

P2-2008-107

Д. В. Ширков

РЕНОРМ-ГРУППА БОГОЛЮБОВА

Статья представляет собой отдельную публикацию Дополнения к тому X 12-томного Собрания трудов Н.Н.Боголюбова, издаваемого к его 100-летию. Она содержит педагогический обзор по основам ренормализационной группы в формулировке, восходящей к трудам Мариуса Софуса Ли конца XIX столетия. Ренорм-группа трактуется как группа конечных непрерывных преобразований Ли, а лежащая в ее основе симметрия — как точная симметрия частного решения. Именно такая точка зрения была основой работ Н.Н.Боголюбова середины 1950-х гг., и мы используем термин «боголюбовская ренорм-группа».

Подобный взгляд на ренорм-группу, освобождая ее от ассоциаций с процедурой перенормировки ультрафиолетовых расходимостей, облегчает восприятие основ и метода ренорм-группы Боголюбова в квантовой теории, а также помогает уяснить ее сродство и различие с приближенной полугруппой Вильсона в теории критических явлений и другими построениями, употребляющими сходную терминологию. Приводятся несколько простых примеров из классической физики.

Заключительный раздел содержит конспективный обзор трех недавно (в 1980-е–1990-е гг.) возникших направлений развития боголюбовской ренорм-группы:

- *масс-зависимой ренорм-группы в окрестности порогов* применительно к нуждам Стандартной модели,
- свободной от нефизических сингулярностей *аналитической теории возмущений* в квантовой хромодинамике,
- *метода ренорм-групповых симметрий для улучшения решений краевых задач* математической физики.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н.Н.Боголюбова ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2008

### Перевод автора

This is a separate publication of the Supplement to volume X of Collected Works (in 12 volumes) by N.N.Bogoliubov devoted to his 100th birthday. The paper contains a propaedeutic review of the renormalization group fundamentals in the form ascending to Marius Sophus Lie treatise of the end of the 19th century. This standpoint treats renormalization group as a continuous Lie group of finite transformations, with the underlying symmetry being an exact symmetry of a partial solution. Just this interpretation was put by Bogoliubov as a base of his papers of the mid-1950s. That is the reason that we use the name «the Bogoliubov Renorm-Group».

Such an approach releases the renormalization group from any association with subtracting ultraviolet divergencies. In turn, it lightens the appreciation of foundations of the renormalization group and of the renormalization group method in quantum theory. At the same time it helps to realize its affinity and differences with approximate Wilson's semigroup in the theory of critical phenomena and with some other constructions that employ the related terminology. We give a few simple examples from the classical physics.

The last Section contains an overview of three recently (1980s–1990s) devised fields of application of the Bogoliubov Renorm-Group:

- *mass-dependent renorm-group in the threshold vicinity* in the context of the Standard Model,
- *Analytic Perturbation Theory* in Quantum Chromodynamics free of unphysical singularities, and
- *the «Renorm-Group Symmetries» method for improvement of boundary value problem solution* in mathematical physics.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2008

## 1. РЕНОРМ-ГРУППА КАК ГРУППА ЛИ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

**1.1. Происхождение идей.** *Историческое введение, РГ в КТП.* Ренормализационная группа (РГ) была обнаружена более полувека назад Штюкельбергом и Петерманом [1] в недрах квантовой теории поля (КТП) при изучении неопределенностей, возникающих в перенормированных результатах вычислений по теории возмущений. Последние получают в итоге сложной процедуры перенормировок, направленной на устранение ультрафиолетовых (УФ) расходимостей. На основе установленной групповой структуры в следующей работе [2] тех же авторов было записано дифференциальное групповое уравнение Ли в самом общем виде. К сожалению, эти пионерские работы не вызвали какого-либо отклика\*. Они оставались незамеченными вплоть до появления независимого исследования [3], в котором была указана групповая природа конечных перенормировочных преобразований Дайсона и сформулированы групповые функциональные уравнения\*\* для пропагаторов квантовой электродинамики (КЭД). В формулировке Боголюбова–Штюкельберга лежащая в основе ренорм-группы симметрия есть *точное* свойство перенормированного квантово-полевого решения для функций Грина.

Практическое использование РГ оказалось возможным после того, как Боголюбовым и Ширковым был предложен [5] конструктивный метод, *метод ренормализационной группы* (МРГ), доставляющий как средство определения истинной структуры сингулярности решения, так и регулярный алгоритм улучшения аппроксимационных свойств нового «РГ-инвариантного пертурбативного» решения в окрестности сингулярности.

На этой основе в середине 1950-х гг. в работах двух последних авторов [5, 6] метод ренорм-группы был успешно применен к изучению УФ и инфракрасных (ИК) асимптотик квантовой электродинамики, а также УФ-асимптотик [7, 8] двухзарядной модели пион-нуклонного взаимодействия.

В семидесятых годах XX века, вслед за работой Вильсона [9] по спиновой решетке, было показано, что РГ-подход полезен также и в ряде других разде-

---

\*Первая представляет короткую аннотацию, а вторая написана на французском языке.

\*\*Родственные полученным Гелл-Манном и Лоу [4] на основе приближенного построения, справедливого лишь на малых расстояниях, т. е. в ультрафиолетовом пределе.

лов физики: теории фазовых переходов для больших статистических систем, теории полимеров, турбулентности и пр. Однако в этих областях в большинстве случаев согласно духу работ Гелл-Манна–Лоу и Вильсона, в отличие от точной симметрии, лежащей в основе РГ в КТП, как правило, использовалась *приближенная симметрия*; отвечающие ей преобразования образуют приближенную полугруппу\*. В нашем изложении, для того чтобы провести четкое различие, термины «ренорм-группа» и «ренорм-групповая симметрия» всегда относятся к точному свойству решения\*\*, как это было ясно сформулировано в работах [3, 6] (см. главу IX в книге [10]) для КТП на основе конечных преобразований Дайсона.

Наиболее важным физическим понятием, возникшим в работах Боголюбова и его сотрудников в середине 1950-х гг., оказалось представление об *инвариантном заряде электрона* [3, 6]  $\bar{\alpha}(Q^2, \alpha)$ , а также более общее понятие инвариантной (бегущей) функции связи  $\bar{g}(Q^2, g)$ . Широко известным применением этого последнего явилось открытие феномена асимптотической свободы [11] в неабелевых калибровочных теориях, приведшее к созданию квантовой хромодинамики (КХД) как основы динамики кварк-глюонного уровня материи. Вторая важная концепция — представление о Великом объединении взаимодействий [12], существенно использующее сценарий схождения численных значений трех инвариантных функций связи  $\bar{\alpha}_i(Q^2)$  при приближении к области  $Q \sim 10^{17}$  МэВ  $\sim 10^{14} M_P$ .

В дальнейшем симметрия типа ренорм-групповой была, с одной стороны, найдена [13, 14] в ряде простых задач из разделов макроскопической физики, таких как статика, теория переноса, гидродинамика, где было установлено [15] близкое соответствие между РГ-симметрией и автомодельностью (степенным самоподобием), а с другой — в классической математической физике, где был развит [16–18] регулярный алгоритм\*\*\* улучшения аппроксимационных свойств приближенных решений краевых задач в окрестности сингулярности.

*Ренорм-групповой фольклор в КТП.* Начнем с некоторых простых утверждений, хорошо известных практикам в теории частиц. В КТП ренорм-группу, как правило, ассоциируют с возможностью представить некоторую наблюдаемую величину, например квадрат матричного элемента  $F$ , вычисленную согласно определенному перенормировочному предписанию в форме функции (по крайней мере) двух аргументов  $F(q^2/\mu^2, g_\mu)$  (для простоты рас-

---

\*Термин «ренормализационная группа Вильсона» не отвечает группе преобразований в математическом смысле.

\*\*Термины «ренорм-группа Боголюбова» и «квантово-полевая ренорм-группа» используются ниже как синонимы.

\*\*\*На основе представления ренорм-группы Боголюбова как группы Ли преобразований [19], использующий современную версию теории групп Ли.

смаатриваем безмассовый случай, т. е. УФ-асимптотику). Здесь  $q^2$  — лоренц-инвариантная кинематическая переменная, подобная квадрату полной энергии в с. ц. м.  $q^2 = s$  или квадрату переданного импульса  $q^2 = Q^2$ ,  $g_\mu$  — перенормированная константа связи, отнесенная к некоторой точке вычитания (масштабу в импульсной шкале, связанному со схемой перенормировки)  $\sqrt{Q^2} = \mu$ , зависимость которой от импульса нормировки  $\mu$  описывается особой функцией, *эффективной функцией (константой) связи*  $g_\mu = \bar{g}(\mu^2)$ .

При этом полагают\*, что дифференциальное РГ-уравнение следует из условия, что перенормированная  $F$  как наблюдаемая не может зависеть от выбора шкалы перенормировки\*\*

$$\frac{dF}{d\mu} = 0. \quad (1)$$

Это условие может быть реализовано в виде линейного дифференциального уравнения (ДУ) в частных производных

$$\left[ x \frac{\partial}{\partial x} - \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} \right] F(x, g) = 0, \quad (2)$$

где  $x = q^2/\mu^2$ ,  $g = g_\mu$ , а коэффициент  $\beta(g)$ , так называемая *бета-функция*\*\*\*, определяется соотношением

$$\beta(g_\mu) = z \frac{\partial \bar{g}(z)}{\partial z} \quad \text{при} \quad z = \mu^2. \quad (3)$$

Удобно представить эффективную функцию связи  $\bar{g}$  как функцию двух аргументов:  $q^2/\mu^2 = x$  и  $g_\mu$  со свойством  $\bar{g}(1, g) = g$ . Тогда  $\bar{g}$  удовлетворяет уравнениям (1) и (2). Поэтому ее также называют *инвариантной функцией связи*. Помимо того,  $\bar{g}$  удовлетворяет нелинейному ДУ

$$x \frac{\partial \bar{g}(x, g)}{\partial x} = \beta(\bar{g}(x, g)). \quad (4)$$

В то же время для некоторых других квантово-полевых величин  $s(x, g)$ , зависящих только от одного инвариантного кинематического аргумента, типа скалярной амплитуды пропагатора или момента структурной функции, и не инвариантных относительно действия ренорм-группы, дифференциальное уравнение часто пишут в виде

---

\*См., например, простые учебники по КТП [20].

\*\*Тем самым само наличие РГ-симметрии *ошибочно* связывается с наличием УФ-расходимостей.

\*\*\*В физическом слове она фигурирует как генератор группы, тогда как в математическом — как координата оператора Ли.

$$\left[ x \frac{\partial}{\partial x} - \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} - \gamma_s(g) \right] s(x, g) = 0, \quad (5)$$

где  $\gamma_s(g)$  именуют аномальной размерностью функции  $s(x, g)$ .

При применении этого формализма в практических целях необходимо задать  $\beta(g)$  и  $\gamma(g)$ . Для этого используют перенормированную теорию возмущений, т. е. разложение по степеням  $g$ .

Изложенное может рассматриваться как «ренорм-групповой фольклор».

**1.2. Математические основы.** *Функциональные и дифференциальные уравнения.* Обратимся к более последовательному изложению на примере того же *безмассового* случая, отвечающего УФ-пределу перенормируемой модели КТП с одной константой связи. Начнем с формулировки, использующей *функциональные уравнения* (ФУ), вытекающие\* из конечных перенормировочных преобразований Дайсона. Центральное место занимает ФУ для инвариантной функции связи

$$\bar{g}(x, g) = \bar{g} \left( \frac{x}{t}, \bar{g}(t, g) \right). \quad (6)$$

Известное нелинейное ДУ (4) может быть получено из него дифференцированием по  $x$  с последующим наложением условия  $t = x$ . В то же время, дифференцируя (6) по  $t$ , при  $t = 1$  приходим к ДУ в частных производных, аналогичному (2) и содержащему так называемый *оператор Ли*\*\*  $L(x, g)$ :

$$L(x, g) \bar{g}(x, g) = 0; \quad L(x, g) = \left[ x \frac{\partial}{\partial x} - \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} \right]. \quad (7)$$

Поэтому ФУ (6), наравне со аналогичным уравнением\*\*\*

$$\bar{s}(x, g) = \bar{s}(t, g) \bar{s} \left( \frac{x}{t}, \bar{g}(t, g) \right) \quad (8)$$

для амплитуд одетых пропагаторов и вершинных функций, следует принять как наиболее адекватную и общую формулировку РГ-симметрии в КТП. Именно из ФУ (6), (8) одновременно следуют как групповые нелинейные ДУ (4) и

$$x \frac{\partial s(x, g)}{\partial x} = s(x, g) \gamma_s(\bar{g}(x, g)), \quad (9)$$

так и линейные ДУ в частных производных (5) и (7).

---

\*См. главу «Ренормализационная группа» в книге [10] и приложение IX в учебнике [21].

\*\*В теории групп Ли преобразований коэффициенты при частных производных в  $L(x, g)$  именуются *координатами* оператора Ли.

\*\*\*Из которого следует уравнение (5).

*Между тем эти функциональные уравнения не имеют физического смысла и отражают лишь групповой закон сложения!*

Имеется в виду композиция преобразований, связанных с изменением параметра  $\mu$ , входящего в определение константы  $g_\mu$ . Следует рассматривать изменение точки привязки  $\mu$  и значения константы связи  $g_\mu$  как *операцию*  $\mu_i \rightarrow \mu_k, g_i \rightarrow g_k$ , зависящую от вещественного непрерывного положительного числового параметра  $t$ , над элементом группы  $\mathcal{G}_i = \mathcal{G}(\mu_i, g_i)$ , характеризуемым двумя параметрами. Операция  $R_t$

$$R_t \mathcal{G}_i = \mathcal{G}_k \sim R_t \{ \mu_i^2 \rightarrow \mu_k^2 = t \mu_i^2, \quad g_i \rightarrow g_k = \bar{g}(t, g_i) \} \quad (10)$$

содержит растяжение первого аргумента функции  $\mathcal{G}$  и более сложное функциональное преобразование второго.

Групповая структура операции растяжения (так называемого скейлинга) аргумента  $\mu$  очевидна, а по поводу второго компонента преобразования  $R_t$  заметим, что если в (6) положить  $x = \tau t$ , то его левая часть отвечает применению  $R_{\tau t}$  к  $g$ , в то время как правая\* —  $R_\tau \otimes R_t g$ :

$$R_{\tau t} g = \bar{g}(\tau t, g); \quad R_\tau \otimes R_t g = R_\tau \bar{g}(t, g) = \bar{g}(\tau, \bar{g}(t, g)).$$

Тем самым уравнение (6) обеспечивает выполнение группового закона композиции (умножения)  $R_{\tau t} = R_\tau \otimes R_t$ , а его суть сводится к условию, что преобразования  $R_t$  (10) образуют\*\* непрерывную группу Ли преобразований.

*Абстрактная формулировка закона композиции.* Чтобы сделать это утверждение более прозрачным, покажем, что ФУ (6) может быть получено непосредственно из группового закона.

