

P2-2010-104

Э. А. Кураев

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Кураев Э. А.
Некоторые вопросы математической физики

P2-2010-104

Целью настоящего собрания задач математической физики и теории чисел является желание автора привлечь внимание исследователей к ряду задач механики, теории чисел, физики, которые могли бы быть темами дальнейшего рассмотрения. Например, темами дипломных работ студентов. Предлагаемые темы предполагают знание курса общей физики, математического анализа и теории функций комплексной переменной.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2010

Kuraev E. A.
Some Problems of Mathematical Physics

P2-2010-104

Several problems arising in investigation of mechanical systems, electromagnetic fields, electric chains, electron radiation are collected. A set of useful definite integrals, in addition to the known textbooks, is presented as well. Most of the considered items can be subject to further investigation by students. The reader is supposed to be acquainted with the university course of mathematics and physics.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2010

1. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ВЫСШИМИ ИНВАРИАНТАМИ ФУНКЦИИ ВЕЙЕРШТРАССА

Совместный анализ дифференциального уравнения для функции Вейерштрасса и ее представления в виде двойного ряда позволяет получить набор соотношений (в принципе бесконечный) между высшими инвариантами функции Вейерштрасса. В качестве проверки рассмотрен случай, когда один из периодов обращается в нуль. При этом возникают некоторые нелинейные соотношения между числами Бернулли.

Функция Вейерштрасса как функция комплексной переменной u , определенная в виде двойного ряда:

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \sum'_{m,n} \left[\frac{1}{(u - 2m\omega_1 - 2n\omega_2)^2} - \frac{1}{(2m\omega_1 + 2n\omega_2)^2} \right] \quad (1)$$

(здесь штрих в знаке двойной суммы по целым числам m, n означает исключение слагаемого, отвечающего случаю, когда оба эти числа обращаются в нуль, $n = m = 0$), является двоякопериодической функцией:

$$\wp(u + 2m\omega_1 + 2n\omega_2) = \wp(u), \quad \operatorname{Im} \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right) \neq 0, \quad (2)$$

удовлетворяющей дифференциальному уравнению [1]

$$\left[\frac{d}{du} \wp(u) \right]^2 = 4\wp(u)^3 - g_2\wp(u) - g_3(u), \quad (3)$$

где инварианты низшего порядка имеют вид

$$g_2 = 60 \sum'_{m,n} \frac{1}{(2m\omega_1 + 2n\omega_2)^4}, \quad (4)$$

$$g_3 = 140 \sum'_{m,n} \frac{1}{(2m\omega_1 + 2n\omega_2)^6}. \quad (5)$$

Ниже мы, не теряя общности, положим $2\omega_1 = 1$, $2\omega_2 = \tau$, $\text{Im } \tau \neq 0$ и введем обозначение для инвариантов:

$$C_{2k}(\tau) = \sum'_{m,n} \frac{1}{(m + n\tau)^{2k}}. \quad (6)$$

Представляя функцию Вейерштрасса в виде ряда Лорана по степеням u и используя тот факт, что все слагаемые нечетных степеней исчезают при суммировании по положительным и отрицательным целым числам, получим

$$\begin{aligned} \varrho(u) &= \frac{1}{u^2} + \sum_{k=1}^{\infty} (2k+1)u^{2k}C_{2k+2}(\tau) = \\ &= \frac{1}{u^2} + 3u^2C_4 + 5u^4C_6 + 7u^6C_8 + \dots, \quad (7) \end{aligned}$$

$$\varrho'(u) = -\frac{2}{u^3} + 6uC_4 + 20u^3C_6 + 42u^5C_8 + \dots$$

Подставляя это разложение в дифференциальное уравнение для функции Вейерштрасса и приравнявая нулю коэффициенты при четных степенях комплексной переменной u , получим соотношения для $C_{2k}(\tau) = C_{2k}$. Для низших значений индексов $2k$ имеем для функции $F(u) = (\varrho')^2 - 4\varrho^3 + 60\varrho C_4 + 140C_6$:

$$\begin{aligned} F(u) &= \frac{1}{u^6}[4 - 4 = 0] + \frac{C_4}{u^2}[-24 + 60 - 36 = 0] + \\ &+ C_6[-80 - 60 + 140 = 0] + u^2[252C_8 - 108C_4^2] + \dots = 0; \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_8 &= \frac{3}{7}C_4^2, & C_{10} &= \frac{5}{11}C_4C_6, \\ C_{12} &= \frac{1}{143}[18C_4^3 + 25C_6^2], & C_{14} &= \frac{30}{143}C_4^2C_6, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{16} &= \frac{9}{221} \left[C_4^4 + \frac{100}{33} C_4 C_6^2 \right], \\
C_{18} &= \frac{1}{4199} \left[125 C_6^3 + \frac{3915}{11} C_4^3 C_6 \right], \\
C_{20} &= \frac{1}{4199} \left[54 C_4^5 + \frac{36375}{121} C_4^2 C_6^2 \right], \\
C_{22} &= \frac{1}{1062347} [35010 C_4^4 C_6 + 30750 C_4^1 C_6^3], \\
C_{24} &= \frac{1}{151915621} [5400000 C_4^3 C_6^2 + 620730 C_4^6 + 771375 C_6^4], \dots
\end{aligned} \tag{9}$$

Начиная с $2k = 24$ инварианты содержат три и более слагаемых. При этом мы решаем простую задачу теории чисел:

$$2k = 4n + 6m. \tag{10}$$

В результате получим

$$\begin{aligned}
C_{12k} &= \sum_{m=0}^{m=k} D_m C_4^{3m} C_6^{2(k-m)}, \\
C_{12k+2} &= \sum_{m=1}^{m=k} E_m C_4^{3m-1} C_6^{2(k-m)+1}, \\
C_{12k+4} &= \sum_{m=0}^{m=k} F_m C_4^{3m+1} C_6^{2(k-m)}, \\
C_{12k+6} &= \sum_{m=0}^{m=k} G_m C_4^{3m} C_6^{2(k-m)+1}, \\
C_{12k+8} &= \sum_{m=0}^{m=k} H_m C_4^{3m+2} C_6^{2(k-m)}, \\
C_{12k+10} &= \sum_{m=0}^{m=k} L_m C_4^{3m+1} C_6^{2(k-m)+1}, \quad k > 1,
\end{aligned} \tag{11}$$

где рациональные числа $D_m, E_m, F_m, G_m, H_m, L_m$ имеют довольно громоздкий вид.

С помощью программы аналитических вычислений «Mathematica» они могут быть построены для любого конечного значения индекса.

Используя другой вид дифференциального уравнения для функции Вейерштрасса

$$\varrho(u)''' = 12\varrho(u)\varrho'(u), \quad (12)$$

можно получить рекуррентное соотношение для инвариантов [2]:

$$\frac{1}{3}(m-3)(4m^2-1)C_{2m} = \sum_{i=2}^{m-2} (2i-1)(2m-2i-1)C_{2i}C_{2m-2i}, \quad m \geq 4. \quad (13)$$

Вычисления по обоим алгоритмам приводят к одинаковым результатам.

В качестве контроля рассмотрим случай, когда один из периодов обращается в нуль: $\tau = 0$. В этом случае инварианты выражаются через функции Римана $C_{2k}(\tau = 0) = 2\xi_{2k}$, которые, в свою очередь, могут быть записаны в терминах чисел Бернулли:

$$\xi(2m) = \frac{2^{2m-1}\pi^{2m}|B_{2m}|}{(2m)!}. \quad (14)$$

Пользуясь программой «Mathematica» и известными значениями чисел Бернулли, можно убедиться в справедливости приведенных выше соотношений для инвариантов функции Вейерштрасса.

Итак, мы убедились, что все инварианты функции Вейерштрасса выражаются через два инварианта низших индексов и, следовательно, образуют кольцо.

Можно построить четырех- и восьмипериодические функции, отправляясь от кватернионов и октав — обобщений комплексных чисел. Вопрос же о существовании соответствующих колец открыт.

Так, для обобщения на случай кватернионов надо рассмотреть кратные суммы:

$$F(z) = \sum' \left(\frac{1}{z - Q_{mnp}} \right)^4, \quad Q_{mnp} = m + n\sigma_1\lambda_1 + p\sigma_2\lambda_2 + r\sigma_3\lambda_3, \quad (15)$$

σ_i — матрицы Паули; λ_i — произвольные вещественные параметры. Четырех-периодическая функция $F(z)$ (должным образом регуляризованная) обладает пятнадцатью независимыми свойствами симметрии. Соответствующее обобщение уравнения для нее имеет вид

$$F'(z)^2 = P_{15}(F(z)), \quad (16)$$

где $P_{15}(z)$ — полином пятнадцатой степени.

