P11-2009-176

И. В. Амирханов, Д. З. Музафаров, Н. Р. Саркар,
И. Сархадов, З. А. Шарипов

ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Доложено на международной конференции «Математическое моделирование и вычислительная физика», Дубна, 7–11 июля 2009 г.

Амирханов И. В. и др. Р11-2009-176
Задача рассеяния для дифференциального уравнения
четвертого порядка с малым параметром при старшей производной

Предложен алгоритм решения задачи рассеяния для дифференциального уравнения четвертого порядка с малым параметром ε при старшей производной в сферической прямоугольной потенциальной яме. Проведен сравнительный анализ решений дифференциального уравнения четвертого порядка с решениями уравнения Шредингера при $\varepsilon \to 0$. Алгоритм реализован с использованием системы символьных вычислений MAPLE.

Работа выполнена в Лаборатории информационных технологий ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2009

Amirkhanov I. V. et al. P11-2009-176
Scattering Problem for the Differential Equation
of Fourth Order with Small Parameter at the Higher Derivative

The algorithm of the solution of scattering problem on a spherical rectangular potential well for the differential equation of fourth order with small parameter ε at the higher derivative is offered. At $\varepsilon \to 0$ the comparative analysis of the solutions of the differential equation of fourth order with the Schrödinger equation solutions is carried out. The algorithm is realized with the use of the system of symbolical evaluations MAPLE.

The investigation has been performed at the Laboratory of Information Technologies, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2009

ВВЕДЕНИЕ

В данной работе, так же как и в предыдущих работах [3–11], мы рассматриваем квазипотенциальное уравнение $[1, 2]$. В частном случае для S-волны оно имеет вид

$$[E_\varepsilon - H_\varepsilon - V(r)]\ \psi(r) = 0, \tag{1}$$

где

$$E_\varepsilon = \frac{2}{\varepsilon^2}\left[\sqrt{1+\varepsilon^2 q^2} - 1\right] = \frac{2q^2}{\sqrt{1+\varepsilon^2 q^2}+1}, \quad H_\varepsilon = \frac{2}{\varepsilon^2}\left[\operatorname{ch}\left(i\varepsilon\frac{d}{dr}\right) - 1\right],$$

$V(r)$ — потенциал взаимодействия, ε — малый параметр. При $\varepsilon \to 0$, $E_\varepsilon \to q^2$, $H_\varepsilon \to d^2/dr^2$, уравнение (1) переходит в нерелятивистское уравнение Шредингера

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - V(r) + q^2\right]\ \psi(r) = 0. \tag{2}$$

В уравнении (1), разлагая оператор $\operatorname{ch}\left(i\varepsilon\dfrac{d}{dr}\right)$ в ряд, можно получить следующее дифференциальное уравнение бесконечного порядка [12]:

$$\left[E_\varepsilon + \left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2\varepsilon^2}{4!}\frac{d^4}{dr^4} + \frac{2\varepsilon^4}{6!}\frac{d^6}{dr^6} - \cdots\right) - V(r)\right]\ \psi(r) = 0. \tag{3}$$

Если в уравнении (3) отбросить члены высших порядков, то в результате мы получим обыкновенное дифференциальное уравнение конечного порядка

$$\begin{gathered}\left[E_\varepsilon + \left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2\varepsilon^2}{4!}\frac{d^4}{dr^4} + \frac{2\varepsilon^4}{6!}\frac{d^6}{dr^6} - \right.\right. \\ \left.\left. - \cdots + \frac{2(-1)^{m-1}\varepsilon^{2(m-1)}}{(2m)!}\frac{d^{2m}}{dr^{2m}}\right) - V(r)\right]\ \psi(r) = 0, \end{gathered} \tag{4}$$

где $2m$ — порядок уравнений $(m = 1, 2 \ldots M)$.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В работе проводится исследование задачи рассеяния на сферической прямоугольной потенциальной яме:

$$V(r) = \begin{cases} -V_0, & \text{если } r < r_m, \\ 0, & \text{если } r > r_m, \end{cases}$$

для уравнения четвертого порядка $(m = 2)$

$$\left[-\frac{2\varepsilon^2}{4!}\frac{d^4}{dr^4} + \frac{d^2}{dr^2} - V(r) + E\right]\psi(r) = 0 \tag{5}$$

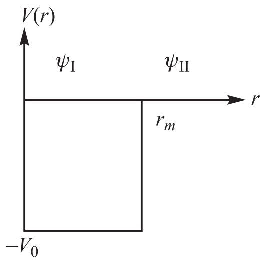
с граничными условиями

$$\begin{aligned} &\psi(0) = 0, \\ &\psi''(0) = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

при $r = 0$ и

$$\psi(r) = \sin(\gamma_1 r) + T\cos(\gamma_1 r) + b\,\mathrm{e}^{-\gamma_2 r} \tag{7}$$

при $r > r_m$, где $T = \mathrm{tg}\,(\delta)$, δ — фаза рассеяния (γ_1, γ_2 определяются ниже). Задача заключается в вычислении фазы рассеяния δ.