С этой целью рассмотрим преобразование  $T(l)$  некоторого абстрактного набора  $\mathcal{M}$  элементов  $M_i$  в себя, зависящее от непрерывного вещественного параметра  $l$ , принимающего значения на всей числовой оси ( $-\infty < l < \infty$ ), такое, что для каждого элемента  $M$  имеет место соотношение

$$T(l) M = M' \quad (M, M' \subset \mathcal{M}).$$

Допустим, что множество  $\mathcal{M}$  может быть спроектировано на числовую ось, т. е. что каждому элементу  $M_i$  соответствует вещественное число  $g_i$ . Тогда преобразование записывается в явном аналитическом виде

$$T(l)g = g' = G(l, g),$$

---

\*Здесь символом  $\otimes$  обозначена композиция двух последовательных преобразований.

\*\*Уравнение (6) является простым частным случаем общего предложения Софуса Ли [19] (см. также статью «Ли-группа преобразований» в [22]) более чем вековой давности.

где  $G$  — непрерывная функция двух аргументов, удовлетворяющая условию  $G(0, g) = g$ , отвечающему единичному преобразованию  $T(0) = \mathbf{E}$ .

Преобразования  $T(l)$  образуют группу, если удовлетворяют закону композиции

$$T(\lambda) \oplus T(l) = T(\lambda + l),$$

которому соответствует функциональное уравнение для  $G$ :

$$G\{\lambda, G(l, g)\} = G(\lambda + l, g). \quad (11)$$

Согласно теории групп Ли преобразований, достаточно рассмотреть инфинитезимальное преобразование (при  $\lambda \ll 1$ ), т. е. перейти к ДУ

$$\frac{\partial G(l, g)}{\partial l} = \beta\{G(l, g)\}. \quad (12)$$

Здесь генератор определяется через производную

$$\beta(g) = \frac{\partial G(\varepsilon, g)}{\partial \varepsilon} \quad \text{при} \quad \varepsilon = 0.$$

Выполняя логарифмическую замену переменных

$$l = \ln x, \quad \lambda = \ln t, \quad G(l, g) = \bar{g}(x, g), \quad T(\ln t) = R_t, \quad (13)$$

взамен (11) и (12) получаем (6) и (4).

*Преобразование репараметризации.* Простой вариант ренормализационной группы может быть определен как непрерывная однопараметрическая группа специфических преобразований, *преобразований репараметризации*  $R_t$  некоторого частного решения краевой задачи (КЗ), когда это решение фиксируется краевыми (граничными) условиями. Это преобразование включает параметры граничных условий и отвечает изменению способа наложения этих условий.

Для примера рассмотрим функцию одного аргумента  $f(x)$ , характеризующую некоторое частное решение КЗ. Допустим, что эта *характеристика\** фиксируется своим числовым граничным значением  $f(x_0) = f_0$ . Формально включим в число аргументов граничные параметры  $f(x) = f(x, x_0, f_0)$  (этот шаг представляет операцию *погружения*). РГ-преобразование отвечает теперь изменению способа параметризации решения; вместо пары  $\{x_0, f_0\}$  для нее можно использовать другую  $\{x_i, f_i\}$ . Иными словами, граничное условие не обязательно налагать при значении  $x = x_0$ ; вместо него можно взять любую точку  $x_i$ .

---

\*Примеры таких характеристик приведены ниже, в п. 2.2.



Если записать  $f$  в виде функции двух безразмерных аргументов  $F(x/x_0, f_0)$  со свойством  $F(1, \gamma) = \gamma$ , то соотношение  $F(x/x_0, f_0) = F(x/x_1, f_1)$  отражает тогда тот факт, что при изменении способа наложения граничного условия форма функции  $F$  не меняется (как, например, в случае  $F(x, \gamma) = \Phi(\ln x + \gamma)$ ). Замечая еще, что  $f_1 = F(x_1/x_0, f_0)$ , и вводя обозначения:  $\xi = x/x_0$  и  $t = x_1/x_0$ , получаем функциональное уравнение

$$F(\xi, f_0) = F\left(\frac{\xi}{t}, F(t, f_0)\right),$$

совпадающее с (6). Используемая операция эквивалентна (10):

$$R_t : \{\xi \rightarrow \xi/t, f_0 \rightarrow f_1 = F(t, f_0)\}.$$

Простейший аналог РГ-преобразования в форме, отвечающей уравнению (11), теперь представим одновременным изменением двух характеристик частного решения краевой задачи, скажем,  $q = \lambda + l$  и  $g$ :

$$R(l) : \{q \rightarrow q' = q - l, g \rightarrow g' = G(l, g)\}, \quad (14)$$

причем преобразование первой из них является трансляцией, а второй — имеет более сложный функциональный вид. Уравнение (11) на функцию  $G$  обеспечивает выполнение группового свойства преобразования  $R(l)$ , заданного (14).

Выполняя замену переменных  $q \rightarrow x = e^q$ ,  $l \rightarrow t = e^l$  и функции преобразования согласно (13), получаем уравнения (4), (6) и преобразование

$$R_t : \{x' = x/t, g' = \bar{g}(t, g)\} \quad (15)$$

вместо уравнений (12), (11) и (14). Можно говорить о соотношениях (4), (6) и (15) как о мультипликативной версии РГ-уравнений (имея в виду, что предыдущие уравнения отвечают аддитивной форме). Последние представляют ренорм-групповое преобразование и уравнения для эффективной функции связи в безмассовой КТП с одной константой связи  $g$ . Здесь  $x = Q^2/\mu^2$  есть отношение квадрата 4-вектора импульса  $Q$  к квадрату 4-импульса  $\mu$ , в котором произведена нормировка.

Представляют также интерес функции  $\phi(q, g)$ , которые преобразуются по линейному представлению ренормализационной группы

$$\phi(q, g) \rightarrow R(l)\phi = z(l, g)\phi(q', g'), \quad (16)$$

соответствующему (8).

Ниже, в п. 2.2, приведены некоторые простейшие обобщения преобразования (15).

## 2. РЕНОРМ-ГРУППА И ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ САМОПОДОБИЕ

**2.1. Функциональное самоподобие.** *Самоподобие.* Ренорм-групповые преобразования, обсуждавшиеся выше, непосредственно связаны со свойством самоподобия (СП), хорошо известным в классической математической физике. Преобразование самоподобия, записанное для системы нелинейных ДУ, уже более ста лет используется в динамике жидкостей и газов. Это однопараметрическое преобразование (параметр  $\lambda$ ), определяемое как одновременное степенное растяжение (скейлинг) аргументов  $z = \{x, t, \dots\}$  и функций  $V_i(x, t, \dots)$ :

$$S_\lambda : \{x \rightarrow x\lambda, \quad t \rightarrow t\lambda^a, \quad V_i(z) \rightarrow V_i'(z') = \lambda^{\nu_i} V_i(z')\}.$$

Подчеркивая степенную структуру такого преобразования, будем называть его *степенным* самоподобием (ССП). Согласно Зельдовичу и Баренблатту [23] степенное самоподобие может быть разделено на два класса:

а) СПП первого класса, когда степени  $a, \nu, \dots$  являются целыми или рациональными числами; обычно их значения определяются из соображений размерности (рациональное степенное самоподобие);

б) СПП второго класса, при котором некоторые из степеней иррациональны, их значения определяются из динамики (фрактальное степенное самоподобие).

*Ренорм-группа и степенное самоподобие.* Чтобы связать РГ-преобразование со степенным самоподобием, обратимся к ФУ для инвариантного заряда, которое запишем в виде

$$\bar{g}(xt, g) = \bar{g}(x, \bar{g}(t, g)). \quad (6')$$

Его общее решение зависит от некоторой произвольной функции одного аргумента, см. ниже уравнение (48) в п. 4.1. Однако сейчас рассмотрим специальное частное решение, линейное по второму аргументу

$$\bar{g}(x, g) = g\varphi(x).$$

Здесь в силу (6) функция  $\varphi(x)$  удовлетворяет уравнению  $\varphi(xt) = \varphi(x)\varphi(t)$ , общее решение которого имеет вид  $\varphi(x) = x^\nu$ . Поэтому

$$\bar{g}(x, t) = gx^\nu,$$

и РГ-преобразование (15) сводится к преобразованию степенного самоподобия:

$$R_t : \{x \rightarrow xt^{-1}, \quad g \rightarrow gt^\nu\} = S_t. \quad (17)$$

В общем случае решение уравнения (6) вместо степенной зависимости содержит произвольную функцию. Поэтому можно рассматривать преобразования (14)–(16) как обобщения степенных преобразований самоподобия

на случай преобразований, содержащих функциональную зависимость. Естественно именовать последние преобразованиями *функционального самоподобия* (ФСП). Итак, РГ = ФСП.

*Основа РГ = ФСП симметрии.* Теперь можно ответить на вопрос

Что такое РГ = ФСП?

*о природе симметрии*, лежащей в основе функционального самоподобия и ренорм-групповых преобразований.

Как легко видеть на примерах, представленных выше, это *не симметрия уравнений* данной физической задачи, а

*симметрия ее частного решения, рассматриваемого как функция существенных переменных, включающих параметры граничных условий.*

РГ-симметрию можно определить как свойство инвариантности (или ковариантности) некоторой величины, связанной с частным решением, относительно способа задания граничного значения этого решения.

Следует также отметить, что важным подлежащим свойством физической системы является однородность, которая, однако, может быть нарушена\* дискретным образом.

**2.2. Классические иллюстрации.** Симметрия функционального самоподобия является простым и распространенным свойством физических явлений. Она присуща решениям задач из различных областей физики.

*Упругий прут.* Начнем с примера из статики. Представим себе упругий прут, фиксированный под некоторым углом  $g_0$  в заданной точке (точка 0 на рис. 1) и искривленный какой-либо внешней силой, например, силой тяжести, давлением движущегося газа или жидкости. Форма прута может быть описана углом между касательной к пруту и вертикалью, который будем считать функцией  $g = g(l)$  расстояния  $l$  вдоль прута от точки фиксации 0. При однородности прута и поля внешних сил вдоль длины прута (т.е. при независимости от  $l$ ) угол  $g(l)$  может быть представлен в виде функции  $G(l, g_0)$ , существенно зависящей от начального значения угла  $g_0$ , который задан в точке крепления

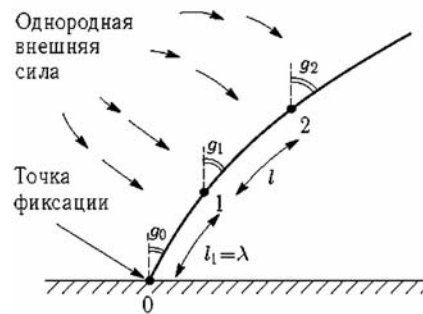


Рис. 1. Упругий прут

\*См. ниже рис. 3.

прута. Естественно,  $G$  будет зависеть также и от других аргументов — внешних сил и параметров материала, из которого сделан прут, однако в данном контексте они постоянны в процессе рассуждения и потому несущественны.

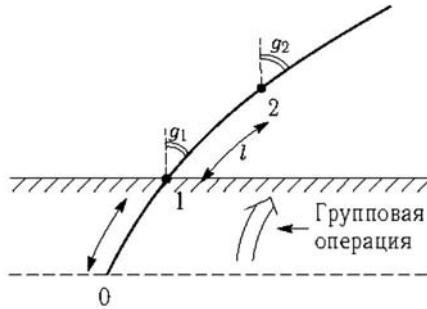


Рис. 2. Групповая операция для прута

Чтобы получить последнюю формулу правой части второго уравнения, следует вообразить, что фиксируется точка 1 вместо точки 0, как на рис. 2. Комбинируя эти уравнения, приходим к закону композиции (11) для функции  $G(l, g)$ .

При выборе формы записи в (18) подразумевалось, что прут имеет бесконечную длину. Если же ввести конечную длину  $L$ , рис. 3, то функцию  $G(l, g)$  следует заменить на функцию  $G(l, L, g)$  трех существенных аргументов, где второй из них описывает расстояние между точкой фиксации, в которой задан «начальный» угол, и свободным концом.

Рассмотрим две произвольные точки на пруте, 1 и 2 (рис. 1), с координатами  $l_1 = \lambda$  и  $l_2 = \lambda + l$ . Углы  $g_i$  в точках 0, 1 и 2 могут быть связаны с помощью функции  $G$  соотношениями

$$\begin{aligned} g_1 &= G(\lambda, g_0), \\ g_2 &= G(\lambda + l, g_0) = G(l, g_1). \end{aligned} \quad (18)$$

Чтобы получить последнюю формулу правой части второго уравнения,

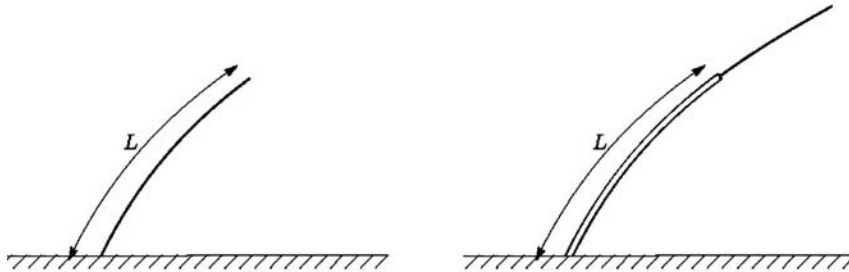


Рис. 3. Прут конечной длины  $L$  или с дискретной неоднородностью

Комбинируя соотношения

$$g_1 = G(\lambda, L, g_0), \quad g_2 = G(\lambda + l, L, g_0) = G(l, L - \lambda, g_1), \quad (19)$$

получаем более сложный закон композиции

$$G(l + \lambda, L, g) = G(l, L - \lambda, G(\lambda, L, g)). \quad (20)$$

Отметим, что в (19) и (20) аргумент  $L$  необязательно является длиной прута. Он может отвечать расстоянию между фиксированной точкой и точкой, в которой дискретно меняются существенные свойства прута (например, толщина прута или его упругость). Вообще говоря, аргумент  $L$  описывает *дискретное нарушение однородности* свойств рассматриваемой системы. Такое нарушение может иметь место в нескольких точках. Их координаты должны быть введены как дополнительные аргументы  $G: L \rightarrow \{L\}$ . В КТП это соответствует введению масс частиц.

*Слабая ударная волна.* Другой простой пример можно взять из гидродинамики. Рассмотрим слабую ударную волну в одномерном случае. График зависимости скорости от расстояния до источника в заданный момент времени имеет треугольную форму, показанную на рис. 4, и может быть описан выражением

$$v(l) = \begin{cases} lV/L & \text{при } l \leq x; \\ 0 & \text{при } l > x, \end{cases} \quad (21)$$

где  $x = x(t)$  — положение фронта и  $V = v(t)$  — скорость фронта. В отсутствие вязкости выполняется своеобразный «закон сохранения»

$$LV = \text{const},$$

где  $L$  и  $V$  — координата и скорость на фронте ударной волны, зависящие от времени, которые удобно представлять как функции положения фронта  $L = x$ ,  $V = V(x)$ . В случае однородной физической среды скорость фронта  $V(x)$  следует рассматривать как функцию двух существенных аргументов — значения скорости  $V_0 = V(x_0)$  в некоторой предшествующей точке ( $x_0 < x$ ) и координаты  $x_0$ . Ее можно записать в виде

$$V(x) = G(x/x_0, V_0).$$

Если выбрать три точки  $x_0$ ,  $x_1$  и  $x_2$ , как показано на рис. 5, то при условии однородности начальное условие может быть задано как в  $x_0$ , так и в  $x_1$ .