Заметим, что возможно построение периодической структуры в трехмерном пространстве, однако аналитическое ее описание невозможно, поскольку обобщения комплексных чисел на трехмерный случай не существует.

2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СПОСОБ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ ПЕРВОГО РОДА

Анализируется аналитический способ вычисления интегралов эллиптического типа первого рода.

Рассматривая эллиптические интегралы первого рода

$$G(a, b) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{[a^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi]^{1/2}}, \quad a > b > 0, \quad (17)$$

применяем следующее преобразование (преобразование Ландена) [3]:

$$\begin{aligned} \sin \phi &= \frac{2a \sin \theta}{a + b + (a - b) \sin^2 \theta}, \\ d\phi &= 2a \frac{a + b - (a - b) \sin^2 \theta}{a + b + (a - b) \sin^2 \theta} \frac{d\theta}{\sqrt{(a + b)^2 - (a - b)^2 \sin^2 \theta}}, \end{aligned} \quad (18)$$

при этом

$$\sqrt{a^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi} = a \frac{a + b - (a - b) \sin^2 \theta}{a + b + (a - b) \sin^2 \theta}, \quad (19)$$

получим формулу Гаусса:

$$G(a, b) = G(a_1, b_1) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{[a_1^2 \cos^2 \theta + b_1^2 \sin^2 \theta]^{1/2}}, \quad (20)$$

где $a_1 = (a + b)/2$; $b_1 = \sqrt{ab}$ — среднее арифметическое и среднее геометрическое величин a, b . Используя известное неравенство

$$b < b_1 = \sqrt{ab} < a_1 = \frac{a + b}{2} < a, \quad (21)$$

видим, что величины a_1 и b_1 сближаются. Применив эту процедуру несколько раз, мы получим, что

$$b < b_1 < b_2 < \dots < b_n < a_n < a_{n-1} < \dots < a_1 < a. \quad (22)$$

При достаточно большом n числа a_n и b_n становятся близки друг другу: $a_n \approx b_n \approx a^*$ (величина называется средним арифметико-геометрическим). В этом случае интеграл (17) вычисляется уже тривиально:

$$G(a^*, a^*) = \frac{\pi}{2a^*}. \quad (23)$$

Практическое нахождение a^* с любой заданной точностью достигается за конечное количество шагов. Например, если $a = 5$ и $b = 1$, первые несколько итераций дают

$$\begin{aligned} a &= 5 & b &= 1 \\ a_1 &= 3, & b_1 &= 2,2360, \\ a_2 &= 2,6180, & b_2 &= 2,5900, \\ a_3 &= 2,6040, & b_3 &= 2,6039. \end{aligned} \quad (24)$$

Таким образом, с точностью до 10^{-4} интеграл

$$G(5, 1) \approx G(2,6040, 2,6040) \approx \frac{\pi}{2 \cdot 2,6040} = 0,6032. \quad (25)$$

Можно рассматривать начальные значения a и b как результат применения процедуры Гаусса к некоторым величинам a_{-1} и b_{-1} , удовлетворяющим уравнениям

$$\frac{a_{-1} + b_{-1}}{2} = a, \quad \sqrt{a_{-1}b_{-1}} = b.$$

Замечаем при этом, что $a_{-1} > a$ и $b_{-1} < b$. Повторяя эту процедуру несколько раз, увидим, что b_{-n} будет стремиться к нулю, a_{-n} будет стремиться к бесконечности. При этом интеграл (17) тоже может быть вычислен:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{(a_{-n}^2 \sin^2 \phi + b_{-n}^2 \cos^2 \phi)^{1/2}} \Big|_{b \ll a} \approx \\ & \approx \int_0^\sigma \frac{d\phi}{(a_{-n}^2 \phi^2 + b_{-n}^2)^{1/2}} + \int_\sigma^{\pi/2} \frac{d\phi}{a_{-n} \sin \phi} = \\ & = \frac{1}{a_{-n}} \ln \left(\frac{a_{-n}\sigma}{b_{-n}} + \sqrt{\left(\frac{a_{-n}\sigma}{b_{-n}}\right)^2 + 1} \right) + \frac{1}{2a_{-n}} \int_0^\sigma dc \left(\frac{1}{1-c} + \frac{1}{1+c} \right) = \\ & = \frac{1}{a_{-n}} \ln \left(\frac{4a_{-n}}{b_{-n}} \right), \quad (26) \end{aligned}$$

где $\sigma \ll 1$ — вспомогательный малый параметр, который сокращается в конечном ответе.

Можно показать, что этот итеративный процесс $(a, b) \rightarrow (a_{-1}, b_{-1}) \rightarrow \dots \rightarrow (a_{-n}, b_{-n}) \rightarrow \dots$ довольно быстро приводит к тому, что a_{-n} стремится на бесконечность, а b_{-n} — к нулю, причем квадратично:

$$a_{-n} = 2a_{-(n-1)}, \quad b_{-n} = \frac{b_{-(n-1)}^2}{2a_{-(n-1)}}. \quad (27)$$

Отсюда для первых нескольких итераций имеем

$$\begin{aligned}
 a_{-1} &= 2a, & b_{-1} &= \frac{b^2}{2a}, \\
 a_{-2} &= 2a_{-1} = 4a, & b_{-2} &= \frac{b_{-1}^2}{2a_{-1}} = \frac{b^2}{2^4 a^3}, \\
 a_{-3} &= 2a_{-2} = 2^3 a, & b_{-3} &= \frac{b_{-2}^2}{2a_{-2}} = \frac{b^2}{2^{11} a^7}, \\
 a_{-4} &= 2a_{-3} = 2^4 a, & b_{-4} &= \frac{b_{-3}^2}{2a_{-3}} = \frac{b^2}{2^{26} a^{15}}.
 \end{aligned} \tag{28}$$

Следует, однако, заметить, что при этом значение интеграла (17) при $b \ll a$ стремится к некоторому среднему значению:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_{-n}} \ln \left(\frac{4a_{-n}}{b_{-n}} \right) \rightarrow \frac{1}{2^n a} \ln \left(2^{2^{n+1}} \left(\frac{a}{b} \right)^{2^n} \right) = \frac{1}{a} \ln \left(\frac{4a}{b} \right), \quad b \ll a. \tag{29}$$

3. ЛИНИИ И ПОВЕРХНОСТИ УЗЛОВ ПРИ КОЛЕБАНИЯХ МЕМБРАН И КУБОВ

Решение краевой задачи для описания колебаний квадратной мембраны со сторонами единичной длины и закрепленными краями:

$$u_{xx} + u_{yy} - u_{tt} = 0, \quad 0 \leq x, y \leq 1, \quad t > 0; \tag{30}$$

$$u(x=0, y=0) = u(x=0, y=1) = u(x=1, y=0) = u(x=1, y=1) = 0,$$

где $u(x, y, t)$ — отклонение точки на поверхности мембраны с координатами x, y в момент времени t от положения равновесия $u = 0$, имеет вид

$$\begin{aligned}
 u(x, y, t) &= \sum_{m,n} Z_{mn}(x, y) T_{mn}(t) = \\
 &= \sum_{m,n} a_{mn} \cos(\omega_{mn} t + \phi_{mn}) \sin(\pi n x) \sin(\pi m y), \tag{31}
 \end{aligned}$$

где $\omega_{mn} = \pi \sqrt{n^2 + m^2}$.

Аналогичная задача для куба с единичной длиной грани и неподвижными точками на границе куба:

$$\begin{aligned}
 u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - u_{tt} &= 0, \quad 0 \leq x, y, z \leq 1, \quad t > 0; \\
 u(x=0, y=0, z=0) &= u(x=0, y=1, z=0) = \dots = 0
 \end{aligned} \tag{32}$$

имеет решение

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z, t) &= \sum_{m,n,k} Z_{mnk}(x, y, z) T_{mnk}(t) = \\
 &= \sum_{m,n,k} a_{mnk} \cos(\omega_{mnk}t + \phi_{mnk}) \sin(\pi nx) \sin(\pi my) \sin(\pi kz), \quad (33)
 \end{aligned}$$

где $\omega_{mnk} = \pi\sqrt{n^2 + m^2 + k^2}$ — частота колебания.

