

P11-2008-142

Х. Т. Мелемов^{1,2}, Т. Л. Бояджиев^{1,3}

СПЛАЙН-КОЛЛОКАЦИОННАЯ СХЕМА
ПОВЫШЕННОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ
ДЛЯ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

¹Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

²Пловдивский университет, Болгария

³Софийский университет, Болгария

Мелемов Х. Т., Бояджиев Т. Л.

P11-2008-142

Сплайн-коллокационная схема повышенного порядка точности для систем обыкновенных дифференциальных уравнений

В настоящей работе построена схема сплайн-коллокации для решения краевых задач для линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Рассматривается также случай, когда уравнения системы заданы на вложенных интервалах изменения независимой переменной. Для достаточно гладких решений схема имеет точность $O(h^4)$ на равномерной сетке с шагом h . Реализация схемы сводится к системе алгебраических уравнений с блочно-диагональной матрицей, для решения которой применяется метод, являющийся модификацией классического метода Гаусса. Схема отличается простотой реализации на равномерных и неравномерных сетках и легко обобщается на задачах с разрывными коэффициентами без нарушения структуры алгебраической системы. Она может быть использована при решении широкого класса нелинейных задач физики. В качестве конкретного примера приложения рассматривается задача о статических распределениях магнитных потоков в геометрически симметричном двухслойном джозефсоновском контакте, отдельные субконтакты которого имеют разную длину.

Работа выполнена в Лаборатории информационных технологий ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2008

Melekov H. T., Boyadjiev T. L.

P11-2008-142

Spline-Collocation Scheme of High Order of Accuracy for Systems of Ordinary Differential Equations

In this paper we propose spline-collocation scheme for solving linear boundary value problems for systems of ODE's of the second order. We discuss the case when the system is given on the embedded intervals too. For smooth enough solutions the scheme precision on uniform grids is $O(h^4)$. The scheme can be easily generalized on discontinuous problems without violation of the structure of the algebraic system. The scheme can be applied for solving numerous nonlinear physical problems. As a concrete example we consider the problem for static distributions of magnetic flux in a system of two magnetically coupled long Josephson junctions with different layer lengths.

The investigation has been performed at the Laboratory of Information Technologies, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2008

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Вопросам построения разностных схем для краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений посвящено внушительное количество работ. Здесь следует отметить прежде всего классические монографии Самарского [1] и Марчука [2]. Среди многочисленных работ, выполненных в ОИЯИ, отметим статьи [3–6].

Метод коллокации для решения дифференциальных уравнений обоснован в классической работе Канторовича [7]. Ввиду ряда причин практическое применение традиционного метода коллокации затруднительно. Однако этот метод с использованием финитных функций и, в частности, сплайнов [8–11] дает возможность построения широкого класса схем, реализация которых не сложнее классических разностных схем и имеет ряд существенных преимуществ. Основное отличие метода сплайн-коллокации от традиционных разностных методов заключается в возможности найти приближенное аналитическое решение в виде сплайна на всем интервале интегрирования.

В настоящей работе численное решение краевых задач для линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка проводится при помощи метода сплайн-коллокации в виде, аналогичном предложенному в работе [12].

Рассмотрим краевую задачу третьего рода для линейной системы из K обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), заданной на конечном интервале $[-L, L]$,

$$A y_{xx} + B y_x + C y = \mathbf{f}, \quad x \in (-L, L), \quad (1.1a)$$

$$G_{\pm} y_x + H_{\pm} y = \mathbf{r}_{\pm}, \quad x = \pm L, \quad (1.1b)$$

где $\mathbf{y}(x) = \{y_k(x)\}$, $k = 1, 2, \dots, K$, — искомая вектор-функция размерностью $\dim \mathbf{y} = K$; $A(x) = \{a_{mk}(x)\}$, $B(x) = \{b_{mk}(x)\}$, $C(x) = \{c_{mk}(x)\}$, $m = 1, 2, \dots, K$, — заданные квадратные K -матрицы, причем $\det A(x) \neq 0$ при $x \in [-L, L]$; $\mathbf{f}(x) = \{f_k(x)\}$ — заданная K -вектор-функция; $G_{\pm} = \{g_{mk}^{\pm}\}$ и $H_{\pm} = \{h_{mk}^{\pm}\}$ — заданные постоянные квадратные K -матрицы; $\mathbf{r}_{\pm} = \{r_k^{\pm}\}$ — заданные постоянные K -векторы. Индексы \pm используются для обозначения величин в граничных точках интервала интегрирования.

2. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ

Введем на отрезке $[-L, L]$ сетку Ω из N узлов

$$\Omega \equiv \{x_{i+1} = x_i + h_i, i = 1, 2, \dots, N-1, x_1 = -L, x_N = L\}$$

с переменным в общем случае шагом h_i . Приближенное решение задачи (1.1) на каждом элементе $[x_i, x_{i+1}]$ сетки Ω будем искать в виде вектора

$$\mathbf{s}(x) = (s_1(x), \dots, s_K(x))^T, \quad (2.1)$$

координаты которого являются кубическими сплайнами [10]

$$s_k(x) = \phi(t) u_{k,i}^+ + \psi(t) h_i m_{k,i}^+ + \bar{\phi}(t) u_{k,i+1}^- + \bar{\psi}(t) h_i m_{k,i+1}^-. \quad (2.2)$$