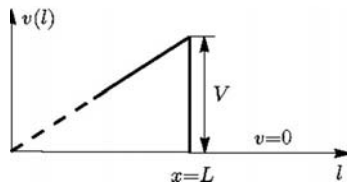


Рис. 4. Слабая ударная волна

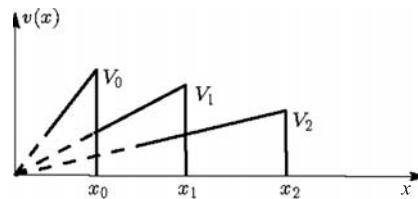


Рис. 5. Эволюция слабой ударной волны

Таким образом, приходим к уравнению ФСП, аналогичному (6):

$$V_2 = G(x_2/x_0, V_0) = G(x_2/x_1, V_1) = G(x_2/x_1, G(x_1/x_0, V_0)).$$

*Теория переноса.* Сходное рассуждение было проведено [13] при анализе одномерной проблемы переноса. Рассмотрим полупространство, заполненное однородной средой, на поверхность которого слева падает поток (излучения или частиц) интенсивности  $g_0$ , рис. 6. Проследим за величиной потока



Рис. 6. Одномерный перенос

внутри среды на расстоянии  $l$  от границы. Вследствие однородности вдоль координаты  $l$  интенсивность потока  $g(l)$  следует записать в виде функции двух существенных аргументов,  $g(l) = G(l, g_0)$ . Величины потока в точках 0, 1 и 2, показанных на рис. 6, могут быть теперь связаны друг с другом соотношениями транзитивности:

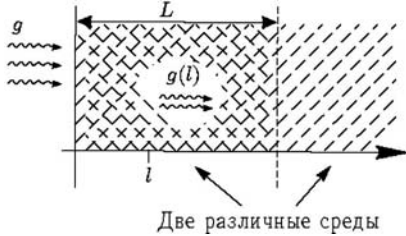


Рис. 7. Перенос в среде с внутренней границей

Эта постановка допускает обобщения, связанные с дискретной неоднородностью. Обратимся к системе двух разных однородных сред, разделенных внутренней поверхностью  $l = L$ , как это показано на рис. 7.

Как и для упругого прута, точка  $l = L$ , нарушающая свойство однородности, может отвечать границе с пустым полупространством справа, и результирующее уравнение совпадет с (20).

$$g_1 = G(\lambda, g_0),$$

$$g_2 = G(\lambda + l, g_0) = G(l, g_1),$$

что приводит к уравнению (11), т.е. к аддитивной версии функционального уравнения самоподобия.

Проблема переноса допускает и другие обобщения, описываемые «размножением» последнего аргумента\*. Рассмотрим перенос излучения двух различных частот  $\omega_1$  и  $\omega_2$  (или перенос частиц двух разных энергий или сортов), как показано на рис. 8. Предположим, что материал среды обладает такими свойствами, что процессы переноса двух потоков не являются независимыми. Тогда характеристические функции этих потоков  $g(l)$  и  $h(l)$ , будучи зависимыми от обоих граничных значений  $g_0, h_0$ , должны быть представлены как функции трех существенных аргументов  $g(l) = G(l, g_0, h_0)$ ,  $h(l) = H(l, g_0, h_0)$ . После применения групповой операции  $l \rightarrow l - \lambda$  приходим к системе двух ФУ:

$$G(l + \lambda, g, h) = G(l, g_\lambda, h_\lambda), \quad H(l + \lambda, g, h) = H(l, g_\lambda, h_\lambda); \quad (22)$$

$$g_\lambda \equiv G(\lambda, g, h), \quad h_\lambda \equiv H(\lambda, g, h),$$

которая является аддитивной версией системы (29) (см. ниже) при  $k = 2$ .

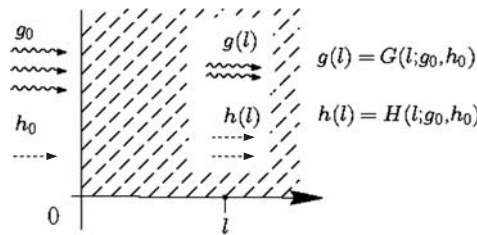


Рис. 8. Двухкомпонентный перенос

Теперь можно сделать важный вывод, что общим свойством, приводящим к функциональным групповым уравнениям, является свойство транзитивности некоторой физической величины относительно способа задания ее граничных или начальных условий.

Отметим еще раз, что РГ = ФСП симметрия является не симметрией уравнений, но симметрией решений (или уравнений и граничных условий, рассматриваемых как целое).

### 3. РЕНОРМ-ГРУППА В КТП

#### 3.1. Ренорм-групповой формализм в КТП. Функциональные уравнения.

Если не пренебрегать массой частицы  $m$ , то в эффективную функцию связи  $\bar{g}$  следует ввести дополнительный аргумент и рассматривать ее как функцию трех переменных.

\*Что в квантово-полевоом контексте отвечает случаю с несколькими константами связи и описывается уравнениями (28)–(30).

Не составляет труда убедиться, что известное функциональное уравнение Боголюбова–Ширкова [3]\* для инвариантного заряда в массовом случае

$$\bar{g}(x, y; g) = \bar{g}\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}; \bar{g}(t, y; g)\right) \quad (23)$$

может рассматриваться в качестве мультипликативного аналога уравнения (20), отражающего *дискретное нарушение однородности*. В КТП за такое нарушение ответственна масса частицы.

Добавление третьего аргумента\*\*  $y = m^2/\mu^2$  усложняет групповое преобразование (15):

$$R_t : \{x' = x/t, y' = y/t, g' = \bar{g}(t, y; g)\}, \quad (24)$$

но оставляет неизменным преобразование в форме (10).

Существенно, что новый «массовый» аргумент  $y$  (который по своей природе должен быть близок переменной  $x$ , так как он преобразуется подобно ей) входит в закон преобразования для  $g$ . Оператор Ли теперь

$$L(x, y; g) = \left\{ x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} - \beta(y, g) \frac{\partial}{\partial g} \right\} \quad (25)$$

содержит координаты, зависящие от  $y$ .

Отметим, что его можно также записать в виде

$$L(\ln \mu; g) = \left\{ \mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} - \tilde{\beta}(\mu, g) \frac{\partial}{\partial g} \right\}, \quad (26)$$

справедливым как в массовом, так и в безмассовом случае.

Если в рассматриваемой модели КТП имеется несколько масс (как, например, в КХД), то появляется несколько массовых аргументов

$$y \rightarrow \{y\} = y_1, y_2, \dots, y_n. \quad (27)$$

В дальнейшем будем использовать уравнения (24), (25), имея в виду возможную модификацию (27) и «семейное» обозначение  $\{y\}$ .

В «многозарядном случае» (т. е. при наличии нескольких констант связи)  $g \rightarrow \{g\} = g_1, \dots, g_k$  возникает «семейство» эффективных функций связи:

$$\bar{g} \rightarrow \{\bar{g}\}, \quad \bar{g}_i = \bar{g}_i(x, y; \{g\}), \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (28)$$

---

\*См. также формулы (47.32) и (48.5) в [10].

\*\*Именно такое введение массового аргумента удобно при переходе к безмассовому случаю  $y \rightarrow 0$ .



удовлетворяющее системе связанных функциональных уравнений

$$\bar{g}_i(x, y; \{g\}) = \bar{g}_i(x/t, y/t; \dots \bar{g}_j(t, y; \{g\}) \dots), \quad (29)$$

представляющей обобщение\* (6). Здесь РГ-преобразование принимает вид

$$R_t: \quad \{x \rightarrow x/t, y \rightarrow y/t, \{g\} \rightarrow \{\bar{g}(t)\}\}, \quad \bar{g}_i(t) = \bar{g}_i(t, y; \{g\}). \quad (30)$$

*Дифференциальная формулировка РГ.* Уравнения, отвечающие инфинитезимальным преобразованиям, могут быть получены двумя различными путями. Дифференцируя ФУ

$$\bar{g}(x, y; g) = \bar{g}\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}; \bar{g}(t, y; g)\right) \quad (23)$$

по  $x$  и полагая после этого  $t = x$ , получаем

$$x \frac{\partial \bar{g}(x, y; g)}{\partial x} = \beta\left(\frac{y}{x}, \bar{g}(x, y; g)\right), \quad (31)$$

где

$$\beta(y, g) = \left. \frac{\partial \bar{g}(t, y; g)}{\partial t} \right|_{t=1}. \quad (32)$$

Нелинейное уравнение (31) является обобщением (4) на массовый случай.

В то же время, продифференцировав уравнение (23) по  $t$  в точке  $t = 1$ , получаем линейное уравнение в частных производных с оператором (25):

$$\left[ x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} - \beta(y, g) \frac{\partial}{\partial g} \right] \bar{g}(x, y; g) = 0. \quad (33)$$

Применение этих операций к «массовому» ФУ для одноаргументной функции

$$s(x, y; g) = s\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}; \bar{g}(t, y; g)\right), \quad (34)$$

(см. также ниже уравнение (41)) дает

$$\frac{\partial s(x, y; g)}{\partial \ln x} = \gamma_s \left[ \frac{y}{x}, g(x, y; g) \right] s(x, y; g); \quad \gamma_s(y, g) = \left. \frac{\partial s(t, y; g)}{\partial t} \right|_{t=1} \quad (35)$$

и

$$\left\{ x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} - \beta(y, g) \frac{\partial}{\partial g} - \gamma_s(y, g) \right\} s(x, y; g) = 0, \quad (36)$$

---

\*В абстрактной формулировке п. 1.2 этому отвечает случай, когда элемент  $M_i$  из  $\mathcal{M}$  представлен с помощью  $k$  чисел, т. е. точкой  $\{g\}$  в  $k$ -мерном вещественном пространстве параметров.

причем  $\gamma_s$  именуется *аномальной размерностью*  $s$ . Для матричного элемента  $M$ , удовлетворяющего ФУ (43), приведенным ниже, эта размерность равняется нулю. Соответственно

$$\left\{ \sum_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i} - y \frac{\partial}{\partial y} - \beta(y, g) \frac{\partial}{\partial g} \right\} M(x, y; g) = 0. \quad (37)$$

Уравнения (33), (36) и (37) выражают независимость левых частей ФУ от переменной  $t$ , т. е. взаимную компенсацию зависимостей от  $t$  через три (и, возможно, большее число) аргумента. Они могут быть названы *компенсационными* уравнениями, в отличие от нелинейных уравнений вида (31), (35), которые иногда именуют *эволюционными*\*.

Подчеркнем, что компенсационные, равно как и эволюционные, ДУ, взятые совместно с нормализационными (граничными) условиями (42), например,  $\bar{g}(1, g) = g$ , эквивалентны ФУ и друг другу. В то же время эволюционные уравнения более удобны для практического построения решений, если известны генераторы  $\beta, \gamma$ .

Несложно сформулировать групповые ДУ для случая с несколькими константами связи (многозарядная модель) путем подходящего дифференцирования уравнений (29). Например, система эволюционных уравнений принимает вид

$$x \frac{\partial \bar{g}_i(x, y, \{g\})}{\partial x} = \beta_i \left( \frac{y}{x}, \{ \bar{g}_j(x, y, \{g\}) \} \right). \quad (38)$$

Заметим также, что УФ-предел компенсационных ДУ, например,

$$\left\{ x \frac{\partial}{\partial x} - \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} - \gamma(g) \right\} s(x, g) = 0, \quad (39)$$

совпадает с УФ-пределом специальных незамкнутых уравнений

$$\left\{ x \frac{\partial}{\partial x} - \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} - \gamma(g) \right\} s(x, g) = \Delta S, \quad (C-S)$$

полученных в начале 1970-х гг. Калланом и Симанчиком [24]. Правая часть этого уравнения  $\Delta S$  содержит результат вставки массового контрчлена во все внутренние линии диаграмм для рассматриваемой функции  $s$ . По этой причине в литературе компенсационные уравнения часто называют уравнениями Каллана–Симанчика. Однако эти уравнения в форме (33), (36) были впервые получены Овсянниковым [25] при решении функциональных ренорм-групповых уравнений. Поэтому мы считаем уместным связывать компенсационные ДУ с именем Овсянникова.

---

\*Последние являются уравнениями характеристик для компенсационных уравнений.

**3.2. РГ в КЭД. Поляризация вакуума в КТП.** Существенной чертой квантовой теории является присутствие виртуальных состояний и виртуальных переходов. Так, в КЭД имеет место процесс виртуального превращения фотона в электрон-позитронную пару и обратно:  $\gamma \leftrightarrow e^+ + e^-$ . Последовательность двух таких переходов:  $\gamma \rightarrow e^+ + e^- \rightarrow \gamma$ , согласно Фейнману может быть представлена графически в виде однопетлевой диаграммы поляризации вакуума, изображенной на рис. 9 (первая диаграмма правой части).

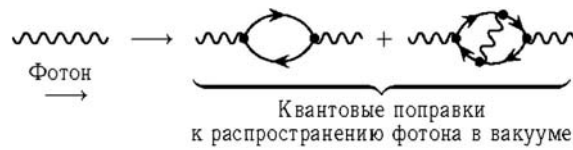


Рис. 9. Поляризация вакуума в КЭД

Процессы поляризации вакуума приводят к некоторым специфическим явлениям и, в частности, к понятию эффективного заряда электрона. Чтобы объяснить это понятие, обратимся к классической аналогии.

Рассмотрим поляризуемую среду, состоящую из молекул, которые можно представить в виде миниатюрных электрических диполей. Погрузим в эту среду сторонний электрический заряд  $E$ . Вследствие притяжения зарядов противоположных знаков элементарные диполи изменяют свои положения так, что его заряд  $Q_0$  окажется частично заэкранированным. В результате на расстоянии  $r$  от заряда  $E$  электрический потенциал будет меньше, чем соответствующее кулоновское значение  $Q_0/r$  в вакууме, он может быть представлен в виде  $Q(r)/r$ , где, вообще говоря,  $Q(r) \leq Q_0$ . Введенная величина  $Q(r)$  называется эффективным зарядом, который при уменьшении  $r$  возрастает и стремится к  $Q_0$  при  $r \rightarrow 0$ , как показано ниже, на рис. 11, *a*.

В КТП такой «поляризуемой среде» отвечает квантовый вакуум, т. е. межчастичное пространство. Он не является пустым, будучи заполнен вакуумными флуктуациями, т. е. виртуальными частицами. Подобные «нулевые флуктуации» представляют собой хорошо известное свойство основного состояния квантовых систем. Нулевые осцилляции в КЭД в основном состоят из короткоживущих виртуальных пар ( $e^+, e^-$ ), которые в нашей аналогии играют роль маленьких электрических диполей. Рассмотрим влияние этих флуктуаций подробнее.