$Z_{mn}(x, y) = a \sin(\pi mx) \sin(\pi ny) + b \sin(\pi my) \sin(\pi nx) + c \sin(\pi m_1 x) \times \sin(\pi n_1 x) + d \sin(\pi m_1 y) \sin(\pi n_1 y) = 0$. Для колебаний с одинаковой частотой представляет интерес задача исследования так называемых «зон молчания» или линий узлов, описываемых уравнением $Z_{mn}(x, y) = 0$ [5].

Это уравнение, как это было показано в теории чисел [4], для наименьших значений (n, m) и (n_1, m_1) имеет решение $65 = 1^2 + 8^2 = 7^2 + 4^2$. Некоторые решения для больших значений (n, m) и (n_1, m_1) приведены ниже:

$$\begin{aligned}
 85 &= 2^2 + 9^2 = 6^2 + 7^2, \\
 170 &= 1^2 + 13^2 = 7^2 + 11^2, \\
 365 &= 2^2 + 19^2 = 13^2 + 14^2, \\
 &\dots
 \end{aligned} \quad (34)$$

Существуют также случаи с тремя решениями:

$$\begin{aligned}
 325 &= 1^2 + 18^2 = 6^2 + 17^2 = 10^2 + 15^2, \\
 425 &= 5^2 + 20^2 = 8^2 + 19^2 = 13^2 + 16^2, \\
 925 &= 5^2 + 30^2 = 14^2 + 27^2 = 21^2 + 22^2, \\
 &\dots
 \end{aligned} \quad (35)$$

четырьмя:

$$\begin{aligned}
 1105 &= 4^2 + 33^2 = 9^2 + 32^2 = 12^2 + 31^2 = 23^2 + 24^2, \\
 1625 &= 5^2 + 40^2 = 16^2 + 37^2 = 20^2 + 35^2 = 28^2 + 29^2, \\
 &\dots
 \end{aligned} \quad (36)$$

и большим количеством решений.

Таким образом, решение, отвечающее одной и той же частоте $\omega_{mn} = \pi\sqrt{n^2 + m^2} = \pi\sqrt{n_1^2 + m_1^2}$, будет иметь вид

$$\begin{aligned}
 u(x, y, t) &= \cos(\omega_{mn}t + \phi_{mn}) \times \\
 &\times \sum_i (a_i \sin(\pi n_i x) \sin(\pi m_i y) + b_i \sin(\pi m_i x) \sin(\pi n_i y)). \quad (37)
 \end{aligned}$$

Аналогичное решение для колебаний внутри единичного куба с частотой $\omega_{mnk} = \pi\sqrt{n^2 + m^2 + k^2} = \pi\sqrt{n_1^2 + m_1^2 + k_1^2} = \dots$ имеет вид

$$\begin{aligned}
u(x, y, z, t) = & \cos(\omega_{mnk}t + \phi_{mnk}) \times \\
& \times \sum_i [a_i \sin(\pi n_i x) \sin(\pi m_i y) \sin(\pi k_i z) + \\
& + b_i \sin(\pi n_i x) \sin(\pi k_i y) \sin(\pi m_i z) + \\
& + c_i \sin(\pi m_i x) \sin(\pi n_i y) \sin(\pi k_i z) + \\
& + d_i \sin(\pi m_i x) \sin(\pi k_i y) \sin(\pi n_i z) + \\
& + e_i \sin(\pi k_i x) \sin(\pi m_i y) \sin(\pi n_i z) + \\
& + f_i \sin(\pi k_i x) \sin(\pi n_i y) \sin(\pi m_i z)]. \quad (38)
\end{aligned}$$

Представляет интерес исследование линий узлов, т. е. множеств (x, y) или (x, y, z) , при которых решение уравнения (3) обращается в нуль. Исследование характера линий $Z_{mn}(x, y) = 0$ имеет определенный практический интерес. Они отвечают «зонам молчания». Для случая колебаний в единичном кубе $Z_{mnk}(x, y, z) = 0$ речь идет уже о поверхностях в трехмерном пространстве.

Рассмотрение этой задачи можно найти также в работе [5, с. 258]. В трехмерном случае вопрос сводится к топологии поверхностей.

4. О ПОЛЯХ, СОЗДАВАЕМЫХ ДВИЖУЩИМСЯ МАГНИТНЫМ ДИПОЛЕМ

Намагниченный шар создает магнитное поле (ось z направим вдоль линии $N-S$ максимальной намагниченности шара) с компонентами в сферической системе координат:

$$B_r = \frac{2b}{r^3} \cos \theta, \quad B_\theta = \frac{b}{r^3} \sin \theta, \quad B_\phi = 0. \quad (39)$$

Здесь предполагается, что расстояние от центра шара достаточно большое по сравнению с диаметром шара R , $r \gg R$. θ есть угол, отсчитываемый от оси z ; ϕ — соответствующий азимутальный угол.

Пусть этот шар вращается с угловой скоростью ω . Электрическое поле, возникающее при этом, $\vec{E} = [\vec{B}, \vec{v}]$, $\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$, как легко убедиться, обладает свойством $\text{div } \vec{E} \neq 0$. Этот факт противоречит утверждениям классической теории электромагнитных полей: дивергенция напряженности электромагнитного поля при отсутствии зарядов должна обращаться в нуль [6].

Аналогичные проблемы возникают при рассмотрении электромагнитных полей, создаваемых при равномерном прямолинейном движении магнитного

диполя. При этом оказывается, что дивергенция напряженности электрического поля обращается в нуль, тогда как ротор вектора напряженности электрического поля отличен от нуля [6].

Все эти наблюдения находятся в противоречии с соответствующими предсказаниями классических уравнений Максвелла.

Действительно, поскольку магнитный диполь электрически нейтрален, то дивергенция электрической напряженности, согласно уравнениям Максвелла, должна обращаться в нуль. То же самое справедливо для случая движущегося прямолинейно магнитного диполя. В этом случае ротор вектора электромагнитного поля отличен от нуля в отсутствие источников тока [7].

Таким образом, необходимо признать, что электромагнитные поля, возникающие при движении магнитного диполя, не подчиняются уравнениям Максвелла. Следует заметить, что такие поля имеют широкое применение в жизни (генераторы электромагнитного тока).

В заключение отметим, что у автора нет сомнений в справедливости уравнений Максвелла, описывающих поля при взаимодействии заряженных частиц в вакууме.

Хотелось бы обратить внимание на существование не подчиняющихся уравнениям Максвелла электромагнитных полей, возникающих при нестандартных начальных условиях.

В перспективе представляет интерес исследовать факт суточной вариации электрического поля Земли. Тесно связана с этими вопросами природа щита Земли от солнечного ветра.

Автор благодарен Валентину Афанасьевичу Богачу за полезные обсуждения вопросов, затронутых в этой главе.

5. ПЕРИОДЫ ОДНОМЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ В ПОЛИНОМИАЛЬНОМ ПОТЕНЦИАЛЕ

Для потенциалов полиномиального вида с n точками поворота выведено соотношение между периодами финитного движения. Развита теория возмущения для потенциалов, приближенно описываемых полиномами.

В известной монографии В.И. Арнольда [8] для потенциала четвертой степени, имеющего вид

$$\begin{aligned} E - U(x) &= a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = \\ &= a_4(x - \alpha_1)(\alpha_2 - x)(x - \alpha_3)(\alpha_4 - x), \quad a_4 > 0, \quad (40) \end{aligned}$$

где все коэффициенты предполагаются вещественными и считаем, что $\alpha_2 < \alpha_3$, показано, что периоды одномерного движения T_1 для движения

$\alpha_1 < x < \alpha_2$ и T_2 для движения $\alpha_3 < x < \alpha_4$, отвечающие одной и той же энергии $E = \frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + U(x)$, которые определяются выражениями

$$T_{12} = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}}, \quad T_{34} = \int_{\alpha_3}^{\alpha_4} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}}, \quad (41)$$

равны друг другу, т.е. $T_{12} = T_{34}$. Для доказательства этого соотношения рассмотрим контурный интеграл [9]

$$\oint_C \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}}, \quad (42)$$

где контур C представляет собой два замкнутых контура в комплексной плоскости по x , охватывающие два разреза подынтегральной функции (от α_1 до α_2 и от α_3 до α_4) и замкнутые на бесконечности. В области, охватываемой контуром C , подынтегральная функция не имеет особенностей, и в силу теоремы Коши интеграл (42) равен нулю:

$$2 \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{dx}{\sqrt{(x - \alpha_1)(\alpha_2 - x)(x - \alpha_3)(x - \alpha_4)}} - 2 \int_{\alpha_3}^{\alpha_4} \frac{dx}{\sqrt{(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)(\alpha_4 - x)}} = 0. \quad (43)$$