Здесь индекс T обозначает транспонирование, индекс $k = 1, \dots, K$. Через $t = (x - x_i)/h_i$, $t \in [0, 1]$ обозначена локальная координата, $\{u_{k,i}^\pm, m_{k,i}^\pm\}$ — значения справа и слева от сплайна $s_k(x)$ и его производной $m_k(x) \equiv s_{k,x}(x)$ в узлах $i = 2, 3, \dots, N-1$ сетки Ω . В граничных узлах Ω с номерами 1 и N определены соответственно пары $\{u_{k,1}^+, m_{k,1}^+\}$ и $\{u_{k,N}^-, m_{k,N}^-\}$. Базисные функции $\phi(t)$ и $\psi(t)$ удовлетворяют условиям $\phi(0) = 1$, $\psi(0) = 1$, а остальные значения функций и их производных в узлах элемента равны нулю (точкой сверху обозначено дифференцирование по локальной переменной t). Явные выражения для величин $\phi(t)$ и $\psi(t)$ приведены, например, в книге [10]:

$$\phi(t) = (1-t)^2(1+2t), \quad \psi(t) = t(1-t)^2.$$

Для функций $\bar{\phi}(t)$ и $\bar{\psi}(t)$, участвующих в (2.2), выполнены соотношения

$$\bar{\phi}(t) = \phi(1-t), \quad \bar{\psi}(t) = -\psi(1-t). \quad (2.3)$$

Введем на каждом элементе $1 \leq i \leq (N-1)$ вектор-функцию невязки

$$\Delta_i(x) \equiv A(x) \mathbf{S}_{xx}(x) + B(x) \mathbf{S}_x(x) + C(x) \mathbf{S}(x) - \mathbf{f}(x). \quad (2.4)$$

Для отыскания $4K(N-1)$ неизвестных $\{u_{k,i}^\pm, m_{k,i}^\pm\}$ определим $2N-2$ точек коллокации x_{ij} , $j = 1, 2$, по формулам

$$x_{ij} = x_i + t_j h_i.$$

Здесь $t_1 = (1 - 1/\sqrt{3})/2$ и $t_2 = (1 + 1/\sqrt{3})/2$ — узлы Гаусса–Кристоффеля на интервале $[0, 1]$. Далее через $u_{k,ij}$ будем обозначать значение функции $u_k(x)$ в точке x_{ij} , т. е. $u_{k,ij} = u_k(x_{ij})$.

Целесообразно упорядочить узловые неизвестные и правые части в узлах Ω следующим образом:

$$\mathbf{u}_i = (u_{1,i}, \dots, u_{K,i}, m_{1,i}, \dots, m_{K,i})^T,$$

$$\mathbf{f}_i = (f_{1,i1}, \dots, f_{K,i1}, f_{1,i2}, \dots, f_{K,i2})^T.$$

Введем $2K \times 2K$ -матрицы $A_i = (A_{i,js})$ и $B_i = (B_{i,js})$

$$A_i = \begin{pmatrix} A_{i,11} & A_{i,12} \\ A_{i,21} & A_{i,22} \end{pmatrix}, \quad B_i = \begin{pmatrix} B_{i,11} & B_{i,12} \\ B_{i,21} & B_{i,22} \end{pmatrix},$$

элементами которых являются матрицы $A_{i,js}$ и $B_{i,js}$, $j, s = 1, 2$, размерностью $K \times K$. В свою очередь элементы последних задаются выражениями

$$[A_{i,j1}]_{mk} = \frac{1}{h_i^2} \ddot{\phi}_j a_{mk,ij} + \frac{1}{h_i} \dot{\phi}_j b_{mk,ij} + \phi_j c_{mk,ij},$$

$$[A_{i,j2}]_{mk} = \frac{1}{h_i} \ddot{\psi}_j a_{mk,ij} + \frac{1}{h_i} \dot{\psi}_j b_{mk,ij} + \psi_j h_i c_{mk,ij},$$

$$[B_{i,j1}]_{mk} = \frac{1}{h_i^2} \ddot{\phi}_j a_{mk,ij} + \frac{1}{h_e} \dot{\phi}_j b_{mk,ij} + \bar{\phi}_j c_{mk,ij},$$

$$[B_{i,j2}]_{mk} = \frac{1}{h_i} \ddot{\psi}_j a_{mk,ij} + \frac{1}{h_e} \dot{\psi}_j b_{mk,ij} + \bar{\psi}_j h_i c_{mk,ij},$$

где с учетом свойств симметрии (2.3)

$$\bar{\phi}_1 = \phi_2, \dot{\bar{\phi}}_1 = \dot{\phi}_2, \ddot{\bar{\phi}}_1 = \ddot{\phi}_2, \quad \bar{\phi}_2 = \phi_1, \dot{\bar{\phi}}_2 = -\dot{\phi}_1, \ddot{\bar{\phi}}_2 = \ddot{\phi}_1,$$

$$\bar{\psi}_1 = -\psi_2, \dot{\bar{\psi}}_1 = \dot{\psi}_2, \ddot{\bar{\psi}}_1 = \ddot{\psi}_2, \quad \bar{\psi}_2 = -\psi_1, \dot{\bar{\psi}}_2 = \dot{\psi}_1, \ddot{\bar{\psi}}_2 = -\ddot{\psi}_1.$$

Значения базисных функций $\phi(t_j)$ и $\psi(t_j)$ и их производных в точках коллокации приведены в табл. 1.

Таблица 1.

