Р11-2009-150

И. В. Амирханов, Д. З. Музафаров, Н. Р. Саркар,
И. Сархадов, З. А. Шарипов

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА В ПОЛЕ КУЛОНОВСКОГО ПОТЕНЦИАЛА

Направлено в журнал «Вестник РУДН. Серия ”Математика. Информатика. Физика“»

Амирханов И. В. и др. P11-2009-150

Исследование решений краевых задач
для дифференциального уравнения высокого порядка
в поле кулоновского потенциала

Предложен алгоритм нахождения собственных значений и собственных функций одной краевой задачи для уравнения высокого порядка (6-го, 8-го, 10-го и 12-го порядков) с произвольным параметром ε при старших производных в поле кулоновского потенциала. При $\varepsilon \to 0$ некоторые решения этих уравнений совпадают с решением уравнения Шрёдингера. Проведены исследования свойств собственных значений и собственных функций при различных значениях ε. Алгоритм реализован с использованием системы символьных вычислений MAPLE.

Работа выполнена в Лаборатории информационных технологий ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2009

Amirkhanov I. V. et al. P11-2009-150

Investigation of Solutions of Boundary Problems
for the Differential Equation of High Order
in a Field of Coulomb Potential

An algorithm to find eigenvalues and eigenfunctions of one boundary problem for the equation of high order (6th, 8th, 10th and 12th orders) with an arbitrary parameter ε at higher derivatives in the Coulomb potential field is proposed. At $\varepsilon \to 0$, some solutions of these equations coincide with the solution of the Schrödinger equation. Investigations of the properties of eigenvalues and eigenfunctions with different values of ε have been conducted. The algorithm is implemented using the MAPLE system of symbolic calculations.

The investigation has been performed at the Laboratory of Information Technologies, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2009

ВВЕДЕНИЕ

Одной из актуальных задач теории элементарных частиц является построение модели для единообразного описания спектра и формфакторов взаимодействия легких и тяжелых мезонов, так называемых кварккониев, рассматриваемых как связанные состояния кварка и антикварка. Тяжелые кварконии в некотором приближении успешно описываются нерелятивистской квантовой механикой — решение уравнения Шрёдингера на собственные значения [1]. При описании легких мезонов возникает необходимость учета релятивистских эффектов.

Релятивистское обобщение потенциальной модели кваркония приводит к решению спектральной задачи для уравнения Бете–Солпитера и различных вариантов квазипотенциальных уравнений [2–6].

В данной работе так же, как и в предыдущих работах [7–14], мы рассматриваем квазипотенциальное уравнение [3, 4]. В частном случае для S-волны оно имеет вид

$$[E_\varepsilon - H_\varepsilon - V(r)]\,\psi(r) = 0, \tag{1}$$

где

$$E_\varepsilon = \frac{2}{\varepsilon^2}\left[\sqrt{1+\varepsilon^2 q^2} - 1\right] = \frac{2q^2}{\sqrt{1+\varepsilon^2 q^2}+1}, \quad H_\varepsilon = \frac{2}{\varepsilon^2}\left[\operatorname{ch}\left(i\varepsilon\frac{d}{dr}\right) - 1\right],$$

$V(r)$ — кулоновский потенциал взаимодействия, ε — безразмерный параметр. При $\varepsilon \to 0$, $E_\varepsilon \to q^2$, $H_\varepsilon \to \dfrac{d^2}{dr^2}$, уравнение (1) переходит в нерелятивистское уравнение Шрёдингера

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - V(r) + q^2\right]\psi(r) = 0. \tag{2}$$

В уравнении (1), разлагая оператор $\operatorname{ch}\left(i\varepsilon\dfrac{d}{dr}\right)$ в ряд, можно получить следующее дифференциальное уравнение бесконечного порядка [15]:

$$\left[E_\varepsilon + \left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2\varepsilon^2}{4!}\frac{d^4}{dr^4} + \frac{2\varepsilon^4}{6!}\frac{d^6}{dr^6} - \ldots\right) - V(r)\right]\psi(r) = 0. \tag{3}$$

Если в уравнении (3) отбросить члены высших порядков, то в результате мы получим обыкновенное дифференциальное уравнение конечного порядка

$$\left[E_\varepsilon + \left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2\varepsilon^2}{4!}\frac{d^4}{dr^4} + \frac{2\varepsilon^4}{6!}\frac{d^6}{dr^6} - \ldots + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{2\,(-1)^{m-1}\,\varepsilon^{2(m-1)}}{(2m)\,!}\frac{d^{2m}}{dr^{2m}}\right) - V\,(r)\right]\psi\,(r) = 0, \quad (4)$$

где $2m$ — порядок уравнений $(m = 1,\, 2\ldots M)$.