На рис. 10 показаны фейнмановские диаграммы, схематически описывающие процесс измерения заряда стороннего электрона, обозначенного символом  $E$ . Измерение производится с помощью внешнего электромагнитного поля  $A_{\text{ext}}$ . Рис. 10, *a* отвечает классической картине без квантовых эффек-

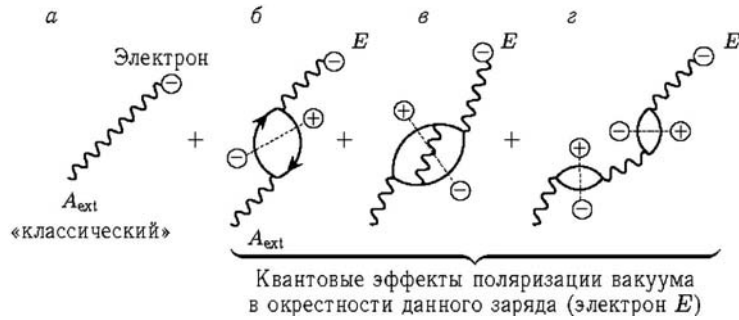


Рис. 10. Измерение заряда электрона:  $a$  — классическое,  $b$  — квантовое

тов. На рис. 10,  $b$  представлен случай, когда пробный фотон (квант внешнего поля) виртуально распадается на  $(e^+, e^-)$ -пару. Пара образует виртуальный диполь (отмеченный пунктиром), что приводит к частичной экранировке измеряемого заряда. Поскольку этот процесс включает два элементарных электромагнитных взаимодействия, его вклад в эффективный заряд пропорционален малому числу  $e^2 \equiv \alpha \simeq 1/137$ ; и этот вклад зависит от расстояния  $r$ ! Зависимость оказывается логарифмической в области, где значения  $r$  существенно меньше комптоновской длины электрона  $r_e = h/mc \simeq 3,9 \cdot 10^{-11}$  см, и определяется выражением

$$e \rightarrow e(r) = e \left\{ 1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{r}{r_e} + O(\alpha^2) \right\}.$$

Здесь члены  $\sim \alpha^2$  связаны с процессами, представленными на рис. 10,  $v, z$ , и т. д.

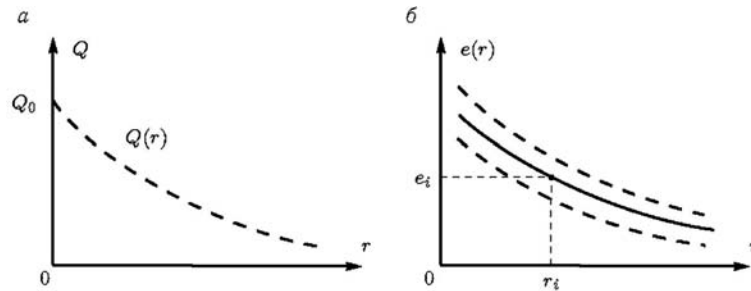


Рис. 11. Эффективный заряд электрона в классическом ( $a$ ) и квантовом ( $b$ ) случаях

*Эффективный заряд электрона.* Важно отметить, что явление зависимости измеряемого заряда электрона от расстояния имеет чисто квантовое происхождение (что впервые обсуждалось Дираком в середине 1930-х гг. [26]).

С ростом  $r$  значение  $e(r)$  убывает. Таким образом, качественное поведение эффективного заряда в КЭД соответствует классической картине экранировки. Эта зависимость представлена на рис. 11, б набором кривых. Каждая кривая отвечает возможному поведению функции эффективного заряда  $e(r)$ , полученному из теории безотносительно к эксперименту (т.е. когда численное значение параметра  $e$ ,  $\alpha = e^2$  не фиксировано).

Существенно, что в классической аналогии значение стороннего электрического заряда  $Q_0$  частицы  $E$ , внесенной в поляризуемую среду, известно заранее (по результатам независимого измерения). В квантовом случае это не так, и величина заряда может быть измерена только *не на очень малых* расстояниях. Вообще говоря, результат эксперимента должен быть описан двумя величинами: «расстоянием измерения»  $r_i$  и измеренным значением заряда  $e_i$ . Таким образом, чтобы сделать выбор из набора кривых на рис. 11, б, следует фиксировать точку на плоскости с координатами  $r = r_i$ ,  $e(r) = e_i$ . Поэтому для выбранной кривой  $e(r_i) = e_i$ . Заметим, что обычное определение заряда электрона из макроскопического эксперимента (например, опыта Милликена) соответствует здесь очень большим расстояниям  $r \gg r_e$ , т.е.  $1/137 = e^2(r = \infty)$ .

Как известно, в микрофизике обычно употребляется импульсное представление, а не координатное. Поэтому вместо  $e(r)$  используют функцию  $\bar{\alpha}(Q^2)$ , т.е. образ Фурье квадрата  $e(r)$ . Она является монотонно возрастающей функцией своего аргумента  $Q^2 = \mathbf{q}^2 - q_0^2$ , квадрата переданного 4-импульса. Здесь и ниже черта сверху означает функцию (в отличие от ее численных значений —  $\alpha$ ,  $\alpha_\mu$ ,  $\alpha_i$  — при некотором заданном значении аргумента  $Q^2$ ). Условие соответствия с классической электродинамикой принимает теперь вид  $\bar{\alpha}(0) = 1/137$ , поскольку в рассматриваемых масштабах классическое поле отвечает фотону с практически нулевым 4-импульсом. Здесь, как и выше, для того чтобы выбрать одну из возможных кривых на плоскости  $(Q, \bar{\alpha})$ , нужно задать точку  $Q = \mu$ ,  $\bar{\alpha} = \alpha_\mu$  и, следовательно, для выбранной кривой, представленной на рис. 12, имеем  $\bar{\alpha}(\mu^2) = \alpha_\mu$ .

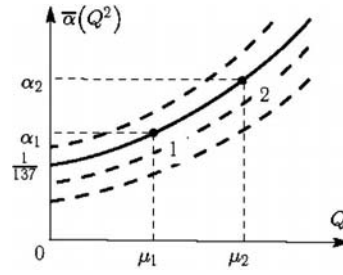


Рис. 12. Изменение параметризации  $\bar{\alpha}_{\text{QED}}$

Эффективная функция взаимодействия  $\bar{\alpha}(Q^2)$  описывает зависимость значения заряда электрона от условий эксперимента. Отметим, что поправки к милликовскому значению, на масштабе порядка 100 ГэВ достигающие почти десятка процентов, в настоящее время измеряются на больших ускорителях — см. ниже рис. 13.

Величину  $\mu$  часто называют *масштабным параметром*, или параметром шкалы. Ясно, что он определяется значением импульса фотона, использованного для измерения заряда. Этот параметр не имеет аналога в классическом лагранжиане. Его возникновение в перенормированной КТП громко именуют «феноменом размерной трансмутации». Между тем, как было показано выше, его появление очень естественно.

Уместно вспомнить известные идеи, сформулированные Нильсом Бором в середине 1930-х гг. [27], связанные с принципом дополнительности. Дело в том, что согласно Бору для описания квантовой системы необходимо фиксировать ее «макроскопическое окружение», т.е. задать свойства прибора, используемого в процессе измерения. Именно характеристики классического макроскопического прибора и описываются дополнительными параметрами. Однако это еще не конец истории с боровским (т.е. масштабным) параметром  $\mu$ . Как можно показать, именно возможность его вариации приводит к новой симметрии, лежащей в основе ренормализационной группы.

С этой целью вновь обратимся к рис. 12, имея в виду, что выбор одной кривой был сделан условием  $\bar{\alpha}(Q^2 = \mu^2) = \alpha_\mu$ . Для простоты также предположим, что рассматриваем безмассовую КЭД, точнее, приближение  $|Q| \gg m_e c$ , которое отвечает энергетической шкале в несколько ГэВ или расстояниям  $r \sim 10^{-14}$  см  $\ll r_e$ . В этой области безразмерная эффективная функция заряда может быть представлена как функция двух безразмерных аргументов  $\bar{\alpha}(Q^2) = \bar{\alpha}(Q^2/\mu^2, \alpha_\mu)$ . Примем теперь во внимание, что пара параметров  $\mu, \alpha_\mu$ , используемая для выбора некоторой кривой, может, вообще говоря, соответствовать любой точке на кривой. Рассмотрим две точки, 1 и 2, этой кривой с координатами  $\mu_1, \alpha_1$  и  $\mu_2, \alpha_2$  соответственно. Очевидно, что данная кривая для  $\bar{\alpha}$  может быть параметризована любой из пар  $\mu_i, \alpha_i$ ;  $i = 1, 2, \dots$ . Поэтому для любого  $Q^2$  выполняется тождество

$$\bar{\alpha}(Q^2/\mu_1^2, \alpha_1) = \bar{\alpha}(Q^2/\mu_2^2, \alpha_2).$$

В то же время второй аргумент  $\alpha_2$  в правой части, который по определению равен значению  $\bar{\alpha}$  при  $Q^2 = \mu_2^2$ , можно выразить, используя  $\bar{\alpha}$  в параметризации с помощью координат точки 1, т.е.  $\alpha_2 = \bar{\alpha}(\mu_2^2/\mu_1^2, \alpha_1)$ . Комбинируя два последних соотношения и вводя обозначения

$$Q^2/\mu^2 = x, \quad \alpha_1 = \alpha, \quad \mu_2^2/\mu_1^2 = t,$$

приходим к функциональному уравнению

$$\bar{\alpha}(x, \alpha) = \bar{\alpha}(x/t, \bar{\alpha}(t, \alpha)),$$

идентичному уравнению (6), которое, как было отмечено выше, лежит в основе формализма ренормализационной группы.

Заметим, что соответствующее однопараметрическое преобразование отвечает изменению точки параметризации (1 → 2) вида (10):

$$R_t : \{ \mu_1 \rightarrow \mu_2 = \sqrt{t}\mu_1, \quad \alpha_1 \rightarrow \alpha_2 = \bar{\alpha}(t, \alpha_1) \}, \quad (40)$$

как это явно показано на рис. 12.

Тем самым установлено, что в перенормируемой КЭД имеется инвариантность относительно непрерывных преобразований группового типа, включающих две величины и содержащих функциональную зависимость.

Можно показать\*, что эффективный заряд КЭД  $\bar{\alpha}$  равен произведению  $\alpha$  и безразмерной поперечной амплитуды  $d(x, \alpha)$  одетого фотонного пропагатора, включающего вакуумные поляризационные эффекты. В перенормируемых моделях КТП с одной константой связи эффективное взаимодействие  $\bar{g}(x, g)$  выражается\*\* через произведение  $g$  соответствующей вершинной функции и амплитуд пропагаторов надлежащих полей. Обычно этот вывод делают на основе конечного перенормировочного преобразования Дайсона.

*Преобразование Дайсона.* Из теории перенормировок в квантовой теории поля хорошо известно, что переход от одной схемы перенормировки (СП) к другой может быть сформулирован в терминах мультипликативного преобразования Дайсона для вершинных функций  $V_i$  и пропагаторов  $D_k$ :

$$\begin{aligned} V_i &\rightarrow V'_i = z_i^{-1} V_i, \\ D_k &\rightarrow D'_k = z_k D_k. \end{aligned}$$

Здесь  $V$  и  $D$  — перенормированные вершинные функции и пропагаторы, а все  $z$  — конечные вещественные числа. Эти конечные преобразования Дайсона, вообще говоря, эквивалентны некоторому изменению нормировки полевых операторов и, в конечном счете, констант взаимодействия, для непосредственного определения которых следует задать кинематические условия их возможного измерения. Это означает, что вершинные функции и пропагаторы, соответствующие различным ренормировочным предписаниям, связаны между собой подходящим изменением импульсных аргументов.

Вследствие этого процедуру изменения масштаба импульсов можно выразить с помощью следующих дайсоновских преобразований в импульсном представлении (см., например, § 47 в [10] или приложение IX в [21]):

$$s_i \left( \frac{k^2}{\lambda_2^2}, \frac{m^2}{\lambda_2^2}, g_2 \right) = z_i s_i \left( \frac{k^2}{\lambda_1^2}, \frac{m^2}{\lambda_1^2}, g_1 \right),$$

---

\*См. § 48.1 в [10].

\*\*См. § 47.4 в [10].

$$V_j \left( \left\{ \frac{k^2}{\lambda_2^2} \right\}, \frac{m^2}{\lambda_2^2}, g_2 \right) = z_j^{-1} V_j \left( \left\{ \frac{k^2}{\lambda_1^2} \right\}, \frac{m^2}{\lambda_1^2}, g_1 \right),$$

где  $g_2 = z_v \Pi_i \{z_i^{-1/2}\} g_1$  и  $\{k^2\} = k_1^2, k_2^2, \dots, k_n^2$ .

Принимая во внимание, что условия нормировки скалярных функций  $s_i, V_j$  в схеме вычитания в импульсном представлении (МOM-схема) записываются в простом виде:

$$s_i \left( 1, \frac{m^2}{\lambda^2}, g \right) = V_j \left( \{1\}, \frac{m^2}{\lambda^2}, g \right) = 1,$$

можно определить константы перенормировки  $z_i, z_j$  в терминах самих  $s_i$  и  $V_j$ . Используя полученные таким образом выражения, легко получить ФУ типа [ср. с (8)]

$$s_i(x, y; g) = s_i(t, y; g) s_i \left( \frac{x}{t}, \frac{y}{t}; \bar{g}(t, y; g) \right), \quad (41)$$

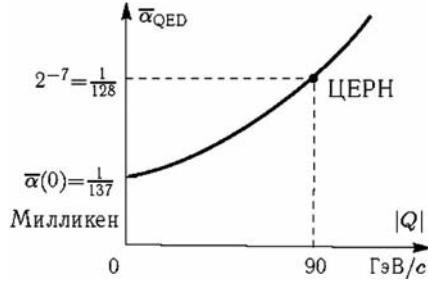


Рис. 13. Различные способы параметризации заряда в КЭД

где  $\bar{g}$  — так называемый *инвариантный заряд*, удовлетворяющий более простому замкнутому уравнению

$$\bar{g}(x, y; g) = \bar{g} \left( \frac{x}{t}, \frac{y}{t}; \bar{g}(t, y; g) \right). \quad (23)$$

Отметим здесь, что условия нормировки

$$s_i(1, y, g) = 1 \text{ и } \bar{g}(1, y, g) = g \quad (42)$$

«защиты» в функциональные уравнения (41) и (23).

Заметим также, что групповые функциональные уравнения для матричных элементов имеют вид

$$M(\{x\}, y; g) = M \left( \left\{ \frac{x}{t} \right\}, \frac{y}{t}, \bar{g}(t, y; g) \right), \quad (43)$$

отражающий их независимость от деталей перенормировки.

Поэтому ренорм-групповая инвариантность является собой не что иное, как независимость от способа параметризации\*.