ϕ_1	0,8849002	ϕ_2	0,1150998	ψ_1	0,1314458	ψ_2	0,0352208
$\dot{\phi}_1$	-1	$\dot{\phi}_2$	-1	$\dot{\psi}_1$	0,2886751	$\dot{\psi}_2$	-0,2886751
$\ddot{\phi}_1$	-3,4641016	$\ddot{\phi}_2$	3,4641016	$\ddot{\psi}_1$	-2,7320508	$\ddot{\psi}_2$	0,7320508

Далее потребуем, чтобы в точках коллокации x_{ij} невязка, определяемая формулой (2.4), обращалась в нуль, т. е. $\Delta_i(x_{ij}) = 0$. Это приводит к $N - 1$ векторным уравнениям вида

$$A_i \mathbf{u}_i^+ + B_i \mathbf{u}_{i+1}^- = \mathbf{f}_i, \quad (2.6)$$

$i = 1, 2, \dots, N - 1$, по одному на каждом элементе $[x_i, x_{i+1}]$.

На отрезке $[-L, L]$ соответствующее число скалярных уравнений есть $2K(N-1)$, и они содержат $4K(N-1)$ неизвестных. Потребуем дополнительно, чтобы в каждом внутреннем узле $i = 2, 3, \dots, N-1$ сетки Ω сплайн-вектор $\mathbf{s}(x)$ и его производная были непрерывными. Это означает, что

$$\mathbf{u}_i^- = \mathbf{u}_i^+ = \mathbf{u}_i, \quad i = 2, \dots, N-1.$$

При этих предположениях условия коллокации сводятся к $2K(N-1)$ линейным алгебраическим уравнениям для $2NK$ неизвестных $(u_{1,i}, \dots, u_{K,i}, m_{1,i}, \dots, m_{K,i})$. Для замыкания системы используются граничные условия (1.1b).

Введем $2KN$ -вектор неизвестных $\mathbf{U} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_N)^T$, а также $2KN$ -вектор правых частей $\mathbf{V} = (\mathbf{r}_-, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_{N-1}, \mathbf{r}_+)^T$. В итоге реализация сплайн-разностной схемы эквивалентна следующей двухточечной системе векторных линейных алгебраических уравнений:

$$W\mathbf{U} = \mathbf{V}. \quad (2.7)$$

Матрица W системы имеет блочно-диагональную структуру [9]. Число блоков W соответствует числу $(N-1)$ подынтервалов сетки. Число столбцов каждого блока фиксировано — $4K$, число строк блоков зависит от номера блока. Блоки с номерами $i = 2, 3, \dots, N-2$ имеют $2K$ строк. Первый ($i = 1$) и последний ($i = N-1$) блоки содержат дополнительные строки, которые учитывают краевые условия (1.1b):

$$D_- \mathbf{u}_1 = \mathbf{r}_-, \quad D_+ \mathbf{u}_N = \mathbf{r}_+.$$

Здесь $D_{\pm} = \{d_{kn}^{\pm}\}$ — прямоугольная $K \times 2K$ -матрица, в которой первые K столбцов соответствуют матрице G , а вторые K — матрице H , т. е. для $k = 1, \dots, K$ имеем $d_{kn}^{\pm} = g_{kn}^{\pm}$, $n = 1, \dots, K$, и $d_{kn}^{\pm} = h_{kn-K}^{\pm}$, $n = K+1, \dots, 2K$. Квадратная матрица W имеет следующую структуру:

$$W = \begin{pmatrix} D_- & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_1 & B_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & A_2 & B_2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & A_s & B_s & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & A_{s+1} & B_{s+1} & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & A_{N-2} & B_{N-2} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & A_{N-1} & B_{N-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & D_+ \end{pmatrix}.$$

Для решения системы алгебраических уравнений (2.7) используется специализированная подпрограмма CWIDTH [9]. Эта программа реализует метод Гаусса с выбором главного элемента, модифицированный для блочно-диагональных матриц с одинаковым числом столбцов в каждом блоке.

Рассмотрим теперь случай, когда в некоторой заданной точке $x = x_d$ решение $y(x) = \{y_1(x), \dots, y_K(x)\}$ задачи (1.1) является непрерывной функцией

$$y_k(x_d - 0) = y_k(x_d + 0),$$

но производная $y_x(x)$ терпит разрыв первого рода по формулам

$$y_{k,x}(x_d + 0) = \sum_{m=1}^K D_{d,km} y_{m,x}(x_d - 0) - p_{d,k}, \quad (2.8)$$

где $D_d = \{D_{d,mk}\}$ — заданная постоянная квадратная K -матрица и $\mathbf{p}_d = \{p_{d,k}\}$ — заданный постоянный K -вектор. Задачи с разрывами указанного вида часто встречаются в физике.

Для корректного учета ограничений (2.8) выберем сетку Ω так, чтобы точка x_d являлась узлом. Пусть $1 < r < N$ есть номер этого узла. Тогда учет разрыва производной сводится к переприсвоению элементам $A_{r,j2}$ и правым частям \mathbf{r}_{kj} блока с номером r значений

$$A_{r,j2} := A_{r,j2} D_d, \quad \mathbf{r}_{rj} := \mathbf{r}_{rj} + A_{r,j2} \mathbf{p}_d.$$

Отметим, что при этом структура матрицы W линейной системы (2.7) сохраняется неизменной.