Одной из важных особенностей уравнений (3), (4) является наличие параметра ε при старших производных, и при $\varepsilon \to 0$ — это есть сингулярно-возмущенные дифференциальные уравнения. При исследовании этих уравнений возникла необходимость исследования краевых задач. Особую актуальность приобретают методы поиска таких решений $\{\psi_n,\, \lambda_n\}$ (собственные функции и собственные значения), которые сохраняют свои свойства как для дифференциальных уравнений конечного порядка, так и для дифференциальных уравнений бесконечного порядка при условии возможности задания краевых условий и если решение поставленной задачи существует. Одна из особенностей краевых задач для дифференциальных уравнений высокого порядка $2m\,(m = 1,\, 2\ldots M)$ заключается в том, что необходимо накладывать $2m$ краевых условий на решения задачи. Так как эти условия, как правило, налагаются в двух точках (для уравнений (3), (4)) $r = 0$ и $r = r_0$ (или $r \to \infty$), то количество возможных краевых задач $\{\psi_n,\, \lambda_n\}_{2m}$ с увеличением порядка уравнения $2m$ сильно растет. Поэтому были исследованы краевые задачи, решения которых при $\varepsilon \to 0$ переходят в решение уравнения 2-го порядка (уравнения Шрёдингера), т. е.

$$\{\psi_n,\, \lambda_n\}_{2m} \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} \{\psi_n,\, \lambda_n\}_2$$

для любого фиксированного n.

Тогда разность собственных значений $\Delta = |\lambda_{n,2m} - \lambda_{n,2}|$ можно интерпретировать как поправки (релятивистские поправки) к решению уравнения Шрёдингера. Кроме того, важно исследовать поведение решений краевых задач $\{\psi_n, \lambda_n\}_{2m}$ при фиксированном значении ε, но при возрастании порядка уравнений $2m$.

Количество возможных краевых задач $\{\psi_n,\, \lambda_n\}_{2m}$ с увеличением порядка уравнения $2m$ сильно растет. Поэтому мы исследуем те краевые задачи, решения которых при $\varepsilon \to 0$ переходят в решение уравнения Шрёдингера и имеют четкий физический смысл. Однако имеются другие решения (так называемые погранслойные решения), которые требуют дальнейшего физического осмысления (физические интерпретации этих решений).

Задача Коши для таких систем дифференциальных уравнений была рассмотрена в работах [16, 17]. Краевые задачи для сингулярно-возмущенных уравнений являются предметом изучения широкого круга работ [18, 19].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В предыдущей работе [14] была подробно исследована краевая задача для дифференциального уравнения 4-го порядка ($m = 2$). В настоящей работе проводится исследование решений краевой задачи для дифференциального уравнения (4) при $m = 3,\ 4,\ 5,\ 6$:

$$\left[\frac{2\,(-1)^{m-1}\,\varepsilon^{2(m-1)}}{(2m)\,!}\frac{d^{2m}}{dr^{2m}} + \ldots + \frac{2\varepsilon^4}{6!}\frac{d^6}{dr^6} - \right.$$
$$\left. - \frac{2\varepsilon^2}{4!}\frac{d^4}{dr^4} + \frac{d^2}{dr^2} - \alpha^2 + \frac{2Z}{r}\right]\psi\,(r) = 0 \quad (5)$$

со следующими граничными условиями:

$$\begin{array}{ll} \psi\,(0) = 0, & \psi\,(r \to \infty) = 0, \\ \psi'\,(0) = 1, & \psi'\,(r \to \infty) = 0, \\ - - - - - - - - & - - - - - - - - - \\ & \psi^{2(m-1)}\,(r \to \infty) = 0, \end{array} \quad (6)$$

где $\alpha^2 = -E_\varepsilon$ — собственное значение $\left(\alpha^2 > 0\right)$.

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Решение с n узлами ищем в виде

$$\psi\,(r) = r\,(1 - c_1 r)\,\,(1 - c_2 r)\,\,(1 - c_3 r)\ldots(1 - c_n r)\exp\,(-\kappa r), \quad (7)$$

где κ, c_1, c_2, $c_3 \ldots c_n$ — неизвестные постоянные.

Подставляя это выражение в уравнение (5) и приравнивая слагаемые при одинаковых степенях r, получаем уравнение для нахождения параметра κ:

$$\frac{(-1)^{m-1}\,\varepsilon^{2(m-1)}}{(2m-1)!}\,\kappa^{2m-1} + \cdots + \frac{\varepsilon^4}{5!}\kappa^5 - \frac{\varepsilon^2}{3!}\kappa^3 + \kappa - \frac{Z}{(n+1)} = 0, \quad (8)$$

уравнение для нахождения собственных значений α^2:

$$\frac{2\,(-1)^{m-1}\,\varepsilon^{2(m-1)}}{(2m)!}\kappa^{2m} + \ldots + \frac{2\varepsilon^4}{6!}\kappa^6 - \frac{2\varepsilon^2}{4!}\kappa^4 + \kappa^2 - \alpha^2 = 0 \quad (9)$$

и систему n уравнений для нахождения c_i, $i = 1, 2, 3 \ldots n$. Например, для нахождения одноузлового решения (т. е. c_1, $c_2 = 0$, $c_3 = 0 \ldots c_n = 0$) имеем

$$c_1 = \frac{Z}{2\left[(-1)^{m-1}\dfrac{\varepsilon^{2m-2}\kappa^{2m-2}}{(2m-2)!} + \ldots + \dfrac{\varepsilon^4\kappa^4}{4!} - \dfrac{\varepsilon^2\kappa^2}{2!} + 1\right]}. \tag{10}$$

При $n = 0$ — это безузловое решение, $n = 1$ — решение с одним узлом, $n = 2$ — решение с двумя узлами и т. д.

