\chi}\nu_{DeL}(x)\end{pmatrix}, \quad q = +1, \tag{58}$$

$$\nu'_{q=-1}(x) = \begin{pmatrix}\nu'_e(x)\\ \nu'_\mu(x)\end{pmatrix}_{q=-1} =$$

$$= \begin{pmatrix}\eta\cos(\theta/2)\nu^{GC}_{DeR}(x) - \sin(\theta/2)\mathrm{e}^{-i\chi}\nu^{GC}_{D\mu L}(x)\\ \eta\cos(\theta/2)\nu^{GC}_{D\mu L}(x) + \sin(\theta/2)\mathrm{e}^{i\chi}\nu^{GC}_{DeR}(x)\end{pmatrix}, \quad q = -1,$$

а их компоненты удовлетворяют проекционным майорановским условиям, аналогичным (27):

$$\begin{gathered}\nu'^{C}_{\mu L}(x) = q\left(\mathrm{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^q \mathrm{e}^{i\phi}\nu'_{eL}(x),\\ \nu'^{C}_{eR}(x) = -q\left(\mathrm{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^q \mathrm{e}^{i\phi}\nu'_{\mu R}(x), \quad q = \pm 1,\end{gathered} \tag{59}$$

связывающим электронные компоненты с зарядово-сопряженными мюонными, а мюонные — с зарядово-сопряженными электронными. Очевидно, что при малых углах θ ($\theta' \sim -\pi/2$) в состояниях с фиксированным обобщенным лептонным зарядом q и киральностью вклад состояний противоположного лептонного заряда мал, однако он возрастает пропорционально тангенсу половинного угла θ с удалением от квазидираковского случая и достигает равенства с основным вкладом при значениях $\theta = \eta\pi/2$, $\theta' = 0$, отвечающих лагранжиану (39), когда существуют майорановские решения определенного флейвора. При этом в решениях определенного обобщенного лептонного заряда $q = \pm 1$ угол θ играет роль параметра смешивания частичных и античастичных состояний квазидираковского типа.

Из анализа поведения соотношений (59) по отношению к пространственному отражению следует, что при универсальности фазовых факторов этой операции η_P они реализуются только для частиц инверсных C-D-классов ($\eta_P^2 = +1$). Однако, если нейтрино принадлежат к разным инверсным классам, они удовлетворяются и для частиц инверсных классов A-B в следующих случаях: $\eta_{P(e)} = i$ (A-класс), $\eta_{P(\mu)} = -i$ (B-класс) или $\eta_{P(e)} = -i$ (B-класс), $\eta_{P(\mu)} = +i$ (A-класс). В целом соотношения (54) и (59) показывают, что в общем случае двухфлейворной модели в собственных функциях базовых операторов существуют определенные жесткие соотношения вкладов электронных и мюонных компонент, играющие здесь ту же роль, что и проекционные майорановские соотношения в модели одной частицы.

Итак, в рамках паулиевских представлений можно построить двухфлейворную нейтринную модель, включающую два типа массивных нейтрино разного флейвора и имеющую квантовые характеристики типа Зельдовича–Конопинского–Махмуда. Общий лагранжиан такой двухфлейворной майорановской модели содержит как массовые члены, связанные с майорановскими массами этих нейтрино, так и слагаемые, ответственные за их смешивание (квазидираковские). При этом майорановские массы разных нейтрино одинаковы по величине, но отличаются знаком, а длина осцилляций между этими нейтрино будет бесконечно большой.

Такая паулиевская модель является специальным частным случаем общих майорановских моделей ЗКМ-типа, но обладает рядом важных свойств, не имеющих место в общих схемах, главным из которых является существование специальных квантовых чисел, единообразно описывающих как майорановские, так и квазидираковские состояния модели. В зависимости от выбора базовых операторов в ней возможна альтернативная реализация двух представлений: флейворного, когда в качестве базового выбран оператор обобщенного флейвора, одновременно задающий структуру массового слагаемого конкретного лагранжиана и вводящий универсальную флейворную характеристику, или зарядового, когда за базовый выбран оператор обобщенного лептонного заряда, описывающий любые состояния системы с помощью обобщенного лептонного заряда. При этом выбор базового оператора зависит от инверсного класса исследуемых частиц.

Исключение составляет квазидираковский случай, когда возможно альтернативное использование любого их этих представлений. Кирально-паулиевское преобразование, переводящие основную форму данного представления в определенную общую форму лагранжиана, включает угловой параметр, задающий соответствующий поворот в изопространстве паулиевских преобразований и степень смешивания базовых решений основной формы в решении с фиксированным квантовым числом обобщенного типа.

Однако применение такой схемы к анализу данных по нейтринным осцилляциям требует последовательного учета неравенства величин нейтринных электронной и мюонной майорановских масс, наблюдаемого в осцилляционном эксперименте. Покажем, что необходимое расширение схемы может быть проведено с сохранением всех особенностей паулиевской схемы при достаточно общих предположениях о нейтринном лагранжиане системы.