3. ЧИСЛЕННЫЙ ТЕСТ

В качестве тестового примера рассмотрим линейную краевую задачу для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$y_{1,xx} + 6y_1 + 7y_2 = 0, \quad (3.1a)$$

$$y_{2,xx} + 3y_1 + 2y_2 = 2x. \quad (3.1b)$$

Общее решение рассматриваемой системы выглядит следующим образом:

$$y_1(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + 7c_3 \cos 3x + 7c_4 \sin 3x + 14/9 x,$$

$$y_2(x) = -c_1 e^x - c_2 e^{-x} + 3c_3 \cos 3x + 3c_4 \sin 3x - 4/3 x.$$

Мы рассмотрим линейную краевую задачу для системы (3.1) на интервале $x \in (0, 1)$ с граничными условиями

$$y_{1,x}(0) = 42/9, \quad y_{2,x}(0) = 0, \quad (3.2a)$$

$$y_{1,x}(1) = 42/9, \quad y_{2,x}(1) = 0. \quad (3.2b)$$

В этом случае точное аналитическое решение следующее:

$$y_1(x) = \frac{28(\cos 3 - 1)}{27 \sin 3} \cos 3x + \frac{28}{27} \sin 3x + \frac{14}{9} x, \quad (3.3a)$$

$$y_2(x) = \frac{28(\cos 3 - 1)}{27 \sin 3} \cos 3x + \frac{28}{27} \sin 3x - \frac{4}{3} x. \quad (3.3b)$$

Для численного исследования точности задача (3.1), (3.2) решалась на последовательности равномерных сеток с $N = 33, 65$ и 129 узлами. В табл. 2, 3 приведены значения численного решения $u_{i,0} = s_i(0)$ в точке $x = 0$ и, соответственно, значения численного решения $u_{i,1} = s_i(1)$ в точке $x = 1$.

Таблица 2.

N	$u_{1,0}$	$u_{2,0}$
33	-14,623690513719204	-6,267295934450878
65	-14,623694494387587	-6,267297640451075
129	-14,623694743402968	-6,267297747168608

Таблица 3.

N	$u_{1,1}$	$u_{2,1}$
33	16,179246069274665	4,933962601117548
65	16,179250049942340	4,933964307118434
129	16,179250298954461	4,933964413838836

По этим данным вычисленные показатели Рунге

$$r_u = \frac{u_h - u_{h/2}}{u_{h/2} - u_{h/4}} \quad (3.4)$$

равны $r_u \approx 15,985$ в обоих узлах. Это означает, что рассматриваемая сплайн-коллокационная схема аппроксимирует решение (3.1) с точностью $O(h^4)$ на равномерной сетке.

Так как «по построению» граничные условия (3.2) выполнены точно, то для вычисления показателей Рунге для производных мы рассмотрим дополнительно значения численного решения в точках $x = 0,25$ и $x = 0,75$. В табл. 4, 5 приведены значения коэффициентов сплайна $m_{i,0,25}$ в точке $x = 0,25$ и, соответственно, $m_{i,0,75}$ в точке $x = 0,75$.

Вычисленные по этим данным показатели Рунге равны $r_u \approx 15,986$ и $r_m \approx 15,992$ в обоих узлах — производные решения (3.1) в узлах сетки также аппроксимируются с точностью $O(h^4)$. Таким образом, предложенная сплайн-разностная схема приближает с одной и той же точностью $O(h^4)$ как решение краевой задачи (3.1), так и его производную.

Таблица 4.

N	$m_{1;0,25}$	$m_{2;0,25}$
33	33,736140653562330	12,458345994383420
65	33,736151679458757	12,458350719767523
129	33,736152368920784	12,458351015248555

Таблица 5.

N	$m_{1;0,75}$	$m_{2;0,75}$
33	33,736140653562344	12,458345994383441
65	33,736151679458750	12,458350719767521
129	33,736152368920848	12,458351015248585

4. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ ОДУ НА ВЛОЖЕННЫХ ИНТЕРВАЛАХ

Описанный выше алгоритм нетрудно обобщить на краевые задачи для ОДУ на вложенных интервалах изменения независимой переменной [13].

Рассмотрим линейную систему ОДУ, заданную на интервалах $I = [-L, L]$, $\check{I} = [-l, l]$ и $\hat{I} = I \setminus \check{I} = [-L, -l) \cup (l, L]$ вида

$$-\hat{A}\hat{y}_{xx} + \hat{B}\hat{y}_x + \hat{C}\hat{y} = \hat{f}, \quad x \in \hat{I} \setminus \partial\hat{I}, \quad (4.1a)$$

$$\hat{G}_{\pm}\hat{y}_x + \hat{H}_{\pm}\hat{y} = \hat{r}_{\pm}, \quad x \in \partial\hat{I}, \quad (4.1b)$$

$$-A\mathbf{y}_{xx} + B\mathbf{y}_x + C\mathbf{y} = \mathbf{f}, \quad x \in \check{I} \setminus \partial\check{I}, \quad (4.1c)$$

$$G_{\pm}\mathbf{y}_x + H_{\pm}\mathbf{y} = \mathbf{r}_{\pm}, \quad x \in \partial\check{I}. \quad (4.1d)$$