При аналитическом продолжении квадратного корня во втором слагаемом надо выбрать знак минус. Отсюда следует утверждение $T_{12} = T_{34}$. Это же утверждение справедливо и для полинома третьей степени:

$$E - U(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = -a_3(x - \alpha_1)(\alpha_2 - x)(x - \alpha_3), \quad a_3 > 0, \quad (44)$$

где имеется и финитное, и инфинитное движение. При этом оказывается, что период финитного движения равен времени ухода частицы на бесконечность

при инфинитном движении:

$$T_{\text{infinite}} = \int_{-\infty}^{\alpha_1} \frac{dx}{\sqrt{(x - \alpha_1)(\alpha_2 - x)(x - \alpha_3)}} = \int_{\alpha_2}^{\alpha_3} \frac{dx}{\sqrt{(x - \alpha_1)(\alpha_2 - x)(\alpha_3 - x)}} = T_{\text{finite}}. \quad (45)$$

Теорема допускает обобщение также на случай полиномиального потенциала более высокой степени ($n > 4$). Так, для движения в потенциале с четным количеством минимумов будем иметь

$$T_{12} + T_{56} + \dots + T_{2n-3, 2n-2} = T_{34} + T_{78} \dots + T_{2n-1, 2n}; \quad (46)$$

в случае нечетной степени потенциала, где имеется одна область с инфинитным движением, имеем

$$T_{-\infty, 1} + T_{45} + \dots + T_{2n-4, 2n-3} = T_{23} + T_{67} \dots + T_{2n-2, 2n-1}. \quad (47)$$

Аналогичные соотношения могут быть получены и для потенциалов с $a_n < 0$.

В классической механике скорость может быть бесконечной, поэтому время ухода частицы на бесконечность или время прихода из бесконечности может быть конечным.

Полученные выше соотношения для случаев $n = 3$ и $n = 4$ выражаются в терминах эллиптических функций и их обобщений для случая $n > 4$.

Рассмотрим случай, когда потенциал может быть лишь приближенно описан полиномиальной формой

$$E - U(x) = P_n(x) + \delta U(x), \quad (48)$$

где $P_n(x)$ — полином n -го порядка, имеющий n действительных корней; $\delta U(x)$ — численно небольшое отклонение с произвольными аналитическими свойствами ($|\delta U| \ll |P_n|$, $x \in D$, где область D — это множество значений x , существенных для данной задачи). Будем также предполагать, что $\delta U(x)$ обращается в нуль на множестве корней полинома $P_n(x)$. Соотношения между периодами при этом сохраняют свой вид, но сами периоды получают небольшие добавки: $T_i \rightarrow T_i + \delta T_i$, где

$$\delta T_i = \frac{1}{2} \int_{\alpha_{2i+1}}^{\alpha_{2i+2}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} P_n(x)^{3/2}}} \delta U(x). \quad (49)$$

Таким образом, может быть развита теория возмущений по отклонениям $\delta U(x)$ в потенциале от полиномиальной формы.

Способ вычисления таких интегралов в терминах гипергеометрических функций в деталях изучался в работе [11].

6. ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИЙ СЛОЖНОГО АРГУМЕНТА

Описана процедура построения с помощью линейки графиков функций сложного аргумента на базе функций простого аргумента. Даны некоторые иллюстрации общего метода. Обсуждается возможность создания соответствующих компьютерных программ.

Введем на плоскости xy систему координат и построим прямую $y = x$. Построим на этой плоскости график функции $f(x)$. Выполним теперь следующее построение. На прямой $y = x$ выберем точку O с координатами $O(x, y = x)$ и проведем через нее прямые, параллельные осям координат, до пересечения с графиком функции $f(x)$ в точках C, A с координатами $C(x_1, x), A(x, f(x))$. Проведя прямые, параллельные осям координат, проходящие через точки C, A , построим точку $B(x_1, f(x))$ при их пересечении. В силу построения имеем соотношение $f(x_1) = x$. Выражая координаты точки B через x_1 , заключаем, что при перемещении несущей точки O вдоль прямой $y = x$ (мы будем ее называть несущей прямой) построенная описанным выше способом точка B описывает график сложной функции $f(f(x))$. Соответствующее построение приведено на рис. 1.

Вместо несущей прямой $y = x$ можно использовать прямую с произвольным наклоном $y = nx$. При этом может быть построен график функции $f((1/n)f(x))$.

Аналогичным способом можно, задав две функции $f(x)$ и $\phi(x)$, построить функции $f(\phi(x)), \phi(f(x))$. Схема построения представлена на рис. 3.

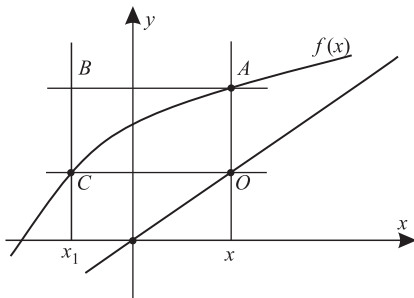


Рис. 1

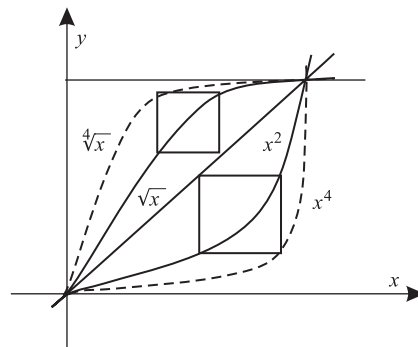


Рис. 2

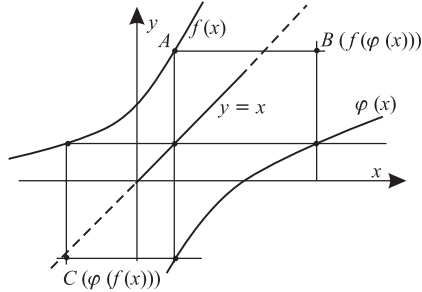


Рис. 3.

На рис. 2 представлены схемы построения функций $y = x^4, y = x^{1/4}$ на основе графиков функций $y = x^2, y = x^{1/2}$.

В качестве несущей кривой можно выбрать одну из функций, скажем, $\phi(x)$. При этом, как следует из рис. 3, можно построить функцию $f(\phi^{-1}(f(x)))$, где $\phi^{-1}(z)$ обозначает функцию, обратную $\phi(z)$: $\phi(\phi^{-1}(z)) = z$.

Мы оставляем вопрос об обобщении представленного выше построения на случай трехмерного пространства открытым для самостоятельного исследования.

Автор благодарен Виктору Ивановичу Краснопольскому за полезное обсуждение затронутых здесь вопросов.

7. О ПРИЛОЖЕНИЯХ ТЕОРЕМЫ РВАЧЕВА

Рассматриваются возможные обобщения логико-математической теоремы Рвачева о построении аналитической функции, определяющей границу объединения множеств.

Рассмотрим простейшее приложение теоремы Рвачева к случаю двух кругов. Для каждого из них построим функцию:

$$R_1(x, y) = -(x - x_1)^2 - (y - y_1)^2 + r_1^2,$$

$$R_2(x, y) = -(x - x_2)^2 - (y - y_2)^2 + r_2^2,$$

где $(x_{1,2}, y_{1,2})$ и $r_{1,2}$ — положения центров этих кругов и их радиусы. Функции $R_{1,2}(x, y)$ положительны, если (x, y) отвечают точкам внутри соответствующего круга, отрицательны для точек вне круга и обращаются в нуль для точек на границе круга.

Рвачевым была предложена функция

$$R(x, y) = R_1(x, y) + R_2(x, y) - \sqrt{R_1^2(x, y) + R_2^2(x, y)}, \quad (50)$$

обладающая тем свойством, что она отрицательна во всех точках плоскости кроме множества, являющегося пересечением множеств точек кругов. На множестве этих точек она принимает положительные значения. На границе этого множества функция Рвачева обращается в нуль.

В качестве этих множеств можно рассматривать любые замкнутые фигуры. При построении функции Рвачева необходимо обеспечить одинаковую размерность R_1 и R_2 .

Эта теорема допускает обобщение на случай трехмерного пространства, а также многомерного пространства.