§ 4. ОПИСАНИЕ НЕЙТРИННЫХ ОСЦИЛЛЯЦИЙ В ДВУХФЛЕЙВОРНОЙ ПАУЛИЕВСКОЙ МОДЕЛИ

Рассмотрим наиболее общий лагранжиан феноменологических майорановских моделей, приведенный, например, в [11] (см. формулы (1.12), (1.13) этой монографии), и выделим в нем слагаемое вида (34), описываемое паулиевской двухфлейворной схемой. Переходя к обозначениям нейтринной двухфлейворной модели подстановками (31), получим модельный лагранжиан

$$\begin{gathered}L_{\mathrm{md}}(x)=L_0(x)-\frac{1}{2}\{\overline{\nu}_{\mu R}(x)m_D\nu_{eL}(x)+\overline{\nu}^C_{eR}(x)m_D\nu^C_{\mu L}(x)+\\+\overline{\nu}_{eL}(x)m^*_D\nu_{\mu R}(x)+\overline{\nu}^C_{\mu L}(x)m^*_D\nu^C_{eR}(x)+\overline{\nu}_{\mu R}(x)(m_1-im_2)\nu^C_{\mu L}(x)+\\+\overline{\nu}^C_{\mu L}(x)(m^*_1+im^*_2)\nu_{\mu R}(x)+\overline{\nu}^C_{eR}(x)(m_1+im_2)\nu_{eL}(x)+\\+\overline{\nu}_{eL}(x)(m^*_1-im^*_2)\nu^C_{eR}(x))\},\end{gathered} \tag{60}$$

зависящий от трех феноменологических массовых параметров $m_1,\ m_2$, m_D — произвольных комплексных величин, которые обычно связываются с майорановскими ($m_1,\ m_2$) и дираковской (здесь — квазидираковской m_D) массами. Как было показано выше, паулиевская схема — специальный случай общей майорановской, в которой майорановские массовые слагаемые L- и R-типа равны по величине и различаются знаком. Для сопоставления с паулиевской формой (34) свяжем массовые параметры, входящие в (60), с параметрами нейтринной двухфлейворной модели из § 3, используя соотношения

$$\begin{gathered}m_1-im_2=M_R(\nu_\mu)\mathrm{e}^{i(\chi-\phi)}=M'_R(\nu_\mu)\mathrm{e}^{-i\phi},\ m_D=M_D(\nu_\mu\nu_e)\mathrm{e}^{+i\chi},\\ m_1+im_2=M_L(\nu_e)\mathrm{e}^{i(\chi+\phi)}=M'_L(\nu_e)\mathrm{e}^{+i\phi},\quad m^*_D=M^*_D(\nu_\mu\nu_e)\mathrm{e}^{-i\chi},\\ \mathrm{Re}\ M_D(\nu_\mu\nu_e)=M\cos\theta,\quad \frac{1}{2}(M_R(\nu_\mu)-M_L(\nu_e))=M\sin\theta,\end{gathered} \tag{61}$$

Если далее использовать в этих выражениях нейтринные GC-функции (34), то модельный лагранжиан (60) переписывается в форме

$$\begin{gathered}L_{\mathrm{md}}(x)=L_0(x)-\\-\frac{M}{2}[\cos\theta(\overline{\nu}_{\mu R}(x)\mathrm{e}^{i\chi}\nu_{eL}(x)+\overline{\nu}^{GC}_{\mu L}(x)\mathrm{e}^{i\chi}\nu^{GC}_{eR}(x)+\overline{\nu}_{eL}(x)\mathrm{e}^{-i\chi}\nu_{\mu R}(x)+\\+\overline{\nu}^{GC}_{eR}(x)\mathrm{e}^{-i\chi}\nu^{GC}_{\mu L}(x))+\sin\theta(\overline{\nu}_{\mu R}(x)\nu^{GC}_{\mu L}(x)+\overline{\nu}^{GC}_{\mu L}(x)\nu_{\mu R}(x)-\\-\overline{\nu}_{eL}(x)\nu^{GC}_{eR}(x)-\overline{\nu}^{GC}_{eR}(x)\nu_{eL}(x))]-\\-\frac{1}{2}\left\{\frac{M_R(\nu_\mu)+M_L(\nu_e)}{2}(\overline{\nu}_{\mu R}(x)\nu^{GC}_{\mu L}(x)+\overline{\nu}^{GC}_{\mu L}(x)\nu_{\mu R}(x)+\right.\\+\overline{\nu}_{eL}(x)\nu^{GC}_{eR}(x)+\overline{\nu}^{GC}_{eR}(x)\nu_{eL}(x))+\\+\frac{M_D(\nu_\mu\nu_e)-M^*_D(\nu_\mu\nu_e)}{2}(\overline{\nu}_{\mu R}(x)\mathrm{e}^{i\chi}\nu_{eL}(x)+\overline{\nu}^{GC}_{eR}(x)\mathrm{e}^{-i\chi}\nu^{GC}_{\mu L}(x)-\\\left.-\overline{\nu}^{GC}_{\mu L}(x)\mathrm{e}^{i\chi}\nu^{GC}_{eR}(x)--\overline{\nu}_{eL}(x)\mathrm{e}^{-i\chi}\nu_{\mu R}(x))\right\},\end{gathered} \tag{62}$$