Таким образом, алгоритм нахождения собственных функций и собственных значений краевой задачи (5), (6) сводится к следующему.

1. Для заданных значений ε и n ищем действительные и положительные (для удовлетворения граничному условию при $r \to \infty$ необходимо, чтобы $\kappa > 0$) решения уравнения (8).

2. Подставляя найденные решения κ в уравнение (9), находим собственные значения α^2.

3. Решая систему уравнений для c_i, $i = 1, 2, 3 \ldots n$, находим ненормированное решение (7), которое удовлетворит граничным условиям $\psi'(0) = 1$.

4. Далее мы будем изучать свойства нормированных решений. Для этого умножаем функцию ψ на константу A, которая находится из условия $A\sqrt{\int\limits_0^\infty \psi^2 dr} = 1$. При этом граничное условие $\psi'(0) = 1$ переходит в $\psi'(0) = A$.

Действительные и положительные решения уравнения (8) существуют только при определенных ограничениях, накладываемых на параметр задачи ε. Так как не для любого ε уравнение (8) имеет действительные и положительные решения, сначала найдем ограничение на параметр ε. Для этого умножаем уравнение (8) на ε и записываем в виде

$$f(m, y) = \frac{Z\varepsilon}{n+1}, \tag{11}$$

где $y = \varepsilon\kappa$ и

$$f(m, y) = \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)!}y^{2m-1} + \ldots + \frac{1}{5!}y^5 - \frac{1}{3!}y^3 + y. \tag{12}$$

Исследуем решение (11) графически.

На рис. 1 представлены графики функции $f(m, y)$ для значений $m = 3, 4, 5, 6$.

Для заданных значений аргументов m, y из (11) находим значение ε; например,

$$\varepsilon_1 = \frac{n+1}{Z} f_{\min}(m, y_{\min}), \qquad \varepsilon_2 = \frac{n+1}{Z} f_{\max}(m, y_{\max}). \tag{13}$$

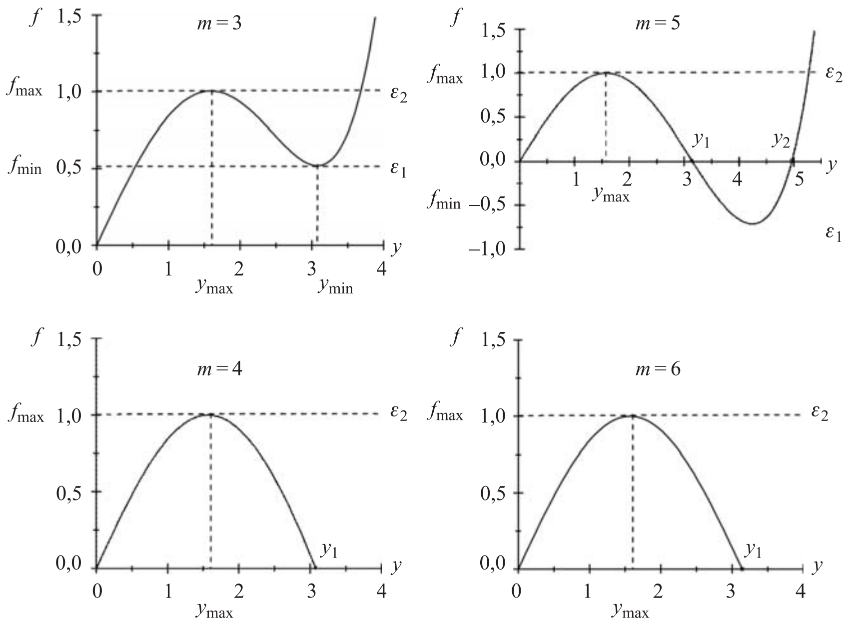

Рис. 1.

Из (13) следует, что ε_1 и ε_2 зависят от n, m, Z. Для кратности обозначения эти параметры явно в обозначениях ε_1 и ε_2 не указаны.

Из рис. 1 для случая $m = 3$ следует, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ уравнение (8) имеет одно действительное и положительное решение, при $\varepsilon_1 < \varepsilon < \varepsilon_2$ — три таких решения и, наконец, при $\varepsilon_2 < \varepsilon < \infty$ — опять одно такое решение. Для случая $m = 5$ при $0 < y < y_1$ $(0 < \varepsilon < \varepsilon_2)$ уравнение (8) имеет два действительных и положительных решения, а при $y_2 < y < \infty$ $(0 < \varepsilon < \infty)$ имеет только одно такое решение. Для случая $m = 4$ и $m = 6$ для $0 < y < y_1$ $(0 < \varepsilon < \varepsilon_2)$ уравнение (8) имеет два действительных и положительных решения.