Так как уравнение (5) имеет постоянные коэффициенты в областях $0 < r < r_m$ и $r_m < r < \infty$, общее решение в каждой области принимает вид:

$$\psi_{\mathrm{I}}(r) = c_1\,\sin(\alpha_1 r) + c_2\,\cos(\alpha_1 r) + c_3\,\mathrm{sh}\,(\alpha_2 r) + c_4\,\mathrm{ch}\,(\alpha_2 r)$$

в области $0 < r < r_m$, где

$$\alpha_1^2 = \frac{3!}{\varepsilon_2}\left(\sqrt{1 + \frac{2\varepsilon^2}{3!}\kappa_1^2} - 1\right); \quad \alpha_2^2 = \frac{3!}{\varepsilon_2}\left(\sqrt{1 + \frac{2\varepsilon^2}{3!}\kappa_1^2} + 1\right), \quad \kappa_1^2 = E + V_0;$$

$$\psi_{\mathrm{II}}(r) = d_1\,\sin(\gamma_1 r) + d_2\,\cos(\gamma_1 r) + d_3\,\mathrm{e}^{-\gamma_2 r} + d_4\,\mathrm{e}^{\gamma_2 r}$$

в области $r_m < r < \infty$, где

$$\gamma_1^2 = \frac{3!}{\varepsilon_2}\left(\sqrt{1+\frac{2\varepsilon^2}{3!}\kappa_2^2}-1\right); \quad \gamma_2^2 = \frac{3!}{\varepsilon_2}\left(\sqrt{1+\frac{2\varepsilon^2}{3!}\kappa_2^2}+1\right), \quad \kappa_2^2 = E.$$

Учитывая граничные условия (6), (7), имеем

$$\psi_{\mathrm{I}}(r) = c_1 \sin(\alpha_1 r) + c_3 \,\mathrm{sh}\,(\alpha_2 r) \text{ в области } 0 < r < r_m, \tag{8}$$

$$\psi_{\mathrm{II}}(r) = \sin(\gamma_1 r) + T \cos(\gamma_1 r) + b\,\mathrm{e}^{-\gamma_2 r}) \text{ в области } r_m < r < \infty. \tag{9}$$

Неизвестные параметры c_1, c_3, T, b находим из условий сшивания при $r = r_m$:

$$\begin{aligned} &\psi_{\mathrm{I}}(r_m) = \psi_{\mathrm{II}}(r_m), \\ &\psi'_{\mathrm{I}}(r_m) = \psi'_{\mathrm{II}}(r_m), \\ &\psi''_{\mathrm{I}}(r_m) = \psi''_{\mathrm{II}}(r_m), \\ &\psi'''_{\mathrm{I}}(r_m) = \psi'''_{\mathrm{II}}(r_m). \end{aligned} \tag{10}$$

Учитывая условия (10) для решений (8), (9), получаем систему уравнений для нахождения c_1, c_3, T, b:

$$WX = B, \tag{11}$$

где

$$W = \begin{pmatrix} -\phi_3 & \phi_1 & \phi_2 & -\phi_4 \\ -\phi'_3 & \phi'_1 & \phi'_2 & -\phi'_4 \\ -\phi''_3 & \phi''_1 & \phi''_2 & -\phi''_4 \\ -\phi'''_3 & \phi'''_1 & \phi'''_2 & -\phi'''_4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} T \\ c_1 \\ c_3 \\ b \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \phi'_0 \\ \phi''_0 \\ \phi'''_0 \end{pmatrix},$$

$$\phi_1 = \sin(\alpha_1 r_m); \quad \phi_2 = \mathrm{sh}\,(\alpha_2 r_m); \quad \phi_0 = \sin(\gamma_1 r_m);$$

$$\phi_3 = \cos(\gamma_1 r_m); \quad \phi_4 = \mathrm{e}^{-\gamma_1 r_m}.$$

2. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Физические параметры задачи выбираются в виде

$$V_0 = 2, \quad r_m = \pi, \quad 0 < E < 20, \quad \Delta E = 2.$$

Решая систему уравнений (11) для различных значений $E = 2, 4, 6 \ldots 20$ и для различных значений ε, нашли фазу рассеяния δ. Такая же задача решена для уравнения Шредингера.