второе слагаемое которой совпадает с массовым членом лагранжиана (34), а два последних составляют дополнительный массовый член, учитывающий неравенство майорановских масс электронного и мюонного нейтрино и возможную комплексность квазидираковского параметра $M_D(\nu_\mu\nu_e)$. Заметим, что слагаемое, зависящее от полусуммы майорановских масс нейтрино электронного и мюонного типа, симметрично по отношению к операции обобщенного зарядового GC-сопряжения так же, как и паулиевский лагранжиан (34). Это позволяет несколько упростить форму (62), накладывая на нее условие такой симметрии как общее требование к лагранжиану модели в целом. При $\operatorname{Im} M_D(\nu_\mu\nu_e) = 0$ лагранжиан не включает последнее слагаемое, однако по-прежнему отвечает достаточно общей майорановской модели, в которой два типа нейтрино имеют неравные между собой майорановские массы. Поскольку операция GC-сопряжения учитывает возможность введения различных фазовых факторов зарядового сопряжения η_C для нейтрино разного флейвора, то введение в общей майорановской схеме общего условия симметрии относительно такой операции представляется естественным и физически непротиворечивым.

В такой модифицированной общей модели нейтринные двухфлейворные осцилляции имеют конечную осцилляционную длину. Действительно, введем в полученном лагранжиане аналог $\nu(x)$ (48) — нейтринную функцию модифицированной модели $\nu_{\mathrm{md}}(x)$ — и проведем преобразование, ведущее к редукции паулиевского массового слагаемого лагранжиана к форме (39). Для этого преобразуем укороченный лагранжиан (62) к общей форме (49) и выполним в ней соответствующее паулиевское преобразование

$$\begin{gathered} L_{\mathrm{md}}(x) = L_0(x) - \frac{M_0}{2}\overline{\nu}_{\mathrm{md}}(x)\nu_{\mathrm{md}}(x) + \frac{M}{2}\overline{\nu}_{\mathrm{md}}(x)\hat{\kappa}\nu_{\mathrm{md}}(x), \\ M_0 = \frac{M_R(\nu_\mu) + M_L(\nu_e)}{2}\eta, \quad \hat{\kappa} = \cos\theta'\hat{\kappa}_z + \sin\theta'(\cos\chi\hat{\kappa}_x + \sin\chi\hat{\kappa}_y), \end{gathered} \tag{63}$$

используя поворот, обратный к (48). Получаем диагональную форму лагранжиана вида

$$\begin{gathered} L_{\mathrm{md}}(x) = L_0(x) - \frac{M_0}{2}\overline{\nu}_{\mathrm{md0}}(x)\nu_{\mathrm{md0}}(x) + \frac{M}{2}\overline{\nu}_{\mathrm{md0}}(x)\hat{\kappa}_z\nu_{\mathrm{md0}}(x), \\ \nu_{\mathrm{md0}}(x) = \begin{pmatrix} (\nu_{\mathrm{md0}})_e(x) \\ (\nu_{\mathrm{md0}})_\mu(x) \end{pmatrix}, \quad \nu_{\mathrm{md0}}(x) = \mathrm{e}^{i(\cos\chi\hat{\kappa}_y - \sin\chi\hat{\kappa}_x)\theta'/2}\nu_{\mathrm{md}}(x), \\ \gamma_\mu\partial_\mu\nu_{\mathrm{md0}}(x) + M_0\nu_{\mathrm{md0}}(x) - M\hat{\kappa}_z\nu_{\mathrm{md0}}(x) = 0, \ \theta' = \eta\theta - \pi/2. \end{gathered} \tag{64}$$

В согласии со стандартной процедурой майорановской феноменологии (см., например, [11, 12]) $\nu_{\mathrm{md}}(x)$ — физические нейтрино, суперпозиции базовых нейтринных состояний определенной массы $(\nu_{\mathrm{md0}})_{e(\mu)}(x)$, удовлетворяющие уравнениям (64) и описываемые в двухфлейворной модели предшествующего раздела универсальным флейворным числом κ. При переходе лагранжиана (63) к основной диагональной форме эффективные майорановские массы электронных и мюонных нейтрино приобретают значения

$$\begin{gathered}M(\nu_e) = M_0 - M = \\ = \eta\frac{M_R(\nu_\mu) + M_L(\nu_e)}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}(M_R(\nu_\mu) - M_L(\nu_e))^2 + (ReM_D(\nu_\mu\nu_e))^2}, \\ M(\nu_\mu) = M_0 + M = \\ = \eta\frac{M_R(\nu_\mu) + M_L(\nu_e)}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}(M_R(\nu_\mu) - M_L(\nu_e))^2 + (ReM_D(\nu_\mu\nu_e))^2}.\end{gathered} \tag{65}$$