Особо следует отметить, что для $m = 3$, 4, 5, 6, когда аргумент y функции $f(m, y)$ принимает разные значения в окрестностях $y = y_{\max} \pm 0$ и $y = y_{\min} \pm 0$, свойства решений задачи (5), (6) меняются, а именно для $m = 3$ это следующие интервалы: $0 < y < y_{\max}$ $(0 < \varepsilon < \varepsilon_2)$, $y_{\max} < y < y_{\min}$ $(\varepsilon_1 < \varepsilon < \varepsilon_2)$ и $y_{\min} < y < \infty$ $(\varepsilon_1 < \varepsilon < \infty)$; для $m = 5$ — интервалы: $0 < y < y_{\max}$ $(0 < \varepsilon < \varepsilon_2)$, $y_{\max} < y < y_1$ $(0 < \varepsilon < \varepsilon_2)$ и $y_2 < y < \infty$ $(0 < \varepsilon < \infty)$; а для $m = 4$ и $m = 6$ — только два интервала $0 < y < y_{\max}$ $(0 < \varepsilon < \varepsilon_2)$ и $y_{\max} < y < y_1$ $(0 < \varepsilon < \varepsilon_2)$. Отметим, что для $m > 6$ графики функции $f(m,\, y)$ сильно не усложняются, поэтому можно не проводить анализа типов решений вышеуказанным способом.

Далее, используя полученные ограничения на параметр ε для различных значений m ($m = 3,\, 4,\, 5,\, 6$), подробно рассмотрим следующие частные случаи ($n = 0$ — безузловое решение, $n = 1$ — решение с одним узлом) и продемонстрируем свойства полученных решений. Но сначала отметим очень важное свойство решений краевой задачи (5), (6). При $\varepsilon \to 0$ ($y \to 0$) для всех m ($m = 3,\, 4,\, 5,\, 6 \ldots$) решения этой задачи практически совпадают с решением уравнения Шрёдингера. Действительно, при $\varepsilon \to 0$ ($y \to 0$), например, $m = 3$ имеем:

• для случая решений без узлов:

$$\kappa = 1,000000002, \quad \alpha^2 = 1,000000003, \quad A = 2,000000006 \quad \text{и}$$

• для случая решений с одним узлом:

$$\kappa = 0,5000000002, \quad \alpha^2 = 0,2500000001,$$

$$c_1 = 0,5000000008, \quad A = 0,7071067794.$$

На рис. 2 приведены эти нормированные решения (слева) и решения уравнения Шрёдингера (справа) для сравнения.

Для других $m = 4,\, 5,\, 6$ эти решения также практически не отличаются от решения уравнения Шрёдингера. Поэтому здесь мы их не приводим.

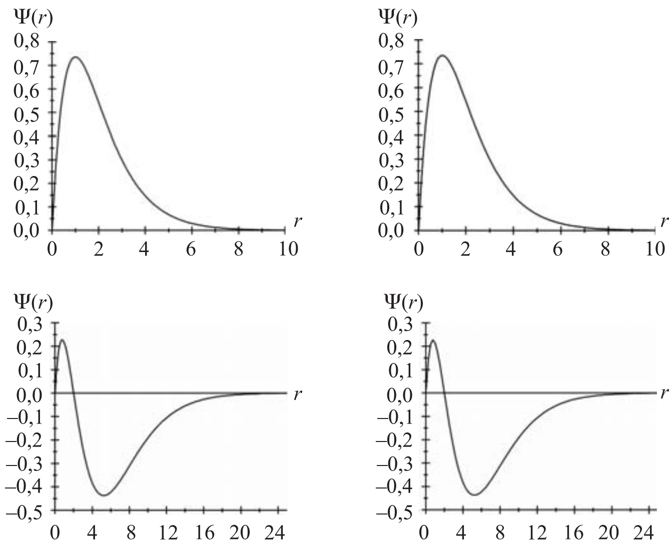

Рис. 2.

Безузловые решения. Решение ищем в виде $\psi(r) = r \exp(-\kappa r)$. Пусть $m = 3$. При малых ε решение краевой задачи мы представили на рис. 2. При непрерывном увеличении ε (также и при увеличении y) параметры задачи (κ, α^2, A) меняются не сильно, как следствие нормированные решения тоже не сильно отличаются от решений, приведенных на рис. 2. Однако при $\varepsilon \to \infty$ $(y \to \infty)$ ситуация меняется. Например, при $\varepsilon = 10$ $(y = 4{,}985560235)$ $\kappa = 0{,}4985560235$, $\alpha^2 = 0{,}1602764876$, $A = 0{,}7040458571$; при $\varepsilon = 100$ $(y = 7{,}126697625)$ $\kappa = 0{,}07126697625$, $\alpha^2 = 0{,}01997607525$, $A = 0{,}03805068634$.

На рис. 3 приведены эти нормированные решения, где $r_{1\,\max} = 2{,}005792635$, $\psi_{1\,\max} = 0{,}5195083086$ и $r_{2\,\max} = 14{,}03174447$, $\psi_{2\,\max} = 0{,}1964172744$. Видно, что при $\varepsilon \to \infty$ $(r_{\max} \to \infty)$ $\psi_{\max} \to 0$.