\*Например, при обработке данных, полученных на так называемой Z-фабрике в ЦЕРН, вместо известной «милликоновской константы»  $\bar{\alpha}(0) = 1/137,04$  используют другое, физически более адекватное значение  $\alpha_{Z_0} = \bar{\alpha}(M_Z^2) = 1/127,92 \sim 2^{-7}$ , см. рис. 13.



## 4. МЕТОД РЕНОРМ-ГРУППЫ

**4.1. Формулировка метода.** *Основная идея.* Приближенное решение физической задачи, обладающее симметрией функционального самоподобия (ФСП), обычно не обладает этой симметрией, которая нарушается аппроксимацией. Это существенно, когда решение содержит сингулярность, ибо структура последней, как правило, разрушается при использовании приближения. Так, в КТП обычный метод расчетов использует теорию возмущений (ТВ) в виде степенного разложения в ряд по константе связи  $g$ . Однако конечные суммы этого ряда не удовлетворяют ФСП.

В качестве иллюстрации возьмем эффективную константу связи  $\bar{g}$  в УФ-области, где однопетлевой вклад имеет логарифмический вид\*:

$$\bar{g}_{PT,1}(x, g) = g - g^2 \beta \ln x, \quad \beta > 0. \quad (44)$$

Подставляя это выражение в функциональное уравнение (6), после простых преобразований приходим к невязке

$$\begin{aligned} \bar{g}_{PT,1}(x, g) - \bar{g}_{PT,1}\left(\frac{x}{t}, \bar{g}_{PT,1}(t, g)\right) &= \\ &= [g - g^2 \beta \ln x] - \left[ g + g^2 \beta \ln x - 2g^3 \beta^2 \ln t \ln \frac{x}{t} \right] = \\ &= -2g^3 \beta^2 \ln t \ln \frac{x}{t}, \end{aligned}$$

которая может быть устранена добавлением члена  $\sim g^3$  в правую часть (44):

$$\bar{g}_{PT,1(2)} = g - g^2 \beta \ln x + g^3 \beta^2 \ln^2 x.$$

Это «улучшенное» выражение при подстановке в (6) даст невязку порядка  $g^4$ , от которой затем можно избавиться путем добавления члена  $\sim g^4 \ln^3$ , и т.д. Таким образом, видно, что, с одной стороны, конечные многочлены не удовлетворяют условию РГ-инвариантности. С другой стороны, ясно, что функциональное групповое уравнение доставляет средство последовательного восстановления ренорм-инвариантного выражения. Последнее имеет вид конечной суммы бесконечного ряда

$$\bar{g}_{PT,1(k)} = g \left( 1 + \sum_{m=1}^k [-g \beta \ln x]^m \right),$$

---

\*Выбор знака коэффициента  $\beta$  отвечает случаю КХД.

представляющего геометрическую прогрессию. Результат неограниченно возрастающего числа итераций стремится к простому выражению

$$\bar{g}_{PT,1(\infty)} = \bar{g}_{RG,1} = \frac{g}{1 + g\beta \ln x}, \quad (45)$$

которое в точности удовлетворяет ФУ (6), т. е. является РГ-инвариантным.

Другой иллюстрацией может служить одномерная задача переноса, которая обсуждалась в п. 2.2. Здесь можно достаточно просто получить приближенное поведение решения рядом с границей:

$$G_{PT}(l, g) = g - lB, \quad Bl \ll 1, \quad \text{где } B = -G'(0, g) > 0, \quad (46)$$

которое не обладает симметрией ФСП. Повторя описанную итерационную процедуру восстановления симметрии, получаем ФСП-инвариантное выражение

$$G_{RG}(l, g) = \frac{g}{1 + gBl}.$$

Эти примеры иллюстрируют общую ситуацию. Степенной ряд теории возмущений в любом конечном порядке по параметру  $g$  дает степенную асимптотику по переменной  $l (= \ln x)$ , не совместимую с РГ = ФСП симметрией. В то же время результат итерационного улучшения приводит к *падающей* асимптотике\*  $\sim 1/l$ , совместной с симметрией.

На этой основе можно поставить задачу «РГ-улучшения» результатов теории возмущений. Ключевой элемент состоит в сочетании пертурбативного решения с групповыми уравнениями. Наиболее простым и удобным способом такого синтеза оказывается использование групповых ДУ.

*Общее решение.* Общее решение группового ФУ было получено Овсянниковым [25] путем применения общей теории ДУ в частных производных к компенсационным уравнениям (33) и (36). За подробностями отсылаем читателя к § 48.3 монографии [10]. Полученные результаты формулируются следующим образом.

Каждому решению уравнения (33) соответствует некоторая функция двух аргументов  $F(y, g)$ , обратимая по отношению ко второму аргументу и связанная с  $\bar{g}$  соотношением

$$F(y, g) = F\left(\frac{y}{x}, \bar{g}(x, y; g)\right), \quad (47)$$

которое представляет собой общее решение уравнения (33), равно как и (23). В явной форме  $\bar{g}$  может быть получена отсюда путем обращения правой

---

\*В квантово-полевым случае КХД аналог последнего выражения (при  $l \rightarrow \ln(Q^2/\Lambda^2)$ ) описывает феномен асимптотической свободы. См. также § 53.4 [10].

части:

$$\bar{g}(x, y; g) = F_{(2)}^{-1}[y/x, F(y, g)].$$

Практически для фиксирования  $F$  достаточно задать  $\beta(y, g)$ .

Заметим, что для перехода от «массового» решения Овсянникова (47) к решению в УФ-пределе, т. е. к безмассовому случаю, следует принять для  $F$  специальную форму предельного поведения:

$$F(y, g) = y \exp[f(g)] \quad (\text{или } = \ln y + f(g)) \quad \text{при } y \rightarrow 0.$$

Тогда\*

$$f\{\bar{g}(x, g)\} - f(g) = \ln x \quad \text{и} \quad \bar{g} = f^{-1}\{\ln x + f(g)\}. \quad (48)$$

В свою очередь каждому решению уравнения (35) для функции  $s$  трех аргументов отвечает некоторая функция  $\Sigma(y, g)$ , связанная с  $s$  соотношением

$$s(x, y; g) = \frac{\Sigma(y/x, \bar{g}(x, y; g))}{\Sigma(y, g)}. \quad (49)$$

Приведем также общее решение аналогичного типа системы уравнений (29) для  $k$ -зарядного случая. Его можно записать через  $k$  произвольных  $(k+1)$ -аргументных функций  $F_i(y, \{g\})$ , которые должны быть однозначно обратимыми по отношению к  $k$  своим последним аргументам и определяться на основе системы ФУ:

$$F_i(y, \{g\}) = F_i\left(\frac{y}{x}, \{\bar{g}(x, y; \{g\})\}\right), \quad (50)$$

где

$$\{g\} = g_1, \dots, g_k \quad \text{и} \quad i = 1, \dots, k.$$

Заметим, что все решения (47)–(50) удовлетворяют условиям нормировки типа (42).

Переход к безмассовому пределу в уравнениях (47) и (50) может быть осуществлен с помощью приема, подобного указанному выше. Тогда, например,

$$s(x, g) = x^\sigma \frac{\Sigma(\bar{g}(x, g))}{\Sigma(g)}. \quad (51)$$

Приведем также решение для двухзарядного случая  $g_1 = g$ ,  $g_2 = h$  в безмассовом пределе в форме, аналогичной выражению (48):

$$f_i(\bar{g}, \bar{h}) = f_i(g, h) + \ln x, \quad i = 1, 2. \quad (52)$$

---

\*Решение (48) было впервые получено Т. Д. Ли — см. приложение к [4].

Обобщение этой системы очевидно. Из приведенных решений следует, что наложение групповых свойств понижает число независимых аргументов на единицу.

*Технология ренорм-группового метода.* Идея объединения приближенного решения с групповой симметрией может быть реализована с помощью дифференциальных уравнений Ли. Если определить генераторы группы  $\beta, \gamma$  из некоторого приближенного решения и затем решить эволюционные ДУ, то получим *улучшенные путем применения РГ* решения, которые удовлетворяют групповой симметрии и соответствуют исходному приближенному решению.

Теперь сформулируем алгоритм улучшения приближенных решений, т. е. метод РГ. Процедура дается следующим рецептом, который в явном виде приводится для УФ-случая.

Предположим, что известно приближенное решение  $\bar{g}_{\text{appr}}, s_{\text{appr}}$ .

1. На основе уравнений (32) и (35) определим генераторы  $\beta$  и  $\gamma$  с помощью данного решения:

$$\beta(y, g) = \left. \frac{\partial}{\partial \xi} \bar{g}_{\text{appr}}(\xi, g) \right|_{\xi=1}; \quad \gamma_s = \left. \frac{\partial s_{\text{appr}}(t, g)}{\partial t} \right|_{t=1}. \quad (53)$$

2. Проинтегрируем уравнение (31), т. е. построим функцию

$$\Phi(g) = \int^g \frac{d\gamma}{\beta(\gamma)}. \quad (54)$$

3. Найдем инвариантный заряд  $\bar{g}$  из соотношения

$$\bar{g}_{\text{RG}}(x, g) = \Phi^{-1}\{\Phi(g) + \ln x\}. \quad (55)$$

4. С помощью первого уравнения (35), используя полученное выражение (55), определим  $s_{\text{RG}}(x, g)$ .

Найденные таким образом выражения  $\bar{g}_{\text{RG}}, s_{\text{RG}}$  обладают свойством РГ-симметрии, являются точным решением уравнений (23), (34) и, в надлежащем приближении, переходят в  $\bar{g}_{\text{appr}}, s_{\text{appr}}$ .

Использование этого рецепта для массового случая приведено в п. 5.1.

**4.2. Применение метода ренорм-группы. УФ-асимптотика в КТП.** Как было показано выше в п. 4.1, квантово-полевое выражение, полученное на основе конечного порядка теории возмущений, не обладает свойством РГ-симметрии. Оно, однако, может быть улучшено методом ренорм-группы.

Для иллюстрации возьмем тот же самый пример (44), возникающий в первом (однопетлевом) УФ-приближении теории возмущений для эффективной

функции связи в безмассовой перенормируемой модели КТП с одной константой связи:

$$\bar{g}_{\text{appr}}^{(1)}(x, g) = g - \beta_0 g^2 \ln x. \quad (56)$$

Тогда  $\beta^{(1)}(g) = -\beta_0 g^2$  и решение немедленно получается из квадратуры

$$\int_g^{\bar{g}} \frac{dg}{\beta^{(1)}(g)} = \Phi_1(\bar{g}) - \Phi_1(g) = \ln x; \quad \Phi_1(g) = \frac{1}{\beta_0 g}$$

в виде (45):

$$\bar{g}_{\text{RG}}^{(1)}(x, g) = \frac{g}{1 + g\beta_0 \ln x}. \quad (57)$$

Это РГ-инвариантное выражение при разложении в ряд по малому  $g$  воспроизводит исходное решение (56). В то же время оно дает УФ-асимптотику решения\*

$$\bar{g}_{\text{RG}}^{(1)}(x, g) \rightarrow \frac{1}{\beta_0 \ln x}, \quad (58)$$

совместную с РГ-симметрией. Не составляет труда убедиться, что выражение (57) удовлетворяет ФУ (6)\*\*.

В следующем, втором (т. е. двухпетлевом) приближении

$$\bar{g}_{\text{appr}}^{(2)}(x, g) = g (1 - \beta_0 g \ln x + \beta_0^2 g^2 \ln^2 x - \beta_1 g^2 \ln x), \quad (59)$$

бета-функция есть двучлен  $\beta^{(2)} = -\beta_0 g^2 - \beta_1 g^3 = -g^2 \beta_0 (1 + b_1 g)$ ,  $b_1 = \beta_1 / \beta_0$  и квадратура

$$\int_g^{\bar{g}} \frac{dg}{\beta^{(2)}(g)} = \Phi_2(\bar{g}) - \Phi_2(g) = \ln x; \quad \beta_0 \Phi_2(g) = -\frac{1}{g} + b_1 \ln \left( \frac{1}{g} + b_1 \right)$$

приводит к трансцендентному уравнению для  $\bar{g}$ , решение которого может быть представлено через малоизвестную специальную функцию Ламберта. Для наших целей достаточно рассмотреть УФ-асимптотику, которой отвечает выражение

$$\bar{g}_{\text{RG}}^{(2)}(x, g) \rightarrow \frac{g}{1 + g\beta_0 \ln x + g b_1 \ln \ln x}. \quad (60)$$

Оно соответствует асимптотике точного решения и может быть также получено путем итеративного решения, для которого полагают второй, логарифмический вклад в  $\Phi_2(g)$  малой поправкой по сравнению с первым при

---

\*Считаем здесь, что  $\beta_0 > 0$ , как это имеет место в квантовой хромодинамике, где это выражение описывает важнейшее свойство ослабления взаимодействия на малых расстояниях (т. е. при больших значениях переданного импульса  $q^2$ ), — свойство асимптотической свободы, характерное для неабелевых калибровочных теорий.

\*\*Предлагаем читателю самостоятельно проверить этот факт.

$b_1 g \ll 1$ . Подставляя в этот вклад однопетлевое РГ-решение (57), приходим к выражению

$$\bar{g}_{\text{RG}}^{(2)} = \frac{g}{1 + \beta_1 g l + b_1 g \ln(1 + g \beta_0 l)}, \quad l = \ln x, \quad (61)$$

которое при  $g \beta_0 l \gg 1$  эквивалентно (60).

Результат (61), впервые полученный в середине 1950-х гг. [3] в контексте КЭД, интересен в нескольких отношениях.

Во-первых, будучи разложен по степеням  $g$  и  $gl$ , он порождает бесконечный ряд, содержащий как «ведущие» УФ-логарифмические вклады  $\sim g^{n+1} l^n$ , так и «следующие-за-ведущими» вклады  $\sim g^{n+2} l^n$ .

Во-вторых, он содержит нетривиальную аналитическую зависимость  $\ln(\ln Q^2)$ , которая отсутствует в исходной перенормированной теории возмущений.

Наконец, он демонстрирует алгоритм последовательного улучшения точности, т.е. *регулярность* ренорм-группового метода. В самом деле, второе асимптотическое выражение (60) имеет ту же предельную форму (58), что и первое (57). Таким образом, уже первое РГ-приближение приводит к правильному виду асимптотики решения, а член  $\sim b_1$  лишь уточняет преасимптотику.

Подобным образом в зависящем от массы случае КЭД при анализе ИК-особенности пропагатора электрона РГ-решение, построенное на первом логарифмическом приближении, сразу дает [5,6] степенную особенность.