В результате возникают известные формулы для эффективных майорановских масс двух типов нейтрино, определяющие длину их взаимных нейтринных осцилляций через разность квадратов этих масс:

$$\begin{gathered}|M^2(\nu_\mu) - M^2(\nu_e)| = 4|M_0|M, \\ L_{\rm osc} = 4\pi E/|M^2(\nu_\mu) - M^2(\nu_e)| = \pi E/|M_0|M.\end{gathered} \tag{66}$$

Принципиально новым моментом паулиевской модели, следующим из структуры лагранжиана (64) и массовой формулы (65), является то, что эффективная масса свободной майорановской частицы включает два разных по своей природе слагаемых, имеющих свойства паулиевского изоскаляра и изовектора. Первый универсален и зависит только от массовых характеристик нейтрино, второй определяется флейворным квантовым числом κ и зависит от угла смешивания θ'. Универсальность первого означает, что отдельные компоненты волновой функции $\nu_{\rm md}(x)$ могут быть заданы теми же квантовыми числами флейворного типа, что и компоненты функции $\nu(x)$ паулиевской модели. Вместе с тем такая интерпретация показывает, что эффективная майорановская масса нейтрино двухфлейворной паулиевской модели формируется с участием не одного, а двух разных по своей природе хиггсовских скалярных полей, имеющих свойства скаляра и вектора паулиевского изопространства.

Наряду с длиной нейтринных осцилляций важным экспериментальным параметром физических нейтрино является угол смешивания. В феноменологических нейтринных схемах он вводится исходя из связи волновых функций физических левых нейтринных состояний с собственными функциями состояний фиксированной массы $\nu_{1L}(x)$, $\nu_{2L}(x)$, описываемой стандартными соотношениями

$$\begin{aligned}\nu_{eL}(x) &= \nu_{1L}(x)\cos\theta_{\rm mix} + \nu_{2L}(x)\sin\theta_{\rm mix}, \\ \nu_{\mu L}(x) &= \nu_{2L}(x)\cos\theta_{\rm mix} - \nu_{1L}(x)\sin\theta_{\rm mix}.\end{aligned} \tag{67}$$

В двухфлейворной паулиевской модели такие соотношения возникают как следствие паулиевских преобразований (64), переводящих лагранжиан (63) в диагональную форму, собственные функции которой составлены из волновых функций определенной массы и флейвора $(\nu_{\mathrm{md0}})_{e(\mu)\rho}(x)$, $\rho = L, R.$ Угол θ', задающий эти преобразования, может быть сопоставлен с углом смешивания θ_{mix} из (67), определяемым из опытов по нейтринным осцилляциям. Очевидно, что связи, эквивалентные (67), описываются в исследуемой модели преобразованием паулиевского типа, обратным к (64), и имеют вид

$$\nu_{\mathrm{md}}(x) = \mathrm{e}^{-i(\cos\chi\hat{\kappa}_y - \sin\chi\hat{\kappa}_x)\theta'/2}\nu_{\mathrm{md0}}(x) =$$
$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta'/2)(\nu_{\mathrm{md0}})_e(x) - \sin(\theta'/2)\mathrm{e}^{-i\chi}(\nu_{\mathrm{md0}})_\mu(x) \\ \cos(\theta'/2)(\nu_{\mathrm{md0}})_\mu(x) + \sin(\theta'/2)\mathrm{e}^{+i\chi}(\nu_{\mathrm{md0}})_e(x) \end{pmatrix},$$

$$\begin{gathered} (\nu_{\mathrm{md}})_{eL}(x) = \cos(\theta'/2)(\nu_{\mathrm{md0}})_{eL}(x) - \eta\sin(\theta'/2)(\nu^{GC}_{\mathrm{md0}})_{\mu L}(x), \\ (\nu^{GC}_{\mathrm{md}})_{\mu L}(x) = \cos(\theta'/2)(\nu^{GC}_{\mathrm{md0}})_{\mu L}(x) + \eta\sin(\theta'/2)(\nu_{\mathrm{md0}})_{eL}(x), \\ (\nu_{\mathrm{md}})_{\mu R}(x) = \cos(\theta'/2)(\nu_{\mathrm{md0}})_{\mu R}(x) + \eta\sin(\theta'/2)(\nu^{GC}_{\mathrm{md0}})_{eR}(x), \\ (\nu^{GC}_{\mathrm{md}})_{eR}(x) = \cos(\theta'/2)(\nu^{GC}_{\mathrm{md0}})_{eR}(x) - \eta\sin(\theta'/2)(\nu_{\mathrm{md0}})_{\mu R}(x), \\ \theta' = \eta\theta - \pi/2. \end{gathered} \tag{68}$$