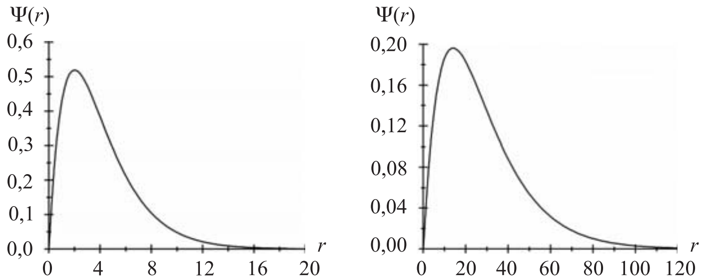

Рис. 3.

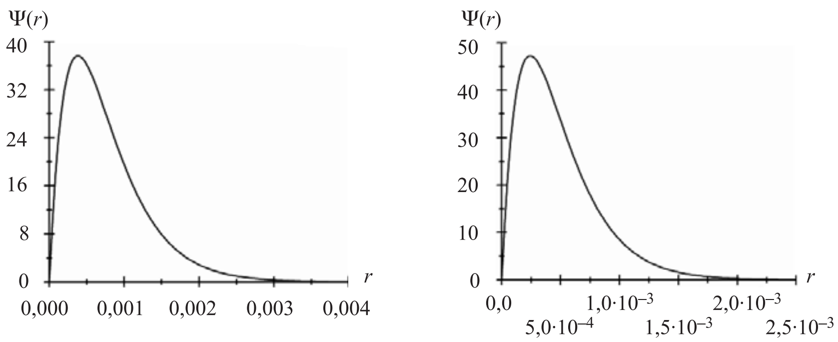

Рис. 4.

Пусть $m = 5$. Главное отличие от $m = 3$ в этом случае заключается в следующем. При $\varepsilon \to 0$, $y \to y_1 - 0$ и $y \to y_2 + 0$ краевая задача имеет решения с очень необычными свойствами, а именно решения отличны от нуля в начале координат (далее эти решения мы будем называть погранслойными решениями). Действительно, при $\varepsilon = 10^{-4}$, $y = 2{,}622883287 < y_1$

$\kappa_2 = 2622{,}883287, \quad \alpha_2^2 = 2{,}780351305 \cdot 10^6, \quad A_2 = 2{,}6865717541 \cdot 10^5$ и при $\varepsilon = 10^{-4}$, $y = 4{,}136{,}388177 > y_2$

$\kappa_3 = 4136{,}388177, \quad \alpha_3^2 = 1{,}61266271 \cdot 10^6, \quad A_3 = 5{,}320616144 \cdot 10^5$.

На рис. 4 приведены эти нормированные решения.

Анализ свойства решений краевой задачи (5), (6) при $m = 4$, $m = 6$ проводим аналогично, используя рис. 1. В обоих случаях, когда ε меняется в интервале $0 < \varepsilon < \varepsilon_2$, краевая задача имеет два решения, а при $\varepsilon \to 0$ и $y \to y_1 - 0$ появляются погранслойные решения такие же, как на рис. 4.

Теперь переходим к анализу свойств решений краевой задачи (5), (6) с одним узлом.

Решение с одним узлом. Решение ищем в виде $\psi(r) = r(1 - c_1 r) \times \exp(-\kappa r)$. Пусть $m = 3$. Как отмечалось выше, при $\varepsilon \to 0$ $(y \to 0)$ решение практически не отличается от решения уравнения Шрёдингера (см. рис. 2).

Если параметр ε меняется в интервале $\varepsilon_1 < \varepsilon < \varepsilon_2$ $(0 < y < y_{\max}$ и $y_{\min} < y < \infty)$, то задача имеет одноузловое решение (т. е. $c_1 > 0$). При $y_{\max} < y < y_{\min}$ решение превращается в безузловое (т. е. $c_1 < 0$). Чтобы это продемонстрировать, рассмотрим два варианта выбора ε.