*Задача переноса.* Рассмотрим одномерную задачу переноса. Групповое ДУ для нее имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \bar{G}(l, g)}{\partial l} = \beta(\bar{G}), \quad \beta(g) = \left. \frac{\partial \bar{G}(l, g)}{\partial l} \right|_{l=0}, \quad (62)$$

причем генератор  $\beta(g)$  представляет собой инфинитезимальный отклик в окрестности границы

$$\bar{G}(\varepsilon, g) = g + \beta(g) \varepsilon.$$

Допустим, что можно определить отклик из каких-либо простых соображений, не решая кинетического уравнения Больцмана. Рассмотрим два случая: пусть в одном из них (а) отклик линеен (как функция граничной плотности  $g$ ), а в другом (б) — квадратичен:

$$\bar{G}_{\text{appr}}(\varepsilon, g) = \begin{cases} g - \varepsilon k g, & \varepsilon \ll 1 \quad (\text{случай а}), \\ g - \varepsilon \kappa g^2, & \varepsilon \ll 1 \quad (\text{случай б}). \end{cases}$$

Отсюда

$$B(g) = \begin{cases} -kg & \text{(а)} \\ -\kappa g^2 & \text{(б)} \end{cases} \quad \text{и} \quad \bar{G}_{\text{RG}}(l, g) = \begin{cases} ge^{-kl} & \text{(а)} \\ \frac{g}{1 + \kappa gl} & \text{(б)}. \end{cases} \quad (63)$$

Эти выражения  $\bar{G}_{\text{RG}}$ , обладая свойством функционального самоподобия, т. е. являясь решениями уравнения (11), при малых  $l$  совпадают с исходными приближенными  $\bar{G}_{\text{appr}}$ . В то же время они описывают решение на всем положительном полубесконечном интервале, включая асимптотическую область  $l \rightarrow \infty$ , как это показано на рис. 14.

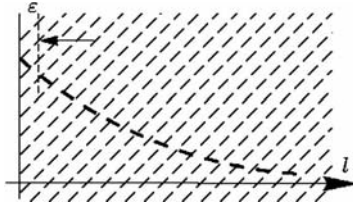


Рис. 14. Решение задачи переноса

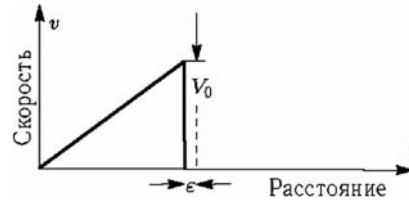


Рис. 15. Эволюция слабой ударной волны

*Слабая ударная волна.* Другим примером применения метода ренорм-группы в классической физике может служить простая задача эволюции одномерной слабой ударной волны. Когда волна приходит в точку  $l = l_0 + \varepsilon$ , как показано на рис. 15, выражение для скорости фронта  $V(\varepsilon)$  принимает следующий вид:

$$V(\varepsilon) = V_0 - \frac{a}{2V_0}\varepsilon. \quad (64)$$

Отсюда определяем генератор и находим решение

$$B(V) = -\frac{a}{2V}, \quad V(l) = \sqrt{V_0^2 - a(l - l_0)}, \quad (65)$$

хорошо известное в гидродинамике.

**4.3. Сущность ренорм-группового метода.** Теперь можно подытожить свойства метода ренорм-группы. Ренорм-групповой метод есть *регулярная процедура сочетания* динамической информации, получаемой из какого-либо приближенного решения некоторой задачи, со свойством групповой симметрии функционального самоподобия, которым обладает точное решение.

1) Математическим инструментом, используемым в ренорм-групповом методе, являются дифференциальные уравнения Ли.

2) Ключевой элемент метода состоит в возможности (приближенного) определения генераторов группы из динамики.

3) РГМ работает наиболее эффективно в том случае, когда решение обладает сингулярным поведением, а приближение разрушает структуру сингулярности. Метод восстанавливает правильную структуру сингулярности.

## 5. РЕНОРМ-ГРУППА БОГОЛЮБОВА 50 ЛЕТ СПУСТЯ

В этом разделе приведен краткий абрис трех направлений, в которых боголюбовская ренорм-группа успешно развивалась в течение последней четверти века:

- Масс-зависимая РГ в окрестности порогов в контексте Стандартной модели.
- Аналитическая теория возмущений в КХД.
- Метод ренорм-групповых симметрий для улучшения решений краевых задач математической физики.

### 5.1. Масс-зависимая РГ в окрестности порогов. *Постановка задачи.*

В современной теории взаимодействия квантовых полей приходится иметь дело с квантами этих полей — частицами с сильно разнящимися значениями масс. Так, в КХД наиболее легкие кварки имеют массы порядка нескольких МэВ, тогда как наиболее тяжелые — нескольких сотен ГэВ. Поскольку тяжелые частицы не оказывают влияния на динамику легких, в области достаточно низких энергий их, а также отвечающие им квантовые поля, не учитывают.

В результате возникает своеобразная иерархия квантово-полевых моделей и задача их сопряжения. Так, в КЭД при энергиях ниже 10 МэВ можно ограничиться лишь взаимодействием электронов, позитронов и фотонов. Роль более тяжелых электрически заряженных частиц в этой области подавлена. Известной иллюстрацией служит аномальный магнитный момент электрона. В то же время в низкоэнергетической КХД ограничиваются взаимодействием глюонного поля с кварковыми полями трех «самых легких» ароматов, тогда как в области порядка 100 ГэВ и выше в лагранжиан и правила Фейнмана включают пять и даже шесть кварковых фермионных полей. Таким образом, в различных областях используются модели с разным набором квантовых полей.

Задача численного сопряжения решений этих разных КТП-моделей осложняется тем, что в КХД обычно используют логарифмические асимптотики, т. е. пренебрегают массами кварков. Между тем сопряжения следует проводить как раз в окрестности порогов рождения очередных «тяжелых кварков», т. е. при энергиях, близких к массам этих кварков.

Масс-зависимая квантово-полевая ренорм-группа Боголюбова доставляет естественный алгоритм для анализа перехода через пороги и получения аккуратных формул численного сопряжения безмассовых логарифмических выражений с различным числом ароматов. В этом разделе приводится сводка



результатов, полученных в 1980–1990-х гг. применительно к КХД и Стандартной модели.

*Двухпетлевая формула для  $\bar{\alpha}$ .* Общее решение функциональных РГ-уравнений в массовом случае было сформулировано\* Боголюбовым и автором в середине 1950-х гг. Тогда же было установлено, что точное решение для инвариантного заряда, полученное из однопетлевого приближения теории возмущений, подобно безмассовому логарифмическому пределу, суммируется в знаменатель\*\*. Впоследствии было показано [28], что и двухпетлевое массовое приближение теории возмущений

$$\bar{g}_{PT}^{(2)}(x, y; g) = g - g^2 A_1(x, y) + g^3 [A_1^2 - A_2(x, y)] + O(g^4) \quad (66)$$

сворачивается в знаменатель, в выражение

$$\bar{g}_2(x, y; g) = \frac{g}{1 + g A_1(x, y) + g \frac{A_2}{A_1} \ln(1 + g A_1)}. \quad (67)$$

Аналогичный результат был получен для одноаргументной РГ-ковариантной функции

$$s^{(2)}(x, y; g) = \left( \frac{g}{\bar{g}_2(x, y; g)} \right)^{\nu_1(x, y)} \exp \{ (g - \bar{g}_1(x, y; g)) \nu_2(x, y) \}, \quad (68)$$

где  $\nu_1(x, y) = S_1/A_1$ ,  $\nu_2 = (A_1 S_2 - A_2 S_1)/A_q^2$ , а функции  $S_i$  входят в пертурбативное разложение для  $s$  следующим образом:

$$s_{pt}^{(2)}(x, y; g) = 1 + g S_1(x, y) + g^2 \left( S_2 + \frac{S_1(S_1 - A_1)}{2} \right) + O(g^3).$$

Все эти выражения в УФ-пределе  $A_k \rightarrow \beta_{k-1} \ln x$ ,  $S_j \rightarrow \gamma_{j-1} \ln x$  переходят в соответствующие формулы логарифмического приближения.

В последующем исследовании [29] эти результаты были обобщены на 3- и 4-петлевые случаи, что позволило, в частности, получить явную оценку точности двухпетлевых формул.

*Двухпетлевые функции связи Стандартной модели.* Вслед за тем были получены [30] двухпетлевые формулы для трех инвариантных функций связи  $\bar{\alpha}_i$  Стандартной модели:

$$\frac{1}{\alpha_i(Q)} = \frac{1}{\alpha_i} + A_i(Q) + \sum_j \frac{A_{ij}(Q)}{A_j(Q)} \ln [1 + \alpha_j A_j(Q)], \quad (69)$$

\*См. § 48.3 в [10].

\*\*См. формулу (48.40) в [10].

где  $A_i$  и  $A_{ij}$  суть одно- и двухпетлевые массовые вклады в  $\bar{\alpha}_i$ , вычисленные по теории возмущений

$$\alpha_i(Q) \simeq \alpha_i - \alpha_i^2 A_i(Q) + \alpha_i^3 A_i^2(Q) - \alpha_i^2 \sum_j \alpha_j A_{ij}(Q)$$

с помощью обычных диаграмм Фейнмана.

Эти исследования были вызваны стремлением получить явные аналитические формулы для процедуры перехода через пороги рождения тяжелых частиц, в частности, для уточнения формул сопряжения областей с различным числом ароматов в КХД, а также для более аккуратной оценки возможных сценариев Великого объединения взаимодействий.

Полученные результаты, по нашему мнению, имеют более общее значение и могут быть использованы при обсуждении как схемной зависимости формул сопряжения в КТП, так и в контексте нарушения однородности в других областях, таких, как, например, учет конечных размеров системы (finite-size scaling) в критических явлениях и проблема исключенного объема в теории полимеров.

**5.2. Аналитическая теория возмущений в КХД.** Модификация ряда теории возмущений, выполненная методом ренорм-группы, позволяет улучшить свойства разложения в ультрафиолетовой области, однако приводит к нефизическим особенностям.

Так, сумму однопетлевых ультрафиолетовых (УФ) логарифмов для «инвариантного заряда» КХД (57) обычно записывают в терминах

$$\bar{\alpha}_s^{(\ell=1)}(Q^2) = \frac{\alpha_\mu}{1 + \alpha_\mu \beta_0 \ln(Q^2/\mu^2)} = \frac{1}{\beta_0 \ln(Q^2/\Lambda^2)}, \quad (70)$$

$$\beta_0(n_f) = \frac{11 - 2n_f/3}{4\pi}$$

масштабного параметра КХД  $\Lambda = \mu e^{-1/(2\alpha_\mu \beta_0)}$ .

Функция (70) имеет паразитную сингулярность в инфракрасной (ИК) области при  $Q^2 = \Lambda^2$ . Проблема особенностей такого сорта не может быть решена (см. § 50.2 в [10]) за счет учета любого *конечного* числа многопетлевых вкладов. Ложные сингулярности при этом не исчезают, а лишь меняют характер. Так, обычное пертурбативное двухпетлевое выражение для  $\bar{\alpha}_s$

$$\bar{\alpha}_s^{(2)}(Q^2) = \frac{1}{\beta_0 l} \left[ 1 - \frac{\beta_1}{\beta_0^2} \frac{\ln l}{l} \right] + O\left(\frac{\ln^2 l}{l^3}\right); \quad l = \ln \frac{Q^2}{\Lambda^2},$$

представляющее собой разложение формулы (60), помимо полюса обладает нефизическим разрезом, обусловленным двойной логарифмической зависимостью от  $Q^2$ .

Подобная трудность впервые возникла в КЭД\* в 1950-х гг. Вскоре в работе Боголюбова с соавторами [31] было предложено явное модельное решение проблемы на пути синтеза метода РГ и физического условия причинности в виде спектрального представления Челлена–Лемана для фотонного пропагатора.

Эта идея получила развитие [32, 33] в середине 1990-х гг. применительно к КХД, где в силу свойства асимптотической свободы нефизические особенности находятся в физически достижимой инфракрасной области (величина параметра  $\Lambda$  составляет несколько сотен МэВ) и существенно затрудняют обработку данных опыта.

Привлекая общее требование причинности в форме условий аналитичности пропагаторов (представление Челлена–Лемана) и амплитуд рассеяния (спектральное представление Йоста–Лемана\*\*), удалось построить регулярный метод аналитической теории возмущений (АТВ), реализующий следующий шаг в модернизации РГ-инвариантных пертурбативных аппроксимаций, освобождая их от особенностей и делая стабильными к поправкам высших порядков и выбору схемы перенормировки.

Полученные выражения для аналитического инвариантного заряда  $\bar{\alpha}(Q^2, \alpha)$  в КЭД [31, 34, 35] и  $\bar{\alpha}_s(Q^2, \alpha_s)$  в КХД [32, 33] обладают следующими важными свойствами:

- отсутствие призрачного полюса;
- как функции константы связи  $(\alpha, \alpha_s)$  эти выражения имеют в начале координат существенную особенность вида  $\exp(-1/\alpha)$ ;
- для вещественных положительных  $\alpha, \alpha_s$  допускают степенное разложение, совпадающее с пертурбативным;
- в КЭД  $\bar{\alpha}$  имеет конечный УФ-предел, равный  $3\pi$ , не зависящий от экспериментального значения  $\alpha \simeq 1/137$ , а аналитическая функция связи КХД — конечный ИК-предел  $\bar{\alpha}_s(Q^2 = 0, \alpha_s) = 1/\beta_0 \sim 1,4$ .

Ниже дается краткий обзор основных этапов разработки аналитической теории возмущений в КХД, включая приложения к описанию адронных процессов.

*Основы АТВ.* Аналитическая теория возмущений основана на следующих принципах:

- *Аналитичность* эффективной функции связи в комплексной  $Q^2$ -плоскости согласно представлению Челлена–Лемана:

$$\bar{\alpha}_s(Q^2) \rightarrow \alpha_E(Q^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\sigma \frac{\rho(\sigma)}{\sigma + Q^2 - i\epsilon}.$$

---

\*Здесь призрачные сингулярности отвечают огромным масштабам, лишенным физического смысла.

\*\*См. § 55.1 в [10].

Это требование, отражающее условие причинности, обеспечивает отсутствие нефизических сингулярностей.

- *Соответствие* с результатом РГ-улучшенной теории возмущений  $\bar{\alpha}_s(Q^2)$  путем надлежащего определения спектральной плотности  $\rho(\sigma) = \text{Im } \bar{\alpha}_s(-\sigma)$ .

- *Трансформационная ковариантность*, т. е. совместность с линейными интегральными преобразованиями, такими, как переход от (евклидова) представления переданного импульса к (минковскому) представлению энергии в системе центра масс:

$$\alpha_E(Q^2) = Q^2 \int_0^\infty \frac{\alpha_M(s) ds}{(s + Q^2)^2},$$

или как преобразование Фурье от евклидовой  $\alpha_E(Q)$  к ее образу  $\alpha_D(r)$ , зависящему от расстояния  $r$ .