(Фазовый фактор $\mathrm{e}^{-i\phi} = \eta_C$ включен в определение операции зарядового GC-сопряжения). Соотношения (68) есть аналог формул (67), представляющих собственные функции физических нейтрино через состояния определенной массы — базовые флейворные состояния паулиевской модели. Они совпадают с (67) при условиях

$$\begin{gathered} \nu_{eL}(x) = (\nu_{\mathrm{md}})_{eL}(x), \quad \nu_{\mu L}(x) = (\nu^{GC}_{\mathrm{md}})_{\mu L}(x), \quad \nu_{1L}(x) = (\nu_{\mathrm{md0}})_{eL}(x), \\ \nu_{2L}(x) = (\nu^{GC}_{\mathrm{md0}})_{\mu L}(x), \quad \mathrm{tg}\ (2\theta_{\mathrm{mix}}) = \eta\,\mathrm{ctg}\,\theta, \\ 2\theta_{\mathrm{mix}} = -\theta' = \pi/2 - \eta\theta, \quad \eta = +1. \end{gathered} \tag{69}$$

Первые из них описывают переход от стандартной схемы к майорановской схеме Зельдовича–Конопинского–Махмуда, вторые устанавливают связь экспериментального угла смешивания θ_{mix} с углом θ паулиевской схемы, задающим направление вектора обобщенного лептонного заряда двухфлейворного нейтрино относительно оси z паулиевского изопространства.

В качестве примера приложения исследованной модели дадим качественную интерпретацию результатов по нейтринным осцилляциям. Современные данные [33] по углам смешивания и разностям квадратов масс нейтрино

$$\begin{gathered} (\theta_{\mathrm{mix}})_{12} = (34 \pm 1,4)^\circ, \quad (\theta_{\mathrm{mix}})_{23} = (45 \pm 8,2)^\circ, \quad (\theta_{\mathrm{mix}})_{13} \leqslant 13^\circ, \\ \Delta M^2_{12} = M^2_1 - M^2_2 \sim 8\cdot 10^{-5}\ \text{эВ}^2, \quad \Delta M^2_{23} = M^2_2 - M^2_3 \sim 2,5\cdot 10^{-3}\ \text{эВ}^2. \end{gathered} \tag{70}$$

Очевидно, что вследствие малости угла смешивания $(\theta_{\rm mix})_{13}$ физические нейтрино электронного и τ-типа можно приближенно описать в рамках двухкомпонентного смешивания, однако мюонное нейтрино — смесь трех компонент — не описывается такой простой моделью. Для паулиевских параметров θ, задающих смеси $\nu_e{-}\nu_\mu$ и $\nu_\tau{-}\nu_\mu$, получаем, используя (69), следующие экспериментальные значения:

$$(\theta_{\text{эксп}})_{12} = (22 \pm 2,8)^\circ, \quad (\theta_{\text{эксп}})_{23} = (0 \pm 16)^\circ. \tag{71}$$

Эти значения показывают, что τ-нейтрино — квазидираковская смесь $\nu_{\tau L}$ и $\nu_{\mu R}$, которую можно описать как состояние лептонного заряда ЗКМ-типа с $q = +1$. Электронное нейтрино согласно (53) описывается смесью майорановских состояний $\nu_{e,\kappa}$ и $\nu_{\mu,\kappa}$, задаваемой обобщенным флейворным числом $\kappa = +1$, причем в силу (55) примесь мюонной майорановской компоненты составляет по величине около половины электронной. Мюонное нейтрино является сложной смесью трех нейтринных состояний. Трехфлейворная нейтринная майорановская модель на базе паулиевских преобразований будет представлена автором в отдельной, специальной работе.

§ 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, на базе общих паулиевских (кирально-паулиевских) преобразований построены две модели, описывающие майорановские свойства нейтральных свободных фермионов. Первая — модель одной частицы, имеющей состояния левой и правой киральности, — развивает первоначальную простейшую схему, предложенную Майораной [1] (см. также [30]), распространяя ее на случай, когда массовый член лагранжиана включает как дираковские, так и майорановские слагаемые. Вторая описывает систему нейтральных частиц двух разных флейворов, для одного из которых (условно, электронного) частичные состояния имеют левую киральность, а для другого (мюонного) — правую, что соответствует классификации лептонов в духе схемы Зельдовича–Конопинского–Махмуда. Исследованные модели являются частными случаями общих феноменологических майорановских схем, существующих в литературе, при этом последняя из них может быть модифицирована и использована для описания в ЗКМ-схеме простейшего двухфлейворного варианта нейтринных осцилляций.

Вследствие связи с паулиевскими преобразованиями паулиевские схемы обладают следующими особенностями.