Можно ввести дополнительный параметр, например время, и рассматривать задачу о столкновении движущихся тел. При описании движения центров двух кругов

$$x_i(t) = x_{i0} + v_{ix}t; \quad y_i(t) = y_{i0} + v_{iy}t; \quad i = 1, 2, \quad (51)$$

со скоростями $v_i = \sqrt{v_{ix}^2 + v_{iy}^2}$ в направлениях, определяемых углами наклона к оси x θ_i , $\tan \theta_i = v_{ix}/v_{iy}$, знак функции Рвачева будет зависеть от времени. Положительность функции Рвачева есть сигнал о их перекрытии (столкновении).

Эта функция может быть полезна при анализе различных задач электростатики, механики и, возможно, в других приложениях [20].

8. О СВОЙСТВАХ РЕПЬЮНИТОВ. РАЗЛОЖЕНИЕ НА ПРОСТЫЕ ДРОБИ

Репьюниты, т. е. числа, состоящие из одинаковых повторяющихся цифр, например из единиц, как правило, не являются простыми ни в какой системе счисления.

Один студент из колледжа Тринити
Искал делители всех чисел репьюнитов,
Что возбудило в нем большое беспокойство,
Обилье цифр повергло ум его в расстройство,
И математику сменил он на молитвы [21].

Исследованию свойств репьюнитов уделялось значительное внимание в литературе [12, 13]. Здесь мы рассмотрим некоторые из них.

Как проще всего получить репьюнит? Рассмотрим, к примеру, бесконечную периодическую дробь $1/7 = 0,14285714285 \dots$. Число из шести цифр, образующее период, обладает рядом замечательных свойств. Максимальная длина периода (полный период) для простого числа p есть четное число $p - 1$; если период неполный, то его длина есть один из делителей числа $p - 1$. В случае четной длины периода имеет место магди-свойство. Для дроби $1/7$ оно формулируется так: $142 + 857 = 999$. Другим является свойство цикличности.

Для периода $1/7$ оно выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} 142857 \cdot 2 = 285714; & 142857 \cdot 3 = 428571; 142857 \cdot 4 = 571428; \\ 142857 \cdot 5 = 714285; & 142857 \cdot 6 = 857142. \end{aligned} \quad (52)$$

При умножении его на любое число меньше семи (далее подразумеваем целое) результат получается из исходного некоторой циклической перестановкой цифр. При умножении же на семь получается репьюнит из шести девяток: $142857 \cdot 7 = 999999$. Этот результат очевиден, поскольку $1/7 \cdot 7 = 0,9999999 \dots$. Аналогичный результат можно получить и для любой периодической дроби $1/p$.

Периоды дробей

$$\begin{aligned} \frac{1, 10, 16, 18, 37}{41}; & \frac{2, 20, 32, 33, 36}{41}; & \frac{3, 7, 13, 29, 30}{41}; & \frac{4, 23, 25, 31, 40}{41}; \\ \frac{5, 8, 9, 21, 39}{41}; & \frac{6, 14, 17, 19, 25}{41}; & \frac{11, 12, 28, 34, 38}{41}; & \frac{15, 22, 24, 27, 35}{41} \end{aligned} \quad (53)$$

получатся циклической перестановкой соответственно наборов пятизначных чисел

$$(02439); (04878); (07317); (09756); (12195); (14634); (29268); (58536). \quad (54)$$

Далее мы ограничимся рассмотрением репьюнитов, состоящих из единиц, и будем подразумевать десятичную систему счисления.

Не представляет труда разложить репьюнит, состоящий из шести единиц, на множители: $111111 = 111 \cdot 1001 = 3 \cdot 37 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$. Значительно сложнее решить задачу разложения на множители репьюнита, состоящего из числа единиц, равного простому числу p . Приведем, к примеру, известную таблицу И. Бернулли:

$$\begin{aligned} N_3 &= 111 = 3 \cdot 37; \\ N_5 &= 11111 = 41 \cdot 271; \\ N_7 &= 1111111 = 239 \cdot 4649; \\ N_{11} &= 11111111111 = 513239 \cdot 21649; \\ N_{13} &= 1111111111111 = 53 \cdot 79 \cdot 265371653; \\ N_{17} &= 11111111111111111 = 2071723 \cdot 5363222357. \end{aligned} \quad (55)$$

Оказалось, что следующие два числа с 19 и 23 единицами являются простыми числами. Приведем также числа, связанные с репьюнитами,

с четным числом единиц:

$$\begin{aligned} 10^3 + 1 &= 7 \cdot 11 \cdot 13; \quad 10^4 + 1 = 73 \cdot 137; \quad 10^8 + 1 = 17 \cdot 5882353; \\ 10^{16} + 1 &= 353 \cdot 449 \cdot 641 \cdot 1409 \cdot 69857; \quad 10^{32} + 1 = 19841 \cdot I, \end{aligned} \quad (56)$$

где I означает некоторое целое число. Периоды чисел, обратные сомножителям в правых частях, есть соответственно 6-, 8-, 16-, 32-, 64-значные числа.

Сформулируем теперь утверждения (они могут быть темами для самостоятельного анализа).

1. Делители репьюнита $N_p = a_1^{(p)} a_2^{(p)} \dots$ длины p имеют вид $a_i^{(p)} = 2pk+1$ и входят в степени не выше первой.

2. Периоды дробей, обратных $a_i^{(p)}$, равны p .

3. Все числа $a_i^{(p)}$ в разложениях репьюнитов N_p встречаются только один раз для любого простого числа p .

В заключение приведем несколько конкретных примеров [13].

Магди-свойство периодов, обратных простым, для случая, когда период неполный, мы продемонстрируем для периода дроби $1/31 = 0.(032258064516129)$: $03225 + 80645 + 16129 = 99999$.

Период дроби числа, обратного одному из сомножителей репьюнита $N_p a_i^{(p)}$, содержит информацию об остальных делителях:

$$\begin{aligned} \frac{1}{239} &= 0.(0041841); 41841 = 9 \cdot 4649; \\ \frac{1}{4649} &= 0.(0002151); 2151 = 9 \cdot 239. \end{aligned} \quad (57)$$

Обратим внимание на совпадение трех последних цифр в делителях репьюнитов N_7 и N_{11} . Имеют ли место такие повторения для других репьюнитов? Можно ли строить репьюниты «с конца»? Эти вопросы могут быть темой дальнейших исследований.

Индийским математиком Капрекаром в 1930 г. было открыто еще одно замечательное свойство периодов десятичных дробей, обратных простому числу. Так, для числа 142857, которое является периодом $1/7$, имеем

$$(142857)^2 = 20408122449; \quad 20408 + 122449 = 142857. \quad (58)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \frac{1}{17} \rightarrow N_{17} &= 0588235294117647; \quad N_{17}^2 = 0034602076124567 \cdot 10^{16} + \\ &+ 4741280276816609 = 10^{16} R_1 + R_2; \quad R_1 + R_2 = 4705882352941176, \end{aligned} \quad (59)$$

видим, что эта процедура приводит к некоторой циклической перестановке исходного периода.

Период каждой правильной дроби, знаменатель которой — полнопериодное простое, является круговой перестановкой и кратен наименьшему из этих периодов.

На свойствах периодических десятичных дробей основан цикл задач польского математика Крайчика. Рассмотрим одну из них.

Число оканчивается цифрой 2. Если ее переставить в начало, то новое число будет в два раза больше первоначального. Найти это число.

Имеем равенство, в котором N — искомое число, n — число цифр в нем:

$$\frac{N-2}{10} + 2 \cdot 10^{n-1} = 2N.19N = 2(10^n - 1), \quad (60)$$

правая часть должна делиться без остатка на 19. Откуда следует $n = 18, 36, \dots$ Наименьшему числу такого вида отвечает $n = 18$. Ответ: $N = 105263157894736842$.