Последнее требование приводит к *нестепенным функциональным разложениям* для наблюдаемых вместо обычных разложений по степеням эффективной функции связи КХД  $\bar{\alpha}_s$ . Так, например, для функции Адлера

$$D_{PT}(Q^2) = \sum_n d_n \bar{\alpha}_s^n(Q^2) \quad \rightarrow \quad D_{APT}(Q^2) = \sum_n d_n \mathcal{A}_n(Q^2). \quad (71)$$

*Свойства алгоритма АТВ.* Свободные от нефизических особенностей *евклидовы функции* разложения определяются формулами

$$\mathcal{A}_n(Q^2) = \int_0^\infty \frac{\rho_n(\sigma)}{\sigma + Q^2} d\sigma, \quad \rho_n(\sigma) = \frac{1}{\pi} \text{Im} [\bar{\alpha}_s(-\sigma - i\varepsilon)]^n. \quad (72)$$

Они образуют нестепенной набор  $\{\mathcal{A}_k(Q^2)\}$ , который служит базисом модифицированного пертурбативного разложения наблюдаемых в  $Q^2$ -представлении, например, для  $D$ -функции Адлера (71). Первая из них, эффективная евклидова функция связи  $\alpha_E(Q^2) = \mathcal{A}_1(Q^2)$  в однопетлевом случае

$$\alpha_E^{(1)}(Q^2) = \frac{1}{\beta_0} \left[ \frac{1}{\ln(Q^2/\Lambda^2)} + \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 - Q^2} \right] \quad (73)$$

отличается от обычной  $\alpha_s(Q^2)$  членом  $\sim \Lambda^2/(\Lambda^2 - Q^2)$ , вычитающим сингулярность. Этот член в параметризации  $(\mu, \alpha_\mu)$  (см. (70)) имеет вид  $\sim e^{-1/\beta_0} \alpha_\mu / Q^2$ , т. е. содержит существенную особенность по малому  $\alpha_\mu$ , не разлагаемую по его степеням.

Высшие функции разложения могут быть получены из низшей рекуррентным дифференциальным соотношением, которое в однопетлевом случае имеет вид

$$\mathcal{A}_{n+1}^{(1)}(Q^2) = -\frac{1}{n\beta_0} \frac{d\mathcal{A}_n^{(1)}(Q^2)}{d \ln Q^2}. \quad (74)$$

Минковские функции разложения связаны с евклидовыми интегральными преобразованиями

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_k(s) &= \frac{i}{2\pi} \int_{s-i\varepsilon}^{s+i\varepsilon} \frac{dz}{z} \mathcal{A}_k(-z) = \frac{1}{\pi} \int_s^\infty \frac{d\sigma}{\sigma} \rho_k(\sigma); \\ \mathcal{A}_k(Q^2) &= Q^2 \int_0^\infty \frac{\mathfrak{A}(s) ds}{(s+Q^2)^2}.\end{aligned}\quad (75)$$

Минковская функция связи  $\alpha_M(s) = \mathfrak{A}_1(s)$  в однопетлевом случае

$$\alpha_M^{(1)}(s) = \frac{1}{\pi\beta_0} \arccos \frac{L}{\sqrt{L^2 + \pi^2}} \Big|_{L>0} = \frac{1}{\pi\beta_0} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{L}; \quad L = \ln(s/\Lambda^2) \quad (76)$$

количественно близка к евклидовой — см. рис. 16. В то же время обе они уже в области 1,5–2 ГэВ существенно отличаются от обычной сингулярной функции связи КХД  $\bar{\alpha}_s$ .

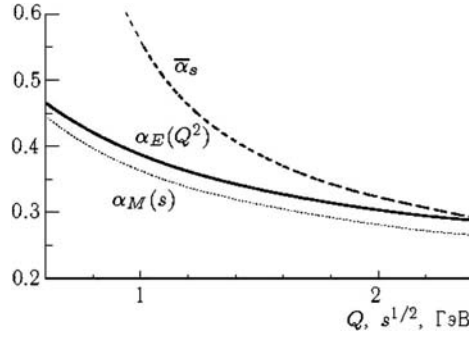


Рис. 16. Сравнение обычной сингулярной функции связи КХД  $\bar{\alpha}_s$  с евклидовой  $\alpha_E$  и минковской  $\alpha_M$  в области нескольких ГэВ

*Петлевая и схемная стабильность.* На следующем рис. 17 приведена евклидова функция связи в одно-, двух- и трехпетлевом приближениях в  $\overline{\text{MS}}$ -схеме вычитаний. Как видно, замечательным свойством кривых оказывается их петлевая стабильность. Двух- и трехпетлевые функции в области  $Q \sim \Lambda$  отличаются друг от друга не более, чем на 3%, они изображены одной пунктирной кривой.

Дело в том, что в противоположность случаю РГ-улучшенной теории возмущений, аналитичность, вытекающая из причинности, приводит к стабилизации поведения инвариантного заряда АТВ в ИК-области. Важным свойством всех кривых является схождение к универсальному ИК-пределу  $\alpha_E(Q^2 = 0) = 1/\beta_0$ , что и приводит к стабилизации картины. При этом устойчивость

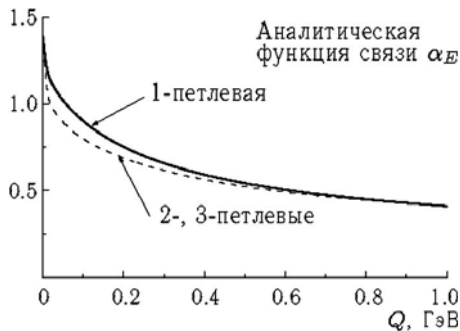


Рис. 17. Евклидовы АТВ-функции  $\alpha_E$  1-, 2- и 3-петлевых приближений в  $\overline{MS}$ -схеме

в УФ-области (начиная с двухпетлевого уровня), как и обычно, определяется свойством асимптотической свободы. Возникает впечатление, что, с некоторыми оговорками, двухпетлевое АТВ-приближение вполне достаточно для большей части практических нужд на всем интервале энергий.

Важным дополнительным бонусом оказывается количественная схемная стабильность. Как известно, схемная зависимость начинается лишь с трехпетлевого коэффициента бета-функции. Поэтому схемная стабильность является следствием петлевой.

Высшие АРТ-функции в области низких энергий, взятые как в евклидовой, так и в минковской версиях, качественно довольно близки\* друг к другу, как это видно из рис. 18.

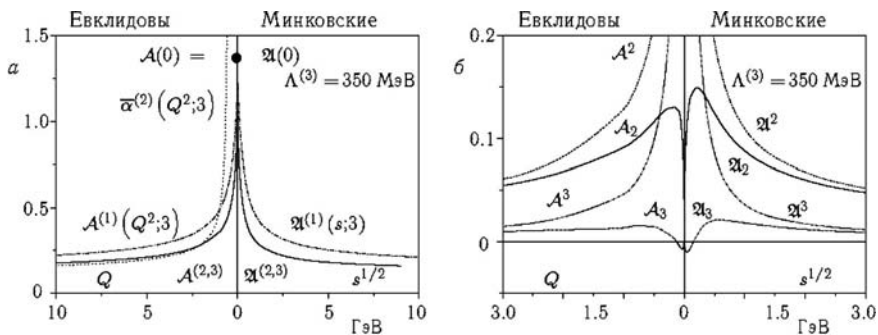


Рис. 18. а) Евклидова  $\alpha_E = \mathcal{A}_1$  и минковская  $\alpha_E = \mathfrak{A}_1$  функции связи КХД для  $\Lambda^{(3)} = 350$  МэВ. б) «Искривленное зеркало», демонстрирующее слегка асимметричное поведение высших евклидовых и минковских функций

\*Эта близость имеет место и в координатном представлении, т. е. для фурье-образов, зависящих от расстояния  $r$ .

В однопетлевом случае ( $\beta_{\ell \geq 1} = 0$ ) формулы АТВ просты и элегантны. Отправляясь от первых функций (73) и (76) с помощью соотношения (74) получаем

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_2^{(1)}(l) &= \frac{1}{\beta_0^2} \left( \frac{1}{l^2} - \frac{e^l}{(e^l - 1)^2} \right), \\
\mathfrak{A}_2^{(1)}(L) &= \frac{1}{\beta_0^2} \frac{1}{L^2 + \pi^2}, \quad l = \ln(Q^2/\Lambda^2); \\
\mathcal{A}_3^{(1)}(l) &= \frac{1}{\beta_0^3} \left( \frac{1}{l^3} - \frac{1}{2} \frac{e^l + e^{2l}}{(e^l - 1)^3} \right), \\
\mathfrak{A}_3^{(1)}(L) &= \frac{1}{\beta_0^3} \frac{L}{(L^2 + \pi^2)^2}, \quad L = \ln(s/\Lambda^2).
\end{aligned} \tag{77}$$

Двухпетлевой случай технически более сложен. Дело в том, что точное решение для  $\alpha_s$  здесь выражается лишь через специальную функцию Ламберта, что приводит к громоздким [36] явным выражениям для  $\mathcal{A}_k$  и  $\mathfrak{A}_k$ .

Однако независимо от уровня приближения все АТВ-функции обладают важными качественными свойствами:

- избавление от нефизических особенностей получено без обращения к каким-либо модельным представлениям и введения новых параметров;
- высшие функции (77) и т.д. отличаются от степеней первых функций (73), (76) и осциллируют в окрестности  $s, Q^2 \sim \Lambda^2$ , обращаясь в нуль в ИК-пределе — см. рис. 18, б. В то же время в УФ-пределе они переходят в степени  $\alpha_s$ ;
- разложения наблюдаемых по степеням  $(\alpha_s(Q^2))^n$  в евклидовом и по  $(\alpha_s(s))^n$  в минковском случаях заменяются функциональными разложениями по нестепенным наборам\*  $\{\mathcal{A}_k(Q^2)\}$  и  $\{\mathfrak{A}_k(s)\}$ , обладающими лучшей сходимостью.

*Глобальная АТВ.* При анализе процессов в различных энергетических областях следует учитывать зависимость теоретических результатов от числа активных кварковых ароматов  $n_f$ . В безмассовых схемах применяется процедура шивки логарифмических формул для эффективной функции (бегущей константы) связи на «евклидовых порогах». Такой способ нарушает гладкость евклидовой функции, а следовательно, не поддерживает и ее аналитичность.

В [37, 38] был разработан алгоритм гладкой шивки, основанный на восходящем к Боголюбову масс-зависящем ренорм-групповом формализме. Метод АТВ открывает новую возможность согласованного описания областей,

---

\*Как, например, в правой части уравнения (71).

отвечающих различному числу активных кварковых ароматов  $n_f$  [39,40]. Отправляясь от обычной сшивки, определяют спектральные плотности  $\rho(\sigma, n_f)$ , которые затем используют в формулах (72) и (75). При этом свойство аналитичности евклидовых функций не нарушается, а минковские функции оказываются кусочно-гладкими. В результате возникают «глобальные» АТВ-функции, которые «знают» о всех кварковых порогах.

*Фрактальная АТВ.* При анализе физических величин, обладающих аномальными размерностями (например, моментов структурных функций), имеют дело с нецелыми степенями функции связи  $\bar{\alpha}_s$ .

Ввиду этого в рамках АТВ был разработан [41,42] особый технический прием с целью получения функций АТВ  $\mathcal{A}_\kappa(Q^2)$ ,  $\mathcal{A}_\nu(s)$  с произвольными (фрактальными) индексами  $\kappa, \nu$ , гладко интерполирующими вышеописанные функции разложения между целыми значениями их индексов.

*Некоторые физические применения АТВ.* Аналитический подход был использован для описания многих адронных процессов. Литература, посвященная применению АТВ, достаточно обширна, и мы отметим лишь наиболее важные результаты, отослав читателя к имеющимся обзорам [40,43].

Среди успешных приложений АТВ в области достаточно низких энергий отметим

- инклюзивный распад  $\tau$ -лептона,
- $e^+e^-$ -аннигиляция в адроны,
- адронный вклад в  $g$ -фактор мюона и в постоянную тонкой структуры,
- анализ спектроскопии легких мезонов,
- электромагнитный формфактор пиона,
- моменты структурных функций неупругого лептон–адронного рассеяния.

**5.3. Ренорм-групповые симметрии в математической физике.** В заключение коснемся сюжета, выходящего за рамки квантовой теории поля. Тем не менее он находится в близости с основным лейтмотивом этого очерка — общей природой боголюбивской ренорм-группы, не связанной органически с перенормировками и проблемой вычитания ультрафиолетовых расходимостей. Речь идет о новом направлении, зародившемся (см. обзор [16]) в 1980-х гг. и связанном с использованием специфической *симметрии* относительно преобразования *репараметризации* частного решения краевой задачи.

*РГС-симметрии решений краевых задач.* При переносе ренорм-групповых представлений в задачи математической физики ставилась та же цель, что и в КТП — «исправление» поведения частного решения в окрестности сингулярности.

Как известно, симметрии систем ДУ могут быть найдены с помощью методов группового анализа, развитого Софусом Ли в конце XIX столетия. Техника Ли была использована [44] при создании «РГ-алгоритма», который



объединил ее с РГ-идеологией из КТП, что привело к созданию регулярного способа построения симметрий решений краевой задачи (КЗ), так называемого метода ренорм-групповых симметрий (РГС).

Сверх того, в самое последнее время удалось расширить [18] приложение алгоритма РГС к краевым задачам, использующим интегральные уравнения.

В случаях, описываемых сложными уравнениями, например, в теории переноса (интегродифференциальное уравнение Больцмана) или КТП (бесконечная зацепляющаяся цепочка интегродифференциальных уравнений Дайсона–Швингера) простой симметрией обладают лишь некоторые составляющие (компоненты) решения или их интегральные характеристики.

В самом деле, и в КТП центральным объектом РГ-формализма является «функция инвариантного заряда»  $\bar{\alpha}$  (иначе — «бегущая константа связи»), представляющая собой специфическое произведение лоренц-инвариантных амплитуд пропагаторов  $d_i$ , вертексов  $\Gamma_k$  и параметра разложения  $\alpha$ :  $\bar{\alpha} = \alpha \Gamma^2 \prod_i d_i$ . При этом в уравнения Дайсона–Швингера входят лишь функции  $d_i, \Gamma_k$  и константа  $\alpha$  по отдельности, но не их произведение  $\bar{\alpha}$ .

Иногда физический интерес представляет не само решение, а его интегральная характеристика — функционал от решения. Она может появляться путем усреднения (интегрирования) по одной из независимых переменных или в результате перехода к новому интегральному представлению, например, представлению Фурье. В этом случае РГ-алгоритм может быть применен для улучшения поведения функционала от приближенного решения.

Так, например, в простейшей плоской односкоростной задаче переноса свойством РГ-инвариантности обладает функция «плотности частиц, движущихся вглубь среды»  $n_+(x)$ , не входящая в уравнение Больцмана и представляемая в виде интеграла  $\int_0^1 n(x, \vartheta) d \cos \vartheta$  от решения кинетического уравнения  $n(x, \vartheta)$ .