1. Эти модели описывают специальный класс майорановских лагранжианов нейтральных частиц, связанных между собой общими паулиевскими (кирально-паулиевскими) преобразованиями, что позволяет получать произвольный лагранжиан модели исходя из основного лагранжиана определенного

представления данной модели. Кирально-паулиевские преобразования содержат собственно паулиевскую $SU(2)$-группу и киральную группу $U(1)$-типа. Для безмассовых частиц общая паулиевская симметрия является точной, однако она нарушается с введением в лагранжиан массовых членов.

2. В согласии с общей идеологией Стандартной модели массовые слагаемые паулиевских лагранжианов интерпретируются как результат спонтанного нарушения симметрии, выделяющего в пространстве паулиевских преобразований определенное направление с ненулевым значением вакуумного среднего хиггсовского поля. В предположении универсальности механизма нарушения массовые члены разных паулиевских лагранжианов связаны между собой теми же преобразованиями, что и соответствующие им выделенные направления. Гипотеза универсальности эквивалентна предположению, что это хиггсовское поле имеет свойства вектора паулиевского изопространства, причем вакуумное среднее фиксирует его модуль, задающий эффективную массу базовой частицы, а угловые координаты вектора, определяющие относительную величину слагаемых дираковского и майорановского типа, при спонтанном нарушении не меняются. Спонтанное нарушение симметрии по отношению к киральным преобразованиям связывается с нарушениями CP-инвариантности.

Модифицированный вариант двухфлейворной паулиевской схемы вводит в лагранжиан дополнительное массовое слагаемое, имеющее свойства изоскаляра паулиевского пространства, так что квантовые характеристики состояний, связываемые с изовекторной частью, сохраняются и в модифицированной схеме. Хиггсовское поле модифицированной модели состоит из двух компонент, отвечающих массовым членам лагранжиана паулиевского изовекторного и изоскалярного типа.

3. Понятие лептонного заряда нейтральных частиц расширяется до обобщенного лептонного заряда, связываемого с произвольным направлением паулиевского изопространства. Для произвольного лагранжиана соответствующий оператор обобщенного заряда включает параметры паулиевских поворотов. На базе этого оператора строится произведение обобщенного заряда и киральности, также сопоставляемое определенному вектору изопространства. Квантовые числа этих операторов позволяют универсально описывать состояния как дираковского (квазидираковского), так и майорановского типов. Обобщение лептонного заряда ведет к модификации операции зарядового сопряжения, в обобщенном зарядовом GC-сопряжении фазовые множители η_C для левых и правых частиц первой модели (электронных и мюонных второй) могут быть различными, что отвечает нарушению CP-симметрии.

4. Основные представления моделей задаются их лагранжианами и базовыми операторами, остальные связаны с ними паулиевскими преобразованиями. В первой модели это дираковский лагранжиан с основными представлениями: зарядовым (дираковским), где решения описываются лептонными зарядами, и майорановским (массовым) с двумя майорановскими решени-

ями определенной массы, которые различаются знаком условия $\psi^C(x) = \pm\psi(x)$. Их базовые операторы — операторы лептонного заряда и структуры массового слагаемого лагранжиана, последний связан с произведением лептонного заряда и киральности. В основном массовом — флейворном — представлении второй модели базовые нейтринные майорановские состояния электронного и мюонного флейвора не смешаны, их средний обобщенный лептонный заряд равен нулю. Основное зарядовое представление второй модели аналогично дираковскому первой (квазидираковское) и имеет базовые состояния определенного лептонного заряда ЗКМ-типа — смесь электронных и мюонных майорановских компонент с совпадающими по величине вкладами.

5. Интерпретация паулиевских моделей зависит от инверсных классов частиц, определяемых фазовыми факторами операции пространственной инверсии: $\eta_P = \pm i$ для инверсных A- и B-классов, $\eta_P = \pm 1$ для инверсных C- и D-классов соответственно. В существующих моделях принимается, что нейтрино, как и другие физические частицы, принадлежат A-B-классам, однако в нейтринных майорановских схемах эта гипотеза должна проверяться экспериментально. В паулиевских моделях форма майорановских условий связана с инверсным классом частиц, так что, например, условие $\psi^C(x) = \pm\psi(x)$ реализуется только для частиц инверсных A-B-классов, а его аналогом для C-D-классов служит условие $\psi^C(x) = \pm\gamma_5\psi(x)$. В общем случае форма майорановских условий обобщается, но по-прежнему определяется инверсным классом исследуемых частиц. Эта жесткая связь между формой майорановских условий и инверсным классом частиц может быть нарушена, если допустить, что фазовые факторы η_P не универсальны и разные физические нейтринные состояния принадлежат к разным инверсным классам.