Здесь мы воспользовались малой теоремой Ферма:

$$a^{\phi(p)} = 1 \pmod{p}, \quad (a, p) = 1, \quad (61)$$

где функция Эйлера $\phi(p)$ есть число целых положительных чисел, меньших p и взаимно простых с ним. Для простого числа p имеем $\phi(p) = p - 1$. Поскольку в этом случае число $p - 1$ четное, то один из сомножителей $(a^{(p-1)/2} - 1)(a^{(p-1)/2} + 1)$ должен делиться на p без остатка. Вопрос о том, который из них, решает критерий Эйлера о символе Лежандра:

$$a^{(p-1)/2} = \left(\frac{a}{p}\right) \pmod{p}. \quad (62)$$

Символ Лежандра (a/p) принимает значения ± 1 (его свойства даны ниже). Выбирая $a = 10$, пользуясь его частными значениями $\left(\frac{1}{5}\right) = 1, \left(\frac{2}{5}\right) = -1$, а также законом взаимности, получим, в частности, что числа

$$\begin{aligned} &\frac{10^3 + 1}{7}; \quad \frac{10^5 + 1}{11}; \quad \frac{10^6 - 1}{13}; \quad \frac{10^8 + 1}{17}; \quad \frac{10^9 + 1}{19}; \\ &\frac{10^{11} + 1}{23}; \quad \frac{10^{14} + 1}{29}; \quad \frac{10^{113} + 1}{227} \end{aligned} \quad (63)$$

являются целыми.

Свойства символа Лежандра таковы [22]:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{p}\right) &= 1; \quad \left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{(p-1)/2}; \quad \left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right) \left(\frac{b}{p}\right); \\ \left(\frac{ab^2}{p}\right) &= \left(\frac{a}{p}\right); \quad \left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{(p^2-1)/8}; \\ a &= a_1 \pmod{p}, \quad \left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{a_1}{p}\right). \end{aligned} \quad (64)$$

Закон взаимности формулируется так:

$$(q/p) = (p/q) (-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}}. \quad (65)$$

В частности,

$$\begin{aligned} \left(\frac{10}{3}\right) &= 1; \quad \left(\frac{10}{7}\right) = -1; \quad \left(\frac{10}{11}\right) = -1; \quad \left(\frac{10}{13}\right) = 1; \quad \left(\frac{10}{17}\right) = -1; \\ \left(\frac{10}{19}\right) &= -1; \quad \left(\frac{10}{23}\right) = -1; \quad \left(\frac{10}{29}\right) = -1. \end{aligned} \quad (66)$$

По аналогии с процедурой Остроградского разложения рациональных функций, например

$$\frac{x}{(x+1)(x^2+3)} = \frac{x+3}{4(x^2+3)} - \frac{1}{4(x+1)}, \quad (67)$$

поставим задачу о представлении арифметической дроби

$$\frac{1}{\prod_i^n p_i}, \quad (68)$$

где p_i — простые числа, в виде суммы

$$\frac{1}{\prod_i^n p_i} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{a_i}{p_i}, \quad |a_i| < p_i. \quad (69)$$

Коэффициенты a_i можно найти из системы диофантовых уравнений:

$$\frac{a_i}{p_i} \prod_i^n p_i = 1 \pmod{(p_i)}. \quad (70)$$

Это представление оказывается неоднозначным. Действительно, рассмотрим два примера:

$$\begin{aligned} \frac{1}{7 \cdot 13} &= \frac{2}{13} - \frac{1}{7}; \\ \frac{1}{7 \cdot 11 \cdot 13} &= -\frac{2}{7} - \frac{7}{11} + \frac{12}{13} = -\frac{2}{7} + \frac{4}{11} - \frac{1}{13}. \end{aligned} \quad (71)$$

9. ГРАВИТАЦИОННЫЕ ТОННЕЛИ. ЭСТАКАДЫ

Шоссе Россию там и тут,
Соединив, пересекут.
А. С. Пушкин

Согласно принципу независимости движений время движения тела по тоннелю вдоль хорды планеты и вдоль круговой орбиты вокруг Земли совпадет. Например, для планеты Земля время движения по хорде (туда и обратно) будет равно времени обращения спутника по круговой орбите вокруг нее — около полутора часов:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} = 2 \cdot 3,14\sqrt{\frac{6,4 \cdot 10^6 \text{ м}}{10 \text{ м/с}^2}} = 4/3 \text{ ч.} \quad (72)$$

Покажем это прямым вычислением. Ньютоном было показано, что на тело, расположенное на расстоянии r от центра Земли, действует только масса, сосредоточенная в сфере радиуса r , а взаимное влияние шарового слоя вне этой сферы взаимно компенсируется. Отношение масс внутри сферы и массы Земли будет $M(r)/M(R) = r^3/R^3$, где R — радиус Земли. Будем отсчитывать расстояние вдоль хорды x от точки минимального расстояния хорды до центра Земли (основания перпендикуляра, опущенного на хорду из центра). Согласно законам Ньютона ускорение тела массы m (малой по сравнению с массой Земли) обуславливается притяжением материи внутри сферы:

$$m\frac{d^2}{dt^2}x = -\frac{\gamma M(r)m}{r^2} \cos\theta = -\frac{\gamma r^3 M_E m x}{r^2 R^3 r} = -\frac{g}{R}xm, \quad (73)$$

где θ есть угол между направлением вдоль хорды и направлением результирующей силы притяжения массы внутри сферы, т. е. направлением к центру Земли в точке, где расположено тело. Кроме того, мы воспользовались известным соотношением между постоянной Ньютона γ , ускорением силы тяжести на поверхности Земли g , радиусом R и массой M_E Земли:

$$g = \frac{\gamma M_E}{R}. \quad (74)$$

В результате получаем уравнение гармонических колебаний

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \nu^2 x = 0, \quad \nu^2 = \frac{g}{R}, \quad (75)$$

с начальным условием $x(t=0) = x_0$ ($2x_0$ есть длина хорды). Решение этого уравнения

$$x(t) = x_0 \cos(\nu t), \quad (76)$$

откуда и следует приведенное выше утверждение. Расстояния по поверхности планеты L между концами хорды и максимальной глубиной ее h связаны соотношением

$$L = 2R \arccos\left(1 - \frac{h}{R}\right) \approx 2\sqrt{2Rh}. \quad (77)$$

Приведем несколько конкретных цифр:

$$\begin{aligned} h_1 &= 0,5 \text{ км}, & L_1 &= 160 \text{ км}, \\ h_2 &= 1 \text{ км}, & L_2 &= 220 \text{ км}, \\ h_3 &= 2 \text{ км}, & L_3 &= 320 \text{ км}, \\ h_4 &= 6 \text{ км}, & L_4 &= 560 \text{ км}, \\ h_5 &= 50 \text{ км}, & L_5 &= 1600 \text{ км}. \end{aligned} \quad (78)$$

Конечно, имея в виду практические применения для нашей планеты, глубины более пятидесяти километров недопустимы из-за наличия магмы. Надо принимать во внимание также тектонические подвижки платформ Земли и огромные затраты на строительство тоннелей. Но несомненным выигрышем является практическое отсутствие затрат энергии и универсальность времени передвижения. А также решение проблемы занятости миллионов трудящихся.

Другой возможный путь энергетически беззатратных перемещений — построение эстакад над поверхностью Земли. Из баланса энергий получим уравнение

$$\left(\frac{dx}{R_h dt}\right)^2 = 2\nu_h^2 \left(\frac{R_h}{R_x} - \frac{R_h}{R_L}\right), \quad (79)$$

где

$$R_h = R + h, \quad R_x = \sqrt{R_h^2 + x^2}, \quad R_L = \sqrt{R_h^2 + L^2}, \quad \nu_h = \frac{\sqrt{\gamma M_E}}{R_h}, \quad (80)$$

$2L$ — полная длина эстакады; h — минимальное расстояние эстакады от поверхности Земли; x — расстояние от положения вагона до центра эстакады. Для расстояния от точки, где находится вагон, до ближнего края эстакады, находим $L - x$.

Предположим, что на краю эстакады вагон покоится. Вводя переменную $y = x/R_h = \tan \theta$, имеем

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{2}\nu_h \cos \theta \sqrt{\cos \theta - \cos \theta_L}, \quad \tan \theta_L = \frac{L}{R_h}. \quad (81)$$

Интегрируя, получим для времени движения вдоль всей эстакады:

$$T = \frac{\sqrt{2}}{\nu_h} \int_0^{\theta_L} \frac{d\theta}{\cos \theta \sqrt{\cos \theta - \cos \theta_L}}, \quad \tan \theta_L = \frac{L}{R_h}. \quad (82)$$

Мы не принимали во внимание эффект суточного вращения Земли. Простая оценка создаваемого вследствие вращения дополнительного ускорения $g_r \sim V_r^2/R_E \sim 0,02 \text{ м/с}^2 \ll g \sim 10 \text{ м/с}^2$ показывает, что этот эффект мал.

Оказывается, что время движения по эстакаде меньше времени движения на то же расстояние вдоль тоннеля.