Здесь $\mathbf{y}(x) = (\hat{\mathbf{y}}(x), \check{\mathbf{y}}(x))^T$ — искомая вектор-функция размерностью $\dim \mathbf{y} = K$, $\dim \hat{\mathbf{y}} = M$, $K \geq M$; $\hat{A}(x)$, $\hat{B}(x)$, $\hat{C}(x)$ — заданные квадратные M -матрицы, причем $\det \hat{A}(x) \neq 0$ для $x \in \hat{I}$; $\hat{f}(x)$ — заданная M -вектор-функция; \hat{G}_{\pm} и \hat{H}_{\pm} — заданные постоянные квадратные M -матрицы; \hat{r}_{\pm} — заданные постоянные M -векторы; $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ — заданные квадратные K -матрицы; $\det A(x) \neq 0$ для $x \in \check{I}$, $\mathbf{f}(x)$ — заданная K -вектор-функция; G_{\pm} и H_{\pm} — заданные постоянные $(N - M) \times N$ -матрицы, \mathbf{r}_{\pm} — заданные $(K - M)$ -постоянные векторы. Координаты вектор-функции $\hat{\mathbf{y}}(x)$ непрерывны вместе с первыми производными на границе $\partial\hat{I}$ области \hat{I} .

Для корректной реализации метода сплайн-коллокации выберем сетку Ω так, чтобы граничные точки $x_p = -l$ и $x_r = l$ при $1 \leq p < r \leq N$ являлись узлами Ω . Приближенное решение системы (4.1) будем искать в виде

$$\mathbf{s} = \begin{cases} \hat{\mathbf{s}}(x), & x \in \hat{I}, \\ \check{\mathbf{s}}(x), & x \in \check{I}. \end{cases}$$

Здесь координаты M -вектора \hat{s} и K -вектора \hat{s} имеют вид, аналогичный (2.2). Соответственно, векторы неизвестных \hat{u}_i и правых частей \hat{f}_i в узлах Ω имеют размерность $2M$ для $i = 1, 2, \dots, p-1$ и $i = r+1, 2, \dots, N$, а векторы u_i и f_i , $i = p, p+1, \dots, r$ — размерность $2K$. Тогда глобальные векторы неизвестных $\mathbf{U} = (\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_{p-1}, u_p, \dots, u_r, \hat{u}_{p+1}, \dots, \hat{u}_N)^T$ и правых частей $\mathbf{V} = (\hat{f}_-, \hat{f}_1, \dots, \hat{f}_{p-1}, r_-, f_p, \dots, f_r, r_+, \hat{f}_{r+1}, \dots, \hat{f}_{N-1}, \hat{f}_+)^T$ будут иметь размерность $2M(p-1) + 2K(r-p+1) + 2M(N-r)$.

В результате реализация сплайн-разностной схемы снова приводит к системе векторных линейных алгебраических уравнений вида (2.7) с матрицей W блочно-диагональной структуры. При этом число столбцов каждого блока фиксировано и равно $4K$, а число строк зависит от номера блока. На подынтервалах \hat{I} блоки W имеют $2M$ строк, за исключением первого и последнего блоков. Эти два блока содержат дополнительные M строк, которые учитывают краевые условия (4.1b). Блоки на границах $x = \pm l$ имеют $2M$ строк от дискретизации (4.1a) и $K - M$ строк от краевых условий (4.1d). Блоки на интервале \hat{I} имеют $2K$ строк.

5. ПРИЛОЖЕНИЯ В ФИЗИКЕ ДЖОЗЕФСОНОВСКИХ КОНТАКТОВ

В качестве конкретного приложения рассмотрим задачу о статических распределениях магнитных потоков в двухслойном джозефсоновском контакте, отдельные субконтакты которого имеют разную длину. Упрощенная схема такого стека демонстрируется на рис. 1. Светлые прямоугольники изображают сверхпроводящие электроды, а затемненные — соответствующие барьерные слои. Длина длинного субконтакта JJ_1 есть $2L$, длина короткого JJ_2 равна $2l$. Если средние точки субконтактов совпадают, что ниже предполагается выполненным, стек будем называть геометрически симметричным.

Нетрудно показать, что в этом случае магнитные потоки $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ в длинном и коротком слоях удовлетворяют следующей нелинейной краевой задаче [13]:

$$\varphi_{1,x}(-L) = h_e, \quad (5.1a)$$

$$-\varphi_{1,xx} + \sin \varphi_1 - \gamma = 0, \quad x \in (-L, -l), \quad (5.1b)$$

$$\varphi_{2,x}(-l+0) - s\varphi_{1,x}(-l+0) = (1-s)h_e, \quad (5.1c)$$

$$-A\varphi_{xx} + J_z(\varphi) + \Gamma = 0, \quad x \in (-l, l), \quad (5.1d)$$

$$\varphi_{2,x}(l-0) - s\varphi_{1,x}(l-0) = (1-s)h_e, \quad (5.1e)$$

$$-\varphi_{1,xx} + \sin \varphi_1 - \gamma = 0, \quad x \in (l, L), \quad (5.1f)$$

$$\varphi_{1,x}(L) = h_e. \quad (5.1g)$$

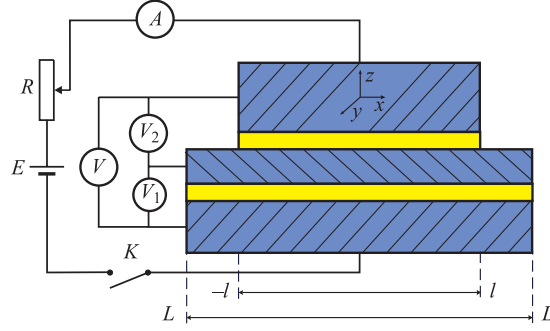


Рис. 1. Схема двухслойного контакта

Вектор $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)^T$ определен при $x \in [-l, l]$, вектор внешнего тока $\Gamma = \gamma(1, 1)^T$, где для простоты плотность $\gamma = \text{const}$. Аналогично, 2-вектор $H_e = h_e(1, 1)^T$, а постоянная h_e представляет собой внешнее магнитное поле, направленное вдоль оси y в плоскости контакта. Квадратная симметрическая матрица