6. Выбор базового оператора представления, его собственных функций и форма проекционных условий, выделяющих определенное собственное значение и собственную функцию, связан с инверсным классом исследуемых частиц. В общем случае существуют два альтернативных представления волновых функций состояний — массовое (флейворное) с оператором структуры массового члена лагранжиана (обобщенного флейвора) в качестве базового и зарядовое, когда им является оператор обобщенного лептонного заряда. Эти операторы не коммутируют и дополнительны. При универсальном определении фаз операции пространственной инверсии первое реализуется для частиц инверсных A-B-классов, второе — для частиц инверсных C-D-классов. Если лагранжиан нечувствителен к инверсному классу частиц, как, например, дираковский (квазидираковский), возможно альтернативное описание частиц в любом из этих представлений. Проекционные условия собственных функций имеют форму майорановских соотношений (первая модель) или связи между электронными и мюонными компонентами частичного и античастичного типа (вторая модель), причем для частиц инверсных A-B-классов их вид обобщает

известные условия Майораны, а для C-D-классов включает дополнительно оператор γ_5.

7. Базовый оператор основного представления — вектор. Он сопоставлен с осью z паулиевского изопространства, а его собственные значения — с проекциями этого вектора на ось z, базовые операторы произвольных представлений сопоставляются векторам других направлений. Общий паулиевский лагранжиан характеризуется углом θ между вектором обобщенного лептонного заряда и осью z паулиевского изопространства. Направление вектора по оси z отвечает дираковскому описанию, в плоскости x–y — чисто майорановскому, промежуточные случаи связаны со смешиванием основных дираковских или майорановских состояний (интерпретация зависит от выбора представления). В представлениях с базовым оператором обобщенного лептонного заряда основной случай отвечает дираковскому (квазидираковскому) описанию на базе независимых частичных и античастичных состояний, в промежуточных происходит их смешивание, определяемое углом θ, а майорановский случай соответствует $\theta = \eta\pi/2$, когда частичные и античастичные вклады в собственные состояния обобщенного лептонного заряда сравниваются. В представлениях с базовым оператором обобщенного флейворного (массового) типа в основном представлении смешивания майорановских состояний разного флейвора нет, промежуточные случаи отвечают включению смешивания, задаваемого углом θ', а чисто дираковский $\theta' = -\pi/2$ соответствует максимальному смешиванию основных флейворных (массовых) состояний. В экспериментах по нейтринным осцилляциям угол смешивания обычно отсчитывается от чисто майорановского описания и характеризует степень смешивания базовых, флейворных майорановских состояний в физических нейтрино.

8. Массовые члены майорановских лагранжианов включают слагаемые двух типов: задающие майорановские массы частиц $(M_{M1},\ M_{M2})$ и их смешивание (M_{12}). Последние интерпретируются в терминах смешивания майорановских частиц, к ним относятся дираковские (квазидираковские) массовые слагаемые модели. Паулиевские модели выделены тем, что майорановские массовые слагаемые описываемых ими частиц (левых и правых в первой модели, электронных и мюонных во второй) равны по модулю и противоположны по знаку $(M_{M2} = -M_{M1})$. В общепринятом методе диагонализации лагранжианов с переходом к майорановскому представлению первые приводятся к слагаемым, зависящим от эффективных масс частиц $(M_1,\ M_2)$, а вторые обращаются в нуль, так что состояния фиксированной эффективной массы не смешиваются. В паулиевском случае диагонализация реализуется кирально-паулиевскими преобразованиями и приводит к эффективным массам частиц:

$$M_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{4}|M_{M1} - M_{M2}|^2 + |M_{12}|^2}, \quad M_{M1} + M_{M2} = 0, \tag{72}$$

при этом длина осцилляций между электронными и мюонными нейтринными состояниями второй модели оказывается бесконечно большой:

$$L_{\mathrm{osc}} = 4\pi E/|M_1^2 - M_2^2| = \infty. \tag{73}$$

В модифицированной нейтринной паулиевской схеме в лагранжиан системы включается дополнительное универсальное слагаемое, эффективные массы разных нейтрино отличаются по величине, а длина их взаимных осцилляций становится конечной:

$$M_{1,2} = M_0 \pm \sqrt{|M_{M2}|^2 + |M_{12}|^2}, \quad L_{\mathrm{osc}} = \frac{\pi E}{M_0\sqrt{|M_{M2}|^2+|M_{12}|^2}}. \tag{74}$$

При этом параметр осцилляций ΔM^2 зависит только от массовых характеристик паулиевской модели — паулиевских инвариантов изовекторного и изоскалярного членов паулиевского лагранжиана, и не зависит от угла смешивания.

При исследовании моделей встает важный общий вопрос: существуют ли в природе майорановские частицы инверсных C-D-классов? Такие частицы должны иметь нестандартные свойства по отношению к операции пространственной инверсии, для них будут реализовываться специальные майорановские соотношения, включающие оператор γ_5, отличные от принятых в существующих майорановских схемах.