10. ИНТЕГРАЛЫ

1. Выполняя интегрирование по направлениям некоторого вектора \vec{n} в трехмерном пространстве при двух фиксированных направлениях \vec{n}_1 и \vec{n}_2 , удобно соответствующий угловой элемент представить в виде

$$d\Omega_n = d\phi \sin \theta d\theta, \quad \int d\Omega_n = 2\pi, \quad (83)$$

где полярный и азимутальный углы отсчитываются от одного из направлений:

$$d\Omega_n = 2 \frac{dc_1 dc_2}{\sqrt{D}}, \quad D = 1 - c_1^2 - c_2^2 - c^2 + 2c_1 c_2 c, \quad D > 0, \quad (84)$$

где $c = \cos \theta_{12}$, $c_{1,2} = \cos \theta_{1,2}$, а $\theta, \theta_{1,2}$ есть соответственно углы между направлениями $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}, \vec{n}_{1,2}$. Представляя величину D в виде

$$D = (c_1 - c_-)(c_+ - c_1), \quad c_{\pm} = cc_2 \pm \sqrt{(1 - c^2)(1 - c_2^2)}, \quad (85)$$

и используя подстановку Эйлера $t^2 = (c_+ - c_1)/(c_1 - c_-)$, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{c_-}^{c_+} \frac{dc_1}{\sqrt{D}} \left[1; c_1; c_1^2; \frac{1}{1 - bc_1}; \frac{1}{(1 - bc_1)^2} \right] = \\ = \left[1, cc_2; \frac{1}{2}(1 - c^2)(1 - c_2^2) + c^2 c_2^2; \frac{1}{R}; \frac{1 - bcc_2}{R^3} \right], \quad (86) \end{aligned}$$

где

$$R = \sqrt{(1 - bc_-)(1 - bc_+)} = \sqrt{(c - bc_2)^2 + (1 - b^2)(1 - c_2^2)^2}, \quad b^2 < 1. \quad (87)$$

Приведем также двукратные интегралы:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{D>0} \frac{dc_1 dc_2}{\sqrt{D}} \frac{1}{(1 - bc_1)} = \frac{1}{b} \ln \frac{1 + b}{1 - b}; \\ \frac{1}{\pi} \int_{D>0} \frac{dc_1 dc_2}{\sqrt{D}} \frac{1}{(1 - b_1 c_1)(1 - b_2 c_2)} = \frac{2}{\sqrt{d}} \ln \frac{1 - b_1 b_2 c + \sqrt{d}}{\sqrt{(1 - b_1^2)(1 - b_2^2)}}; \quad (88) \\ b_{1,2}^2 < 1, d = (1 - b_1 b_2 c)^2 - (1 - b_1^2)(1 - b_2^2). \end{aligned}$$

2. Интегралы, возникающие при использовании формул Коши:
интеграл Соловцовых

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{(x+t)^2} \operatorname{arctg}\left(\frac{2\pi \ln t}{a^2 - \pi^2 + \ln^2 t}\right) = \frac{\ln x}{x(a^2 + \ln^2 x)}, \quad a^2 > 0; \quad (89)$$

интеграл Ваняшина

$$I(x) = \int_0^{\infty} \frac{dt}{x+t} \frac{1}{\pi^2 + \ln^2 t} = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{\ln x}, \quad x > 0; \quad I(0) = 1; \quad I(1) = 1/2; \quad (90)$$

интеграл Барбиери [23]

$$\begin{aligned} F(r, a) &= \frac{r}{2a} \int_1^{\infty} \frac{dx}{x(x-r-i0)} \ln \frac{a-\beta}{a+\beta} = \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{a^2-x^2} \ln(1-i0-r(1-x^2)), \quad \beta = \sqrt{1-\frac{1}{x}}. \end{aligned} \quad (91)$$

При $a = 1$

$$\operatorname{Re} F(r, 1) = -2 + b \ln^2 \frac{b+1}{b-1}, \quad \operatorname{Im} F(r, 1) = -\pi \arccos \sqrt{r}, \quad b = \sqrt{1-\frac{1}{r}}. \quad (92)$$

3. При описании двухцентровых систем полезны формулы [24]

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int d^3 r_1 \frac{1}{r_{13} r_{12}} e^{-cr_{13}} &= \\ &= \frac{1}{c^2 r_{23}} (1 - e^{-cr_{23}}), \quad c > 0, \quad r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|, \end{aligned} \quad (93)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{16\pi^2} \int d^3 r_1 \int d^3 r_2 \frac{1}{r_1 r_2 r_{12}} e^{-ar_1 - br_2 - cr_{12}} &= \\ &= \frac{1}{(a+b)(a+c)(b+c)}, \quad a, b, c > 0, \quad r_{1,2} = |\vec{r}_{1,2}|, \quad r_{12} = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|. \end{aligned} \quad (94)$$

4. Фейнмановская параметризация — соединение знаменателей:

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_1 a_2} &= \int_0^1 \frac{dx}{d^2(x)}, \quad d(x) = x a_1 + \bar{x} a_2, \quad \bar{x} = 1 - x; \\ \frac{1}{a_1^{n+1} a_2^{m+1}} &= \frac{(n+m+1)!}{n! m!} \int_0^1 \frac{d x x^n \bar{x}^m}{d^{n+m+2}(x)}; \\ \frac{1}{abc} &= 2 \int_0^1 dx \int_0^x \frac{dy}{(a + (b-a)x + (c-b)y)^3}.\end{aligned}\tag{95}$$

5. Определенные однократные интегралы. Пределы $0, \infty$. Определение функции Спенса $Li(z) = -\int_0^z \frac{dx}{x} \ln(1-x)$:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} \frac{1}{x^2(1-b^2)+1} &= \frac{1}{2b} \ln \frac{1+b}{1-b}, \quad 0 < b < 1; \\ b \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2(1-b^2)+1} &= \frac{1}{2} [Li\left(-\frac{1-b}{1+b}\right) - \\ &- Li\left(-\frac{1+b}{1-b}\right)] - \ln 2 \ln \frac{1+b}{1-b} + Li\left(\frac{1+b}{b}\right) - \\ &- Li\left(\frac{1+b}{2b}\right) - Li\left(-\frac{1-b}{b}\right) + Li\left(-\frac{1-b}{2b}\right),\end{aligned}\tag{96}$$

$$\begin{aligned}2b \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} \frac{\ln x}{x^2(1-b^2)+1} &= -\ln 2 \ln \frac{1+b}{1-b} - \\ &- \frac{1}{2} Li\left(-\frac{1-b}{1+b}\right) - \frac{1}{2} Li\left(-\frac{1+b}{1-b}\right) + Li\left(\frac{1-b}{2}\right) + Li\left(\frac{1+b}{2}\right);\end{aligned}$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{x^2 - 2x \cos \beta + 1} dx = \frac{\pi \sin((1-\alpha)\beta)}{\sin(\pi\alpha) \sin \beta}, \quad 0 < \alpha < 1.\tag{97}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}} \ln \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}-x} = 2 \ln 2, \\
& \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} \frac{1}{x^2+a^2} = \frac{\arccos a}{a\sqrt{a^2+1}}, \quad 0 < a < 1, \\
& \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} \frac{1}{x^2+a^2} = \frac{\ln(a+\sqrt{a^2-1})}{a\sqrt{a^2-1}}, \quad 1 < a.
\end{aligned} \tag{98}$$

6. Функции Ферми имеют вид [10]

$$F_n(x) = \int_0^{\infty} \frac{t^n dt}{1+e^{t-x}}. \tag{99}$$

Известны соотношения

$$F_3(x) + F_3(-x) = \pi^2 \left[\frac{7\pi^2}{60} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4\pi^2}x^4 \right]. \tag{100}$$

Асимптотические выражения выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}
& F_n(x) = O(x^n e^{-|x|}), \quad x < 0, \quad |x| \gg 1, \\
& F_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \int_0^{\infty} \frac{dt}{1+e^t} [(t+x)^n - (x-t)^n] + O(x^n e^{-x}), \quad x > 0.
\end{aligned} \tag{101}$$

Пренебрегая поправками $O(x^n e^{-x})$, получим

$$\begin{aligned}
F_1(x) &= \frac{1}{2}x^2 + 2I_1; & F_2(x) &= \frac{x^3}{3} + 2xI_1; \\
F_3(x) &= \frac{1}{4x^4} + 6x^2I_1 + 3I_3,
\end{aligned} \tag{102}$$