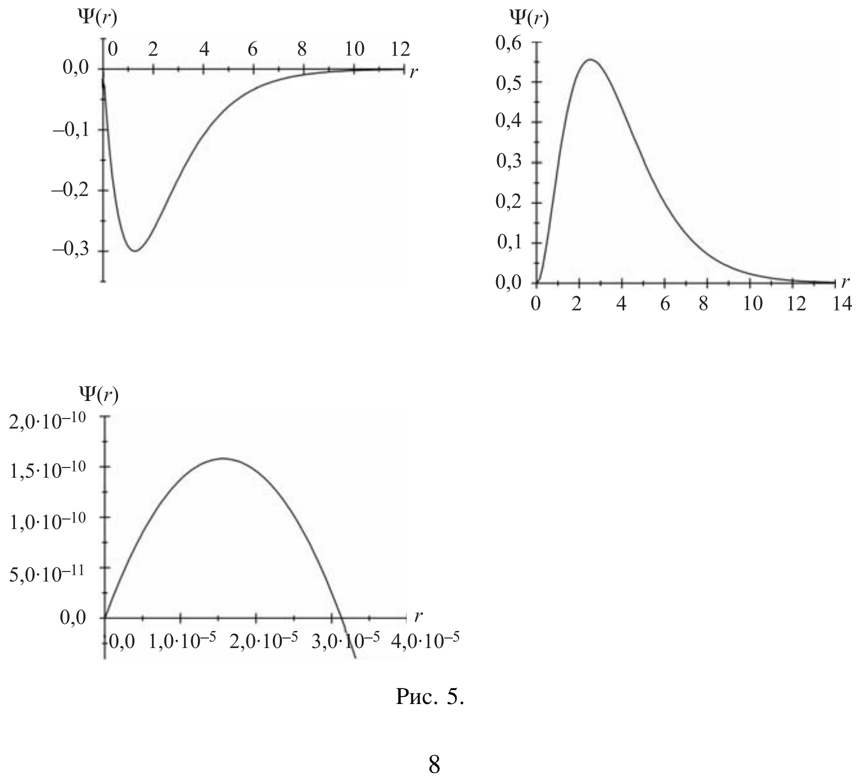

Рис. 5.

1. При $\varepsilon \to \varepsilon_2 - 0$ ($y \to y_{\max} - 0$ и $y \to y_{\max} + 0$), например, при $\varepsilon = 2{,}009481696$

$\kappa = 0{,}7924597750$, $\alpha^2 = 0{,}5065024284$, $c_1 = 31950{,}31088$,

$A = 0{,}00002020424997$;

$\kappa = 0{,}7924767159$, $\alpha^2 = 0{,}5065193692$, $c_1 = -31950{,}92338$,

$A = 0{,}00002020444131$.

На рис. 5 приведены эти нормированные решения. Главная особенность решения, показанного слева, заключается в том, что при $\varepsilon \to \varepsilon_2 - 0$, $y \to y_{\max} - 0$ параметр $c_1 \to \infty$. Как следствие, точка пересечения решения оси $r_1 = \dfrac{1}{c_1}$ стремится к нулю, а в безузловом решении, приведенном справа, при $\varepsilon \to \varepsilon_2 - 0$, $y \to y_{\max} + 0$ параметр $c_1 \to -\infty$. Поведение функции $\Psi(r)$ при $r \to 0$ показано на рис. 5 внизу.

2. При $\varepsilon \to \varepsilon_1 + 0$ ($y \to y_{\min} - 0$ и $y \to y_{\min} + 0$), например, при $\varepsilon = 1{,}040184269$

$\kappa = 2{,}957514135$, $\alpha^2 = 4,024721473$, $c_1 = -15364{,}28725$,

$A = 0{,}001130400197$;

$\kappa = 2{,}957549364$, $\alpha^2 = 4{,}024756701$, $c_1 = 15364{,}05119$,

$A = 0{,}001130668856$.

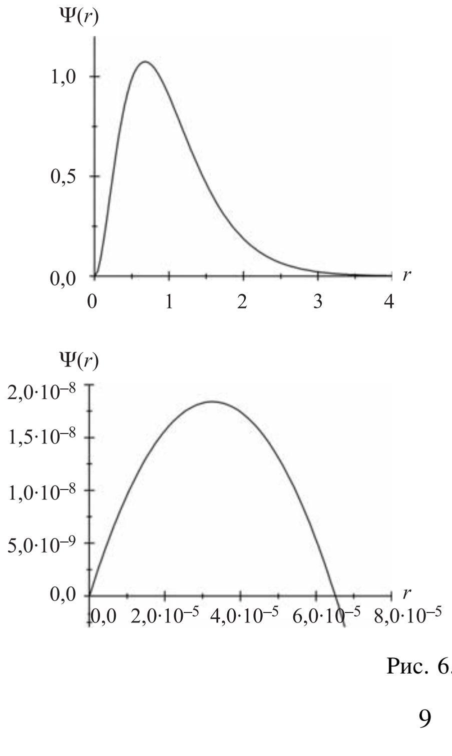

Рис. 6.

На рис. 6 приведены эти нормированные решения. Особенность решения, приведенного справа, заключается в том, что при $\varepsilon \to \varepsilon_1 + 0$ и $y \to y_{\min} + 0$ $r_1 = \dfrac{1}{c_1}$ стремится к нулю (рис. 6 внизу).

Теперь приведем решения при $\varepsilon \to \infty$ и $y \to \infty$. Например, при $\varepsilon = 10$ $\kappa = 0{,}4537980941$, $\alpha^2 = 0{,}0951207082$, $c_1 = 0{,}05971231826$, $A = 0{,}7541847999$; $r_{1\,\max} = 1{,}918516605$, $\psi_{1\,\max} = 0{,}5364111838$; при $\varepsilon = 100$ $\kappa = 0{,}06355898824$, $\alpha^2 = 0{,}008753122606$, $c_1 = 0{,}01024603673$, $A = 0{,}04156960011$; $r_{2\,\max} = 13{,}25980129$, $\psi_{2\,\max} = 0{,}2050606146$.