*Алгоритм построения РГС.* В математической физике решение физической задачи обычно сводится к решению краевой задачи. Пусть, например, для системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка сформулирована задача Коши:

$$y_t = F(t, x, y, y_x), \quad y|_{t=0} = \psi(x), \quad (78)$$

и для нее определена группа Ли  $G$  с оператором

$$X = \xi^t \partial_t + \xi^x \partial_x + \eta \partial_y. \quad (79)$$

Известно (см. § 29 в [45]), что решение задачи Коши является  $G$ -инвариантным, если для любого оператора (79) функция  $\psi$  удовлетворяет уравнению

$$\eta(0, x, \psi) - \xi^x(0, x, \psi) \partial_x \psi - \xi^t(0, x, \psi) F(0, x, \psi, \partial_x \psi) = 0. \quad (80)$$

Решение задачи Коши (78) совпадает с орбитой группы  $G$ , но граничное многообразие  $t = 0, y - \psi(x) = 0$  в общем случае не является ее инвариантным многообразием. Этот пример указывает на идею построения надлежащего РГ-преобразования при использовании группы симметрии, связанной с данной КЗ при вовлечении краевых условий в групповые преобразования. Ключевым моментом является возможность *вычисления* группы преобразований с помощью регулярной процедуры, использующей технику современного группового анализа, при условии, что задача сформулирована с помощью дифференциальных или интегродифференциальных уравнений, и *проверки* условия инвариантности, сходного по форме с (80), для выделения группы симметрии, орбита которой совпадает с решением КЗ.

Детальное описание алгоритма построения и использования РГС для КЗ на основе дифференциальных уравнений можно найти в обзорах [16, 17], а его обобщение для нелокальных задач — в [18, 46]. Отметим здесь основные этапы алгоритма.

В качестве исходной рассматривается система из интегродифференциальных (в том числе дифференциальных и интегральных) уравнений, дополненная краевыми (граничными или начальными) условиями. Предполагается также известным некоторое приближенное решение, например, представленное отрезком ряда ТВ по степеням малого параметра.

Тогда схема реализации РГ-алгоритма может быть представлена в виде последовательности четырех шагов:

- (I) построение исходного *многообразия*  $\mathcal{R}, \mathcal{M}$ ,
- (II) нахождение допустимой *им группы симметрий*  $G$  и
- (III) ее *сужение* на частном решении КЗ и нахождение РГС, а также
- (IV) отыскание отвечающего РГС *аналитического решения*.



Первый шаг (I) состоит в вовлечении в групповые преобразования параметров, входящих в уравнения задачи и/или в краевые условия, от которых зависит данное частное решение.

Выбор конкретной реализации шага (I) определяется как видом уравнений и краевых условий, так и видом приближенного решения. Подобная многовариантность присуща только первому шагу алгоритма.

Следующий шаг (II), состоящий в вычислении наиболее широкой допускаемой группы симметрии  $G$ , выполняется с помощью хорошо разработанных теоретико-групповых методов. Однако при построении РГ-алгоритма в нелокальных задачах, где нет аналога классического алгоритма Ли, потребовалась существенная модификация [18] известных приемов.

Поскольку найденная на втором шаге группа  $G$  в общем случае является более широкой, чем интересующая нас ренорм-группа, то для получения РГС следует сделать третий шаг (III), заключающийся в *сужении* группы  $G$  на многообразии, задаваемом данным частным решением. Математическая процедура состоит в проверке условия инвариантности, близком по форме к (80), на некотором частном решении краевой задачи.

В результате третьего шага возникает набор операторов (генераторов), определяющих группу преобразований, названную *ренорм-группой*. Эта группа, имеющая конечную или бесконечную размерность, по структуре оказывается шире, чем РГ в КТП, которая является точечной однопараметрической группой. Кроме того, РГ в математической физике характеризуется большим разнообразием типов РГС, включающих помимо точечных и другие симметрии.

Отвлекаясь от вида получаемой РГС, отметим как общие, так и отличные черты в методах построения РГ в математической физике и КТП. РГ-преобразования в КТП определяются как преобразования растяжения параметров и независимых переменных и более сложные функциональные преобразования характеристик(и) решения, подчиняющихся групповому закону сложения в форме функциональных уравнений. Дифференцирование этих уравнений по параметру группы дает инфинитезимальную формулировку с помощью так называемой  $\beta$ -функции (или «генератора РГ» в принятой в КТП терминологии). Явный вид  $\beta$ -функции находится путем дифференцирования приближенного решения по каноническому параметру РГ в точке, где этот параметр обращается в нуль. Эта операция является аналогом процедуры сужения группы на решении в математической физике. Отметим, что в КТП термин «ренорм-группа» используется для обозначения группы преобразований еще *до* определения конкретной реализации  $\beta$ -функции (т. е. *до* проведения операции сужения группы на частном решении). Это обусловлено общим видом РГ-оператора, который одинаков для широкого круга задач в КТП. В математической физике, ввиду невозможности построения РГС в достаточно общем виде, термин «ренорм-группа» использован для обозначения алгебры симметрии, которая получается *после* процедуры сужения группы на решении.

Третий шаг алгоритма завершает процедуру построения РГС, однако для достижения конечной цели РГ-алгоритма — улучшения приближенного решения — необходим еще один, заключительный (IV), шаг. Он состоит в использовании операторов РГС для нахождения аналитических выражений для новых, улучшенных (по сравнению с исходными) решений КЗ. Матема-

тическая реализация этого шага состоит в использовании условий *ренорм-групповой инвариантности* (аналогичной понятию функционального самоподобия). Когда в роли РГ выступает *однопараметрическая точечная группа Ли*, условие РГ-инвариантности есть *уравнения в частных производных первого порядка*. Решения соответствующих им характеристических уравнений дают *групповые инварианты* (подобные инвариантным зарядам в КТП), через которые выражается искомое решение КЗ.

В общем случае РГ-инвариантное решение КЗ записывается через групповые инварианты задачи. Это утверждение носит общий характер и формулируется [46] в виде Ф-теоремы, являющейся функциональным обобщением известной П-теоремы.

*Приложения РГС в математической физике.* Обратимся к примерам применения РГ-алгоритма, в которых использование РГС приводит к новым аналитическим результатам. Первым из них явилось решение граничной нелинейной задачи взаимодействия *p*-поляризованной электромагнитной волны с неоднородной плазмой [44]. Упомянем также краевые задачи для класса уравнений, объединенных термином «уравнения квазичаплыгинских сред» [47]. Здесь с помощью РГС найдены новые точные и приближенные решения задачи о распространении мощного излучения в нелинейной среде в приближении геометрической оптики [48, 49]. В дальнейшем точные и приближенные РГС при наличии *двух* малых параметров были использованы для нахождения новых решений краевой задачи самофокусировки волнового пучка [50].

Распространение действия РГ-алгоритма на краевые задачи, использующие интегродифференциальные уравнения, позволило существенно расширить круг приложений. В кинетической теории плазмы (уравнения Власова–Максвелла), применяя РГС, удалось решить ряд задач о динамике плазменных сгустков и кластеров [18, 51].

Более подробное обсуждение вопросов приложения РГС можно найти в обзорах [16–18, 52].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Stueckelberg E. C. G. and Petermann A. // *Helv. Phys. Acta.* 1951. V. 24. P. 317.
2. Stueckelberg E. C. G. and Petermann A. // *Helv. Phys. Acta.* 1953. V. 26. P. 499–520.
3. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. // Доклады АН СССР. 1955. Т. 103. С. 203–206.
4. Gell-Mann M. and Low F. // *Phys. Rev.* 1954. V. 95. P. 1300–1312.
5. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. // Доклады АН СССР. 1955. Т. 103. С. 391–394.
6. Bogoliubov N. N. and Shirkov D. V. // *Nuovo Cim.* 1956. V. 3. P. 845–863.
7. Ширков Д. В. // Доклады АН СССР. 1955. Т. 105. С. 972–975.
8. Гинзбург И. Ф. // Доклады АН СССР. 1956. Т. 110. С. 535.

9. *Wilson K.* // Phys. Rev. B. 1971. V. 4. P. 3174–3183.
10. *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1957, 1973, 1976, 1984.
11. *Gross D. and Wilczek F.* // Phys. Rev. Lett. 1973. V. 30. P. 1343; Phys. Rev. D. 1973. V. 8. P. 3635; Phys. Rev. D. 1974. V. 9. P. 980.
12. *Georgi H., Quinn H. R., Weinberg S.* // Phys. Rev. 1974. V. 33. P. 451.
13. *Мнацаканян М. А.* // Доклады АН СССР. 1982. Т. 262. С. 856–860.
14. *Ширков Д. В.* // Доклады АН СССР. 1982. Т. 263. С. 64–67.
15. *Ширков Д. В.* // ТМФ. 1984. Т. 60. С. 218–223.
16. *Kovalev V. F., Pustovalov V. V. and Shirkov D. V.* // J. Math. Phys. 1998. V. 39. P. 1170–1188; hep-th/9706056.
17. *Kovalev V. F., Shirkov D. V.* // Phys. Reports. 2001. V. 352. P. 219–249; hep-th/0001210.
18. *Kovalev V. F., Shirkov D. V.* // J. Phys. A. 2006. V. 39. P. 8061–8073; см. также расширенную версию на русском языке в ссылке [46].
19. *Lie S.* // Math. Ann. 1880. V. 16. P. 441–528. English transl.: Lie Groups: History, Frontiers and Applications, V. 1. Sophus Lie’s 1880 Transformation Group Paper / Ed. Hermann R. Math. Sci. Press (Brookline, Mass. 02146, USA), 1975.
20. *Рамон П.* Теория поля (Современный вводный курс). М.: Мир, 1984;  
*Индурайн Ф.* Квантовая хромодинамика. М.: Мир, 1986;  
*Райдер Л.* Квантовая теория поля. М.: Мир, 1987;  
*Пескин М., Шредер Д.* Введение в квантовую теорию поля. М.–Ижевск: R&C Dynamics, 2001.
21. *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* Квантовые поля. М.: Наука, 1993 (2-е изд.); 2005 (3-е изд.).
22. Математическая энциклопедия. М., 1982. Т. 3. С. 259.
23. *Зельдович Я. Б., Баренблатт Г. И.* // Доклады АН СССР. 1958. Т. 118. С. 671–674; см. также *Баренблатт Г. И.* Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Л.: Гидрометеиздат, 1982.
24. *Callan C. G.* // Phys. Rev. D. 1970. V. 2. P. 1541;  
*Symanzik K.* // Comm. Math. Phys. 1970. V. 18. P. 227.
25. *Овсянников Л. В.* // Доклады АН СССР. 1956. Т. 109. С. 1112.
26. *Dirac P. A. M.* Theorie du Positron (7-eme Conseil du Physique Solvay: Structure et propriete de noyaux atomiques, Oct. 1933). Paris: Gauthier-Villars, 1934. P. 203–230.
27. *Bohr N.* // Phys. Rev. 1935. V. 48. P. 696.
28. *Ширков Д. В.* // ТМФ. 1981. Т. 49. С. 291–297.
29. *Shirkov D. V.* // Nucl. Phys. B. 1992. V. 371. P. 467–481.
30. *Ширков Д. В.* // ТМФ. 1992. Т. 93. С. 466–472.
31. *Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Ширков Д. В.* // ЖЭТФ. 1959. Т. 37, вып. 3(9). С. 805.
32. *Shirkov D. V., Solovtsov I. L.* Analytic QCD Running Coupling with Finite IR Behavior with Universal  $\bar{\alpha}_s(0)$  Value. JINR Rapid Comm. 1996. 2 [76]. P. 5; hep-ph/9604363.

33. *Shirkov D. V., Solovtsov I. L.* // Phys. Rev. Lett. 1997. V. 79. P. 1209; hep-ph/9704333.
34. *Shirkov D. V.* // Lett. Math. Phys. 1976. V. 1. P. 179.
35. *Shirkov D. V.* // Lett. Nuovo Cim. 1977. V. 18. P. 452.
36. *Magradze B.* // Int. J. Mod. Phys. A. 2000. V. 15. P. 2715–2734; hep-ph/9911456.
37. *Shirkov D. V.* // Nucl. Phys. B. 1992. V. 371. P. 467–481.
38. *Ширков Д. В.* // ТМФ. 1992. Т. 93, № 3. С. 466–472.
39. *Ширков Д. В.* // ТМФ. 2001. V. 127. P. 409–423; hep-ph/0012283.
40. *Shirkov D. V.* // Eur. Phys. J. C. 2001. V. 22. P. 331–340; hep-ph/0107282.
41. *Bakulev A., Mikhailov S. and Stefanis N.* // Phys. Rev. D. 2005. V 72. 074014. Erratum: *ibid.* D. V. 72. 119908; hep-ph/0506311.
42. *Bakulev A., Mikhailov S. and Stefanis N.* // Phys. Rev. D. 2007. V. 75. 056005. Erratum: *ibid.* D. 2008. V. 77. 079901; hep-ph/0607040.
43. *Соловцов И. Л., Ширков Д. В.* // ТМФ. 2007. Т. 150 С. 152–176; hep-ph/0611229.
44. *Ковалев В. Ф., Пустовалов В. В.* // ТМФ. 1989. Т. 81, № 1(10). С. 69–85.
45. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
46. *Shirkov D. V. and Kovalev V. F.* Renormgroup Symmetry for Solution Functionals. math-ph/0508055; Препринт ОИЯИ. P5-2004-12. Дубна, 2004.
47. *Жданов С. К., Трубников Б. А.* Квазигазовые неустойчивые среды. М.: Наука, 1991.
48. *Ковалев В. Ф.* // ТМФ. 1997. Т. 111. С. 369–388.
49. *Kovalev V. F., Shirkov D. V.* // J. Nonlin. Optical Physics & Materials. 1997. V. 6. P. 443–454; JINR Preprint E5-97-41. Dubna, 1997.
50. *Kovalev V. F., Bychenkov V. Yu., Tikhonchuk V. T.* // Phys. Rev. A. 2000. V. 61. 033809(1–10).
51. *Kovalev V. F., Bychenkov V. Yu.* // Phys. Rev. Lett. 2003. V. 90, No. 18. 185004(1–4).
52. *Ковалев В. Ф., Ширков Д. В.* // УФН. 2008. Т. 178(6).

Получено 17 июля 2008 г.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Ренорм-группа как группа Ли преобразований .....	1
1.1. Происхождение идей .....	1
1.2. Математические основы .....	4
2. Ренорм-группа и функциональное самоподобие .....	8
2.1. Функциональное самоподобие .....	8
2.2. Классические иллюстрации .....	9
3. Ренорм-группа в КТП .....	13
3.1. Ренорм-групповой формализм в КТП .....	13
3.2. РГ в КЭД .....	17
4. Метод ренорм-группы .....	23
4.1. Формулировка метода .....	23
4.2. Применение метода ренорм-группы .....	26
4.3. Сущность ренорм-группового метода .....	29
5. Ренорм-группа Боголюбова 50 лет спустя .....	30
5.1. Масс-зависимая РГ в окрестности порогов .....	30
5.2. Аналитическая теория возмущений в КХД .....	32
5.3. Ренорм-групповые симметрии в математической физике .....	38
Литература .....	42

Редактор *Т. Я. Жабицкая*  
Корректор *Е. А. Черногорова*

Подписано в печать 5.08.2008.  
Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.  
Усл. печ. л. 2,75. Уч.-изд. л. 3,34. Тираж 550 экз. Заказ № 56248.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований  
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.  
E-mail: [publish@jinr.ru](mailto:publish@jinr.ru)  
[www.jinr.ru/publish/](http://www.jinr.ru/publish/)