$$A(s) = \frac{1}{1-s^2} \begin{pmatrix} 1 & -s \\ -s & 1 \end{pmatrix}$$

зависит только от коэффициента индуктивной связи $s \in (-1, 0]$ между слоями контакта [14, 15]. Вектор токов Джозефсона задается как $J_z = (\sin \varphi_1, 1/\rho \sin \varphi_2)^T$, где параметр $\rho = l/L \in (0, 1]$, причем величина $1/\rho$ есть амплитуда тока Джозефсона в субконтакте JJ_2 . Все величины записаны в безразмерном виде [16].

Отметим, что общие уравнения для многослойных джозефсоновских контактов с субконтактами одинаковой длины с учетом индуктивного и емкостного взаимодействий получены в [14, 15].

Решения (5.1) зависят не только от физической координаты x , но и от параметров l, s, h_e и γ , т.е. $\varphi = \varphi(x, p)$, где через $p \equiv \{l, s, h_e, \gamma\}$, $p \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^4$ обозначен 4-вектор параметров модели. Далее зависимость от p выписываем только при необходимости.

Равенства (5.1a) и (5.1g) — это краевые условия для функции $\varphi_1(x)$ на внешних границах $x = \pm L$ интервала I , а (5.1c) и (5.1e) — краевые условия для $\varphi_2(x)$ на $x = \pm l = \partial \tilde{I}$ с учетом взаимодействия между слоями.

На границах $x = \pm l$ выполняются также обычные условия гладкости потока $\varphi_1(x)$, но ток $\varphi_{1,xx}(x)$ в этих точках при $s < 0$ может терпеть разрывы, порожденные условиями (5.1c) и (5.1e).

Численное решение нелинейной краевой задачи (5.1) основывается на непрерывном аналоге метода Ньютона [17–19]. Стандартным образом на

каждой итерации в рассматриваемом случае приходим к линейной краевой задаче

$$w_{1,x}(-L) = -\varphi_{1,x}(-L) + h_e, \quad (5.2a)$$

$$-w_{1,xx} + \cos \varphi_1 w_1 = \varphi_{1,xx} - \sin \varphi_1 + \gamma, \quad (5.2b)$$

$$\begin{aligned} w_{2,x}(-l+0) - s w_{1,x}(-l+0) = \\ -\varphi_{2,x}(-l+0) + s \varphi_{1,x}(-l+0) + (1-s) h_e, \end{aligned} \quad (5.2c)$$

$$-A w_{xx} + Q(x)w = A \varphi_{xx} - J_z(\varphi) - \Gamma, \quad (5.2d)$$

$$\begin{aligned} w_{2,x}(l-0) - s w_{1,x}(l-0) = \\ -\varphi_{2,x}(l-0) + s \varphi_{1,x}(l-0) + (1-s) h_e, \end{aligned} \quad (5.2e)$$

$$-w_{1,xx} + \cos \varphi_1 w_1 = \varphi_{1,xx} - \sin \varphi_1 + \gamma, \quad (5.2f)$$

$$w_{1,x}(L) = -\varphi_{1,x}(L) + h_e, \quad (5.2g)$$

которая, очевидно, относится к задачам вида (4.1). При этом 2-матрица потенциалов

$$Q(x) = \text{diag} \left(\cos \varphi_1, \frac{1}{\rho} \cos \varphi_2 \right).$$

Ниже коротко рассмотрим влияние неодинаковости длин субконтактов на некоторые состояния в стеке, не комментируя их устойчивость. Все численные результаты, приведенные ниже, получены для «достаточно длинного» контакта ($2L = 10$, $2l = 8$) с коэффициентом индуктивной связи между субконтактами $s = -0,3$.

Важную роль в теории и приложениях джозефсоновских контактов играют вихревые (флаксоновые) распределения магнитного потока. Хорошо известно, что в «бесконечном» единичном контакте ($L \rightarrow \infty$), описываемом «обычным» уравнением sine-Gordon, методом обратной задачи рассеяния [20] установлен счетный набор флаксоновых решений. В контактах конечной длины такие решения деформируются за счет взаимодействия с границами, а также под влиянием внешнего поля h_e и тока γ . Далее вихревые решения обозначаем через $\Phi^{\pm n}$, где $n = 1, 2, \dots$, а через $\Phi_{\infty}^{\pm n}$ обозначены «соответствующие» решения в «бесконечном» контакте. Через n обозначено число флаксонов, содержащихся в конкретном распределении магнитного потока [22]. Для двухслойного контакта числа флаксонов в каждом из субконтактов вычисляются по формулам [21]

$$N_1[\varphi_1] = \frac{1}{2L\pi} \int_{-L}^L \varphi_1(x) dx, \quad N_2[\varphi_2] = \frac{1}{2l\pi} \int_{-l}^l \varphi_2(x) dx. \quad (5.3)$$