Нормированные решения приведены ниже на рис. 7. При $\varepsilon \to 0$ из рисунка видно, что c_1 также стремится к нулю и, как следствие, точка пересечения решения оси $r_1 = \dfrac{1}{c_1}$ стремится к бесконечности.

Пусть $m = 5$. Главное отличие при анализе свойства решений от $m = 3$ заключается в появлении погранслойных решений при $\varepsilon \to 0$ $y \to y_1 - 0$ (безузловое), $y \to y_2 + 0$ (одноузловое).

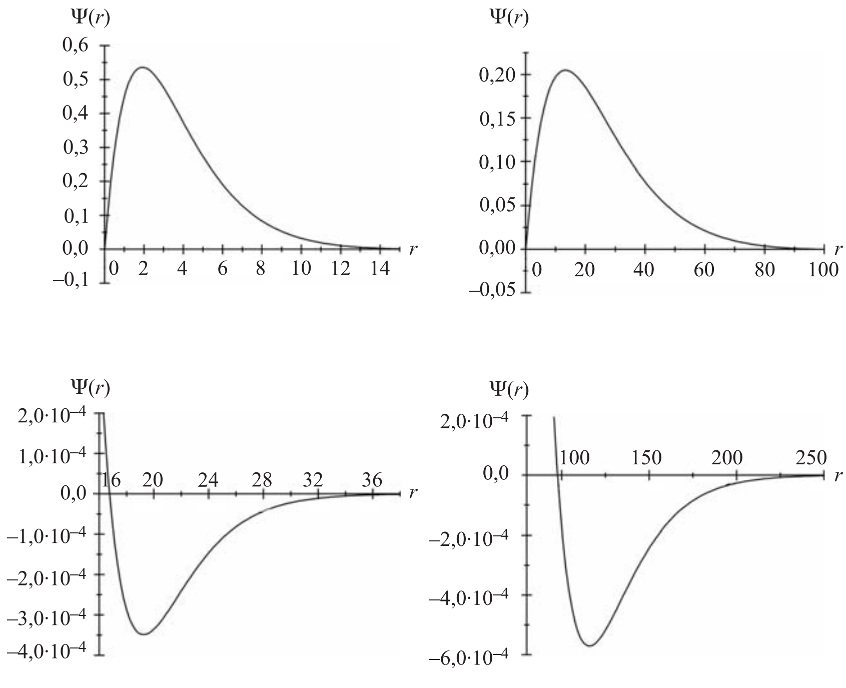

Рис. 7.

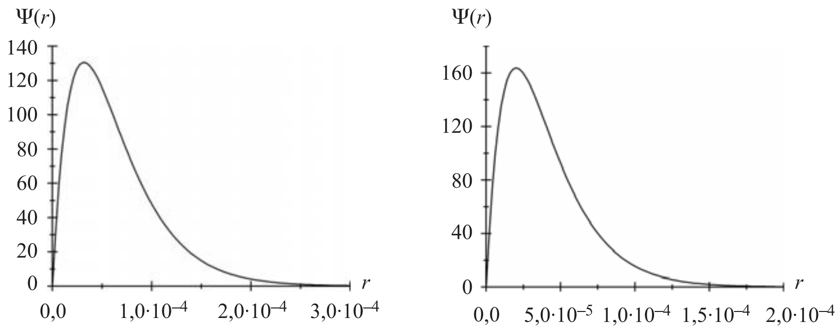

Рис. 8.

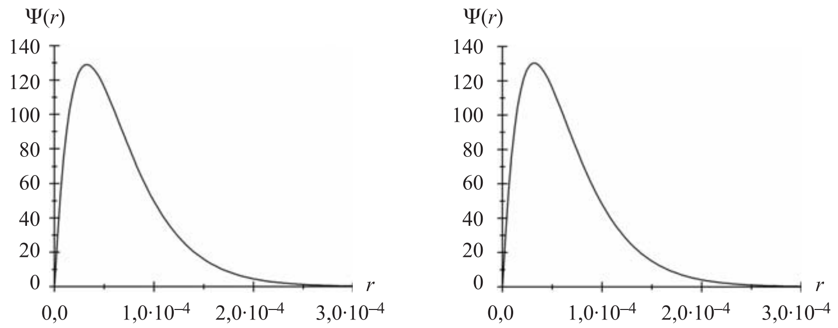

Рис. 9.

Например, при $\varepsilon = 10^{-4}$

$$
\begin{aligned}
\kappa_2 &= 31486,38813, & \kappa_3 &= 49631,74251,\\
\alpha_2^2 &= 4,003707352 \cdot 10^8, & \alpha_3^2 &= 2,32223371 \cdot 10^8,\\
c_1 &= -0,5125775800, & c_1 &= 0,2138339808,\\
A_2 &= 1,117387111 \cdot 10^7. & A_3 &= 2,211424348 \cdot 10^7.
\end{aligned}
$$

На рис. 8 приведены эти нормированные решения. Справа приведено решение с одним узлом. Точка пересечения решения оси $r_1 = \dfrac{1}{c_1} \approx 5$. Так как это решение быстро затухающее $(e^{-\kappa_3 r_1})$, на рисунке не видно этот узел.