В таблице представлены результаты расчетов обеих задач.

E	δ_1 при $\varepsilon = 1$	δ_2 при $\varepsilon = 0{,}1$	δ_3 при $\varepsilon = 0{,}01$	$\delta_{\text{Шр}}$	$\delta_1 - \delta_{\text{Шр}}$	$\delta_2 - \delta_{\text{Шр}}$	$\delta_3 - \delta_{\text{Шр}}$
2	–1,56128	–1,30497	–1,30135	–1,30129	–2,5999E-1	–3,67684E-3	–6,0E-5
4	0,95108	1,36483	1,37714	1,37725	–4,2617E-1	–1,24224E-2	–1,1E-4
6	0,73007	1,24306	1,25150	1,25156	–5,2149E-1	–8,50258E-3	–6,0E-5
8	0,65730	0,99413	1,00262	1,00272	–3,4542E-1	–8,58871E-3	–1,0E-4
10	0,58564	0,92015	0,93736	0,93754	–3,5190E-1	–1,73916E-2	–1,8E-4
12	0,50458	0,89595	0,91034	0,91049	–4,0591E-1	–1,45374E-2	–1,5E-4
14	0,43270	0,80814	0,81150	0,81166	–3,7896E-1	–3,52083E-3	–1,6E-4
16	0,37942	0,71874	0,73277	0,73292	–3,5350E-1	–1,41842E-2	–1,5E-4
18	0,34470	0,69421	0,71604	0,71627	–3,7157E-1	–2,20552E-2	–2,3E-4
20	0,32350	0,68774	0,70788	0,70811	–3,8461E-1	–2,03742E-2	–2,3E-4

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлен алгоритм решения задачи рассеяния в сферической прямоугольной потенциальной яме для дифференциального уравнения четвертого порядка с малым параметром ε при старшей производной. Проведен сравнительный анализ решений для уравнения четвертого порядка с решениями для уравнения Шредингера.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kadyshevsky V. G., Mir-Kasimov R. M., Skachkov N. B.* // Nuovo Cimento A. 1968. V. 55. P. 233.
2. *Кадышевский В. Г., Мир-Касимов Р. М., Скачков Н. Б.* // ЭЧАЯ. 1972. Т. 2, № 3. С. 637.
3. *Amirkhanov I. V., Zhidkov E. P., Konnova S. V.* // Computer Physics Communications. 2000. V. 126. P. 12–15.
4. *Амирханов И. В., Жидков Е. П., Коннова С. В.* Сообщение ОИЯИ Р11-2000-154. Дубна, 2000.
5. *Амирханов И. В. и др.* // Дифференциальные уравнения. 2000. Т. 37, №. 1. С. 83–90.
6. *Амирханов И. В. и др.* // Математическое моделирование. 2003. Т. 15, №. 9. С. 3–16.
7. *Амирханов И. В. и др.* Сообщение ОИЯИ Р11-2004-147. Дубна, 2004. 22 с.
8. *Амирханов И. В. и др.* // Математическое моделирование. 2007. Т. 19, № 11. С. 65–79.

9. *Амирханов И. В и др.* Сообщение ОИЯИ Р11-2007-148. Дубна, 2007. 16 с.
10. *Амирханов И. В. и др.* Препринт ОИЯИ Р11-2008-103. Дубна, 2008. 18 с.
11. *Амирханов И. В. и др.* Препринт ОИЯИ Р11-2009-150. Дубна, 2009. 16 с.
12. *Жидков Е. П., Кадышевский В. Г., Катышев Ю. В.* // ТМФ. 1970. Т. 3, № 2. С. 191.

Получено 18 ноября 2009 г.

Редактор *А. И. Петровская*

Подписано в печать 08.02.2010.
Формат $60 \times 90/16$. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 0,5. Уч.-изд. л. 0,55. Тираж 310 экз. Заказ № 56884.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.
E-mail: publish@jinr.ru
www.jinr.ru/publish/