Вихревые решения вида (Φ^2, Φ^{-1}) из пары разнополярных флаксонов при $h_e = 0$ и $\gamma = 0$ демонстрируются на рис. 2. Видно, что взаимодействие

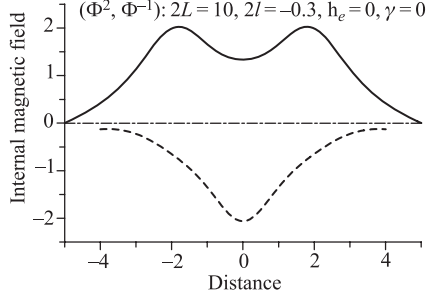


Рис. 2. Магнитное поле распределений вида (Φ^2, Φ^{-1}) : $2L=10, 2l=-0.3, h_e=0, \gamma=0$

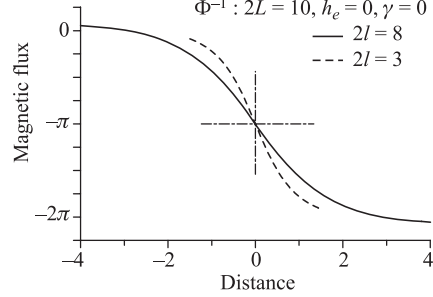


Рис. 3. Сохранение центра Φ^{-1} при изменении длины JJ_2

между слоями приводит к тому, что при $h_e = 0$ граничное значение поля для короткого контакта отлично от нуля, т.е. $\varphi_{2,x}(\pm l) \neq 0$.

Отметим, что если $\gamma = 0$, то значения $N^2(p) \equiv N[\Phi^2] = 2$ и $N^{-1}(p) \equiv N[\Phi^{-1}] = -1$. Здесь p — вектор параметров. При этом значения функционалов (5.3) в слоях не меняются при варьировании длин субконтактов, т.е. выполняются законы сохранения

$$\frac{\partial N^{\pm 1}}{\partial l} = 0, \quad \frac{\partial N^{\pm 2}}{\partial l} = 0.$$

Аналогичные утверждения имеют место и для значений потоков $\varphi_1(0)$ и $\varphi_2(0)$ в центре $x = 0$ контакта. Конкретный пример сохранения центра $\varphi_2(0)$ демонстрируется на рис. 3.

Отметим, что сохранение числа флаксонов при изменении длины имеет место для любых однополярных распределений магнитного потока в JJ [22].

Функционалы (5.3) и центры распределений однополярных флаксонов сохраняются также и при варьировании внешнего магнитного поля h_e . Математически это означает, что для любого однополярного распределения Φ^n , $n = \pm 1, 2, \dots$, имеет место равенство

$$\frac{\partial N[\Phi^n]}{\partial h_e} = 0.$$

Конкретный пример сохранения центров пары (Φ^1, Φ^{-1}) для контакта с параметрами $2L = 10, 2l = 3,8, s = -0,3$ и $\gamma = 0$ при изменении поля h_e показан на рис. 4 и 5. Значения $h_e \approx -1$ и $h_e \approx 2,1$ соответствуют нижней и верхней границам области существования пары при заданном токе γ .

На рис. 6 и 7 демонстрируется сохранение центров пары (Φ^1, Φ^{-1}) для контакта с параметрами $2L = 10, 2l = 7, h_e = 0$ и $\gamma = 0$ при изменении

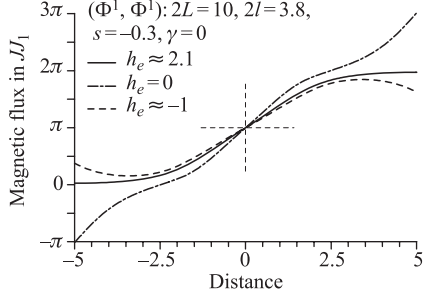


Рис. 4. Сохранение $\varphi_1(0)$ для (Φ^1, Φ^1) -распределения при варьировании h_e

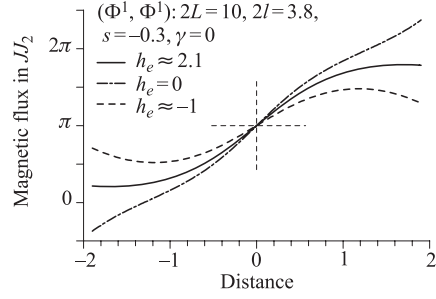


Рис. 5. Сохранение $\varphi_2(0)$ для (Φ^1, Φ^1) -распределения при варьировании h_e

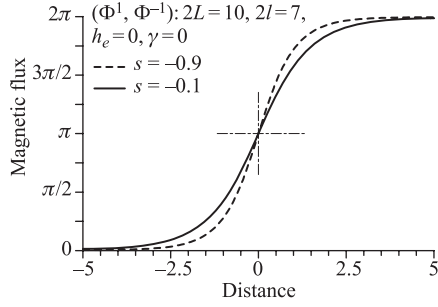


Рис. 6. Сохранение $\varphi_1(0)$ для (Φ^1, Φ^{-1}) -распределения при варьировании s

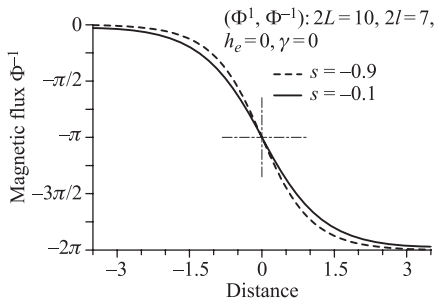


Рис. 7. Сохранение $\varphi_2(0)$ для (Φ^1, Φ^{-1}) -распределения при варьировании s

коэффициента связи между субконтактами s . Для функционалов (5.3) имеет место закон сохранения

$$\frac{\partial N[\Phi^n]}{\partial s} = 0.$$

При $\gamma \neq 0$ в силу нарушения симметрии распределений указанные законы сохранения не выполняются.

6. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В настоящей работе на основе метода сплайн-коллокации предложен алгоритм для решения краевых задач для линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Алгоритм использует кубические

эрмитовы сплайны. Метод обобщается без затруднений на задачи с разрывами на интервале интегрирования, а также на краевые задачи для систем ОДУ на вложенных интервалах.

Численный эксперимент показывает, что построенная сплайн-коллокационная разностная схема имеет порядок точности $O(h^4)$ на равномерной сетке. При этом точность сохраняется как для решения системы, так и для первой производной решения.

Реализован пакет программ для решения задач указанного класса.

В качестве конкретного примера рассмотрена задача о моделировании статических вихрей в двухслойном геометрически симметричном джозефсоновском контакте, субконтакты которого имеют неодинаковую длину. Для решения соответствующей нелинейной краевой задачи используется непрерывный аналог метода Ньютона.

Благодарности. Авторы выражают благодарность профессору И. В. Пузынину (ЛИТ, ОИЯИ) за внимание к настоящей работе и ценные обсуждения.

Работа финансировалась Софийским университетом, грант № 135/2008, а также Пловдивским университетом, грант № IC-M-4/2008.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.
2. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1977.
3. Пузынин И. В., Пузынина Т. П., Стриж Т. А. SLIPN4 — программа для численного решения задачи Штурма–Лиувилля. Сообщение ОИЯИ P11-87-332. Дубна, 1987.
4. Жанлав Т. Об аппроксимации решений краевых задач кубическими сплайнами. Препринт ОИЯИ P11-89-343. Дубна, 1989.
5. Жанлав Т., Пузынин И. В. Эволюционный ньютоновский процесс решения нелинейных уравнений // ЖВМиМФ. 1992. Т. 32, № 1. С. 3–12.
6. Земляная Е. В., Пузынин И. В., Пузынина Т. П. PROGS2N4 — программа для решения краевой задачи для системы дифференциальных уравнений. Сообщение ОИЯИ P11-97-414. Дубна, 1997.
7. Канторович Л. В. Об одном новом методе приближенного решения уравнений в частных производных // Докл. АН СССР. 1934. Т. 2, № 8–9. С. 532–536.
8. Рубин С., Хосла П. Численные решения повышенной точности, использующие кубические сплайны // Ракетная техника и космонавтика. 1976. Т. 14, № 7.
9. де Боор К. Практическое руководство по сплайнам. М., 1987.

10. *Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л.* Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980.
11. *Гребенников А. И.* Метод сплайнов в численном анализе. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1997.
12. *Бояджиев Т. Л.* Сплайн-коллокационная схема повышенного порядка точности. Сообщение ОИЯИ Р2-2002-101. Дубна, 2002.
13. *Мелемов Х. Т., Бояджиев Т. Л.* Численное решение систем ОДУ на вложенных интервалах. Сообщение ОИЯИ Р11-2008-31. Дубна, 2008.
14. *Sakai S., Bodin P., Pedersen N. F.* Fluxons in thin-film superconductor-insulator superlattices // *J. Appl. Phys.* 1993. V. 73(5). P. 2411.
15. *Machida M., Sakai S.* Unified theory for magnetic and electric field coupling in multistacked Josephson junctions // *Phys. Rev. B.* 2004. V. 70. P. 144520.
16. *Licharev K. K.* Dynamics of Josephson Junctions and Circuits. N.Y.: Gordon and Breach, 1986. P. 634.
17. *Жидков Е. П., Макаренко Г. И., Пузынин И. В.* Непрерывный аналог метода Ньютона для нелинейных задач физики // *ЭЧАЯ.* 1973. Т. 4, вып. 1. С. 127.
18. *Пузынин И. В. и др.* Обобщенный непрерывный аналог метода Ньютона для численного исследования некоторых нелинейных квантово-полевых моделей // *ЭЧАЯ.* 1999. Т. 30, вып. 1. P. 210–265.
19. *Пузынин И. В. и др.* О методах вычислительной физики для исследования моделей сложных физических процессов // *ЭЧАЯ.* 2007. Т. 38, вып. 1. С. 70–116.
20. *Piev I. D., Khristov E. Kh., Kirchev K. P.* Spectral methods in soliton equations. Wiley: Longman Sci. & Techn., 1994.
21. *Атанасова П. Х., Димова С. Н., Бояджиев Т. Л.* Численное моделирование критических зависимостей для двухслойных джозефсоновских контактов. Сообщение ОИЯИ Р11-2005-16. Дубна, 2005.
22. *Бояджиев Т. Л.* Численное исследование критических режимов в нелинейных полевых моделях физики. Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Дубна, 2002.

Получено 20 октября 2008 г.

Редактор *Е. В. Сабеева*

Подписано в печать 13.11.2008.

Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 1,06. Уч.-изд. л. 1,19. Тираж 310 экз. Заказ № 56394.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.

E-mail: publish@jinr.ru

www.jinr.ru/publish/