Автор выражает искреннюю благодарность Е. П. Велихову за постоянный интерес и поддержку, а также С. М. Биленькому, Б. В. Данилину, Г. В. Домогацкому, Д. И. Казакову, Ю. В. Линде, В. А. Рубакову, С. В. Семенову и В. В. Хрущеву за полезные дискуссии. Он также благодарен Институту Нильса Бора, Архиву Нильса Бора и Институту НОРДИТА (Копенгаген, Дания), в особенности Ф. Азеруду и П. Х. Дамгарду за поддержку его визита в Данию, теплый прием и организацию полезных семинаров. Работа поддержана РНЦ «Курчатовский институт», грант № 26 по фундаментальным исследованиям 2006–2007 гг.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Majorana E.* // Nuovo Cim. 1937. V. 14. P. 171; рус. пер.: *Майорана Э.* // ЭЧАЯ. 2003. Т. 34. С. 242.
2. *Fukuda Y. et al.* (SuperKamiokande Collab.) // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 81. P. 1562.
3. *Ahmad Q. R. et al.* (SNO Collab.) // Phys. Rev. Lett. 2002. V. 89. P. 011301;
Ahmed S. N. et al. (SNO Collab.) // Phys. Rev. Lett. 2004. V. 92. P. 181301.
4. *Eguchi K. et al.* (KamLand Collab.) // Phys. Rev. Lett. 2003. V. 90. P. 021802-1; hep-ex/0212021

5. *Понтекорво Б. М.* // ЖЭТФ. 1957. Т. 33. С. 549; ЖЭТФ. 1958. Т. 34. С. 247.

6. *Maki Z., Nakagawa M., Sakata S.* // Prog. Theor. Phys. 1962. V. 28. P. 870.

7. *Понтекорво Б. М.* // ЖЭТФ. 1967. Т. 53. С. 1717;
Gribov V., Pontecorvo B. // Phys. Lett. B. 1969. V. 28. P. 463;
Понтекорво Б. М. // Письма в ЖЭТФ. 1971. Т. 13. С. 281.

8. *Eliezer S., Ross D. A.* // Phys. Rev. D. 1974. V. 10. P. 3088;
Bilenky S. M., Pontecorvo B. // Phys. Lett. B. 1976. V. 61. P. 248.

9. *Bilenky S. M., Pontecorvo B.* // Lett. Nuovo Cim. 1973. V. 17. P. 569;
Fritzsh H., Menkovsky P. // Phys. Lett. B. 1976. V. 62. P. 72.

10. *Биленький С.М., Понтекорво Б. М.* // УФН. 1977. Т. 123. С. 181;
Биленький С. М. Препринт ОИЯИ Р2-83-441. Дубна, 1983.

11. *Боум Ф., Фогель П.* Физика массивных нейтрино. М.: Мир, 1990.

12. *Комминс Ю., Буксбаум Ф.* Слабые взаимодействия лептонов и кварков. М.: Энергоатомиздат, 1987.

13. *Щепкин М. Г.* // УФН. 1984. Т. 143. С. 513.

14. *Гапонов Ю. В.* Препринт РНЦ «Курчатовский институт» ИАЭ-6307/1. М., 2004.

15. *Гапонов Ю. В.* // Докл. АН. 2004. Т. 399. С. 334.

16. *Гапонов Ю. В.* // ЯФ. 2006. Т. 69. С. 683; Препринт ОИЯИ Р-2005-137. Дубна, 2005.

17. *Гапонов Ю. В.* // Докл. АН. 2006. Т. 410. С. 612.

18. *Pauli W.* // Nuovo Cim. 1957. V. 6. P. 204.

19. *Pursey W.* // Ibid. P. 266.

20. *Enz C. P.* // Ibid. P. 250.

21. *Нишиджима К.* Фундаментальные частицы. М.: Мир, 1965.

22. *Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б.* Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1969.

23. *Паули В.* Нильс Бор и развитие физики. М.: ИИЛ, 1958. С. 46.

24. *Мэтьюс П.* Релятивистская квантовая теория взаимодействий элементарных частиц. М.: ИИЛ, 1959. С. 73.

25. *Racah G.* // Nuovo Cim. 1937. V. 14. P. 322.

26. *Yang C. N., Tiomno J.* // Phys. Rev. 1950. V. 79. P. 495.

27. *Жарков Г. Ф.* // ЖЭТФ. 1950. Т. 20. С. 492.

28. *Akhmedov E. Kh.* Preprint FISIST/1-2000/CFIF; hep-ph/0001264.

29. *Rosen S. P.* // Phys. Lett. 1982. V. 48. P. 842.

30. *Case K. M.* // Phys. Rev. 1957. V. 107. P. 307.

31. *Зельдович Я. Б.* // Докл. АН СССР. 1952. Т. 86. С. 505.

32. *Konopinsky E. J., Mahmoud M.* // Phys. Rev. 1953. V. 92. P. 1045.

33. *Eidelman S. et al.* // Phys. Lett. B. 2004. V. 502. P. 13-1.

Получено 6 ноября 2007г.

Редактор *Е. В. Сабаева*

Подписано в печать 29.12.2007.
Формат $60 \times 90/16$. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 2,5. Уч.-изд. л. 3,05. Тираж 350 экз. Заказ № 56013.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.
E-mail: publish@jinr.ru
www.jinr.ru/publish/