При $\varepsilon_2 < \varepsilon < \infty$ и $y_2 < y \to \infty$ решение ведет себя так же, как и для $m = 3$.

Переходим к анализу свойств решений при $m = 4$ и 6.

При $0 < \varepsilon < \varepsilon_2$ в интервале $0 < y < y_{\max}$ существует одноузловое решение, а в интервале $y_{\max} < y < y_1$ — безузловое. Главная особенность в этом случае состоит в том, что при $\varepsilon \to 0$ и $y \to y_1 - 0$ задача имеет погранслойные решения. Например, при $\varepsilon = 10^{-4}$

$m = 4$	$m = 6$
$\kappa_2 = 30785,99878,$	$\kappa_2 = 31410,98396,$
$\alpha_2^2 = 3,956757913 \cdot 10^8,$	$\alpha_2^2 = 3,999799254 \cdot 10^8,$
$c_1 = -0,4242660305,$	$c_1 = -0,4990888826,$
$A_2 = 1,080316203 \cdot 10^7.$	$A_2 = 1,113376259 \cdot 10^7.$

На рис. 9 приведены эти нормированные решения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложен алгоритм изучения свойств решений краевых задач для уравнений высокого порядка, содержащих произвольный параметр ε при старших производных. Алгоритм реализован с использованием системы символьных вычислений MAPLE. Установлено, что при $\varepsilon \to 0$ некоторые решения совпадают с решением нерелятивистского уравнения Шрёдингера. Кроме этого, обнаружены так называемые погранслойные решения: переход одного типа решения (например, решение с одним узлом) в другой (решение без узлов). Эти решения требуют глубокого анализа и дальнейшего физического осмысления (физической интерпретации), так как релятивистские поправки собственных значений $\Delta = |\lambda_{n,2m} - \lambda_{n,2}|$ становятся большими.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ № 07-01-00738-а, 08-01-00800-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Быков А. А., Дремин И. М., Леонидов А. В.* // УФН. 1984. Т. 143. С. 3.
2. *Logunov A. A., Tavkhelidze A. N.* // Nuovo Cimento. 1963. V. 29. P. 380.
3. *Kadyshevsky V. G., Mir-Kasimov R. M., Skachkov N. B.* // Nuovo Cimento. A. 1968. V. 55. P. 233.
4. *Кадышевский В. Г., Мир-Касимов Р. М., Скачков Н. Б.* // ЭЧАЯ. 1972. Т. 2, № 3. С. 637.
5. *Gross F.* // Phys. Rev. B. 1968. V. 6. P. 125.
6. *Thompson R. H.* // Phys. Rev. D. 1970. V. 1. P. 110.
7. *Амирханов И. В., Жидков Е. П., Коннова С. В.* Препринт ОИЯИ Р5-99-15. Дубна, 1999;
   Amirkhanov I. V., Zhidkov E. P., Konnova S. V. // Computer Physics Communications. 2000. V. 126. P. 12–15.
8. *Амирханов И. В., Жидков Е. П., Коннова С. В.* Сообщение ОИЯИ Р11-2000-154. Дубна, 2000.

9. *Амирханов И. В., Васильев С. А., Жидков Е. П., Жидкова И. Е.* // Дифференциальные уравнения. 2000. Т. 37, № 1. С. 83–90.
10. *Амирханов И. В., Васильев С. А., Жидков Е. П., Жидкова И. Е.* // Математическое моделирование. 2003. Т. 15, № 9. С. 3–16.
11. *Амирханов И. В. и др.* Сообщение ОИЯИ Р11-2004-147. Дубна, 2004. 22 с.
12. *Амирханов И. В., Жидков Е. П., Музафаров Д. З., Саркар Н. Р., Сархадов И., Шарипов З. А.* // Математическое моделирование. 2007. Т. 19, № 11. С. 65–79.
13. *Амирханов И. В, Музафаров Д. З, Саркар Н. Р., Сархадов И., Шарипов З. А.* Сообщение ОИЯИ Р11-2007-148. Дубна, 2007. 16 с.
14. *Амирханов И. В., Музафаров Д. З., Саркар Н. Р., Сархадов И., Шарипов З. А.* Препринт ОИЯИ Р11-2008-103. Дубна, 2008. 18 с.
15. *Жидков Е. П., Кадышевский В. Г., Катышев Ю. В.* // ТМФ. 1970. Т. 3, № 2 С. 191.
16. *Тихонов А. Н.* // Математический сборник. 1948. Т. 22(64), № 2. С. 193–204.
17. *Тихонов А. Н.* // Математический сборник. 1950. Т. 27(69), № 1. С. 147–156.
18. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* // УМН. 1957. Т. 12, вып. 5(77). С. 3–122.
19. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высш. шк., 1990. 208 с.

Получено 12 октября 2009 г.

Редактор *А. И. Петровская*

Подписано в печать 25.12.2009.
Формат $60 \times 90/16$. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 1,0. Уч.-изд. л. 1,15. Тираж 310 экз. Заказ № 56846.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.
E-mail: publish@jinr.ru
www.jinr.ru/publish/