где

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\infty} \frac{dz z^n}{1+e^z} = (1-2^{-n})n!\xi_{n+1}; \\
\xi_2 &= \frac{\pi^2}{6}; \quad \xi_{2n} = \frac{2^{2n-1}\pi^{2n}}{(2n)!} B_{2n},
\end{aligned} \tag{103}$$

в которых B_k — числа Бернулли

$$B_2 = \frac{1}{6}; \quad B_4 = -\frac{1}{90}; \quad B_6 = \frac{1}{42}; \quad B_8 = -\frac{1}{30}, \dots \quad (104)$$

7. Пределы $1, \infty$:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} \left[\frac{1}{x^2-a^2}; \frac{1}{x^2+a^2} \right] = \frac{1}{a} \left[\frac{\arcsin a}{\sqrt{1-a^2}} \right]; \quad (105)$$

$$\frac{\ln(a + \sqrt{a^2+1})}{\sqrt{a^2+1}}, \quad 0 < a < 1.$$

8. Пределы $0, 1$:

$$\int_0^1 \frac{dx}{D(x)} \left[1; \frac{x\bar{x}}{D(x)}; \frac{x^2}{D(x)} \right] = \left[\frac{\pi}{ab}; \frac{1}{2a^2b^2}; \frac{\pi}{4a^3b} \right], \quad (106)$$

$$D(x) = a^2x^2 + b^2\bar{x}^2, \quad a, b > 0;$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{X(x)} \left[1; \frac{x}{X(x)}; \frac{x^2}{X(x)} \right] =$$

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{R}}L; -\frac{2A+B}{RX(1)} + \frac{B}{\sqrt{R^3}}L; \frac{2C+B}{RX(1)} - \frac{2C}{\sqrt{R^3}}L \right], \quad (107)$$

$$X(x) = Ax^2 + Bx + C, \quad R = B^2 - 4AC > 0; \quad L = \ln \frac{(B+2C+\sqrt{R})^2}{4CX(1)}. \quad (108)$$

9. Пределы $-1, 1$:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{a^2-x^2} = \frac{\pi}{a\sqrt{a^2-1}}, \quad a > 1; \quad (109)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{a\sqrt{a^2+1}}, \quad a > 0;$$

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-2ax+a^2)(1-2bx+b^2)}} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \ln \frac{1+\sqrt{ab}}{1-\sqrt{ab}}, \quad 0 < a, b < 1. \quad (110)$$

10. Азимутальные интегралы:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{1-a \cos \phi} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}, \quad |a| < 1;$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{(1-a\cos\phi)^2(1-a\cos(\phi-\phi_1))} =$$

$$= \frac{2\pi}{(\sqrt{1-a^2})^3} \frac{1 - \frac{a^2}{2}(1+a^2\cos^2(\phi_1/2))}{(1-a^2\cos^2(\phi_1/2))^2}, \quad |a| < 1;$$

$$\int_0^{2\pi} d\phi \frac{1}{(1-a\cos\phi)(1-a\cos(\phi-\phi_1))(1-a\cos(\phi-\phi_2))} =$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{1-a^2}} \frac{1}{\sin(\phi_1/2)\sin(\phi_2/2)\sin((\phi_1-\phi_2)/2)} =$$

$$= \left[\frac{\sin\phi_1}{1-a^2\cos^2(\phi_1/2)} - \frac{\sin\phi_2}{1-a^2\cos^2(\phi_2/2)} + \frac{\sin(\phi_2-\phi_1)}{1-a^2\cos^2((\phi_2-\phi_1)/2)} \right],$$

$$|a| < 1;$$

$$\int_0^{2\pi} d\phi \frac{1}{(a_1+b_1\cos\phi)(a_2+b_2\cos(\phi-\phi_1))} =$$

$$= \frac{2\pi}{(a_1a_2-b_1b_2\cos\phi_1)^2 - (a_1^2-b_1^2)(a_2^2-b_2^2)} \left[\frac{b_1}{\sqrt{a_1^2-b_1^2}}(a_2b_1-a_1b_2\cos\phi_1) + \right.$$

$$\left. + \frac{b_2}{\sqrt{a_2^2-b_2^2}}(a_1b_2-a_2b_1\cos\phi_1) \right], \quad |a_1| > |b_1|, |a_2| > |b_2|;$$

$$\int_0^{2\pi} d\phi \ln(a^2\cos^2\phi + b^2\sin^2\phi) = 4\pi \ln \frac{a+b}{2}, \quad a, b > 0;$$

$$\int_0^{2\pi} d\phi \ln^2(a^2\cos^2\phi + b^2\sin^2\phi) = 2\pi \left[\ln^2\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right) + \right.$$

$$2\ln\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right) \ln\frac{(a+b)^2}{2(a^2+b^2)} - 2Li_2\left(\frac{(a-b)^2}{2(a^2+b^2)}\right) +$$

$$\left. + 4Li_2\left(\frac{(a-b)^2}{a^2+b^2}\right) - Li_2\left(\frac{(a^2-b^2)^2}{(a^2+b^2)^2}\right) \right];$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{a+b\cos\phi} \ln(a+b\cos\phi) = -\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}} \ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{2(a^2-b^2)}\right), \quad a > b > 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{a + b \cos \phi} \ln^2(a + b \cos \phi) = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}} \times \\ \times \left[\ln^2 \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{2(a^2 - b^2)} \right) + 2Li_2 \left(\frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{a + \sqrt{a^2 - b^2}} \right) \right]. \quad (113)$$

11. ЛАЗЕР НА СВОБОДНЫХ ЭЛЕКТРОНАХ

Замечательное открытие восьмидесятых годов прошлого века — когерентное излучение быстрых заряженных частиц (электронов), движущихся в ондуляторе — цепочке структур с магнитным полем, меняющим направление, поперечно скорости частицы, получило название «лазер на свободных электронах» [14, 15]. Это устройство имеет ряд преимуществ по сравнению с обычными лазерами. Это — возможность перестраивать частоту, меняя энергию частицы; отсутствие перегревающегося рабочего тела; большая мощность.

Допустим, что ондулятор навязывает электрону колебания в поперечной плоскости с частотой ω_0 . Если частота излучаемого электроном фотона такова, что выполнено соотношение

$$\omega_0 = \omega \frac{c - v}{c} = \frac{\omega}{2\gamma^2}, \quad \gamma = \frac{E}{mc^2}, \quad \gamma^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (114)$$

где E — энергия электрона (в системе покоя ондулятора), то излучение электрона будет иметь когерентный характер: излучения из двух соседних горбов поперечных колебаний будут совпадать по фазе и усиливать друг друга. Действительно, мы здесь учли разность скоростей электрона и излученного им фотона.

Более точную формулу можно получить, исследуя уравнение движения электрона в магнитном поле [14]. Пренебрегая излучением (это эффект высшего порядка по константе тонкой структуры: $\alpha = e^2/(\hbar c) = 1/137$), уравнение движения запишем в виде

$$\gamma m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{e}{c} [\vec{v}\vec{B}], \quad (115)$$

где m, e — масса и заряд электрона; c — скорость света; \vec{B} — магнитное поле ондулятора, мы выберем его в виде $\vec{B} = \sqrt{2}B_\perp e_y \sin(k_0 z)$; e_y — орт в направлении оси y , ось z выберем вдоль направления поступательного движения электрона; $k_0 = 2\pi/l_0$; l_0 — ширина ячейки ондулятора; Nl_0 — полная

длина ондулятора; N — число ячеек. (Заметим, что этот выбор не реалистичен: напряженность поля не удовлетворяет уравнению Максвелла $[\nabla, \vec{B}] = 0$, в реальном поле надо учитывать краевые эффекты. В этой задаче они не существенны.) Полагая $v_x \ll v_z \approx c$, имеем $z = vt = v_{\parallel}t$. Обозначая $\omega_0 = k_0 v_z$ и $\Omega_{\perp} = eB_{\perp}/mc$, запишем уравнения в виде

$$\begin{aligned}\frac{dv_x}{dt} &= -\sqrt{2}\frac{v_z\Omega_{\perp}}{\gamma}\sin(k_0z); \\ \frac{dv_z}{dt} &= \sqrt{2}\frac{v_x\Omega_{\perp}}{\gamma}\sin(k_0z).\end{aligned}\quad (116)$$

Их решением будет

$$\begin{aligned}v_x &= \sqrt{2}\frac{v_z\Omega_{\perp}}{\omega_0\gamma}\cos(\omega_0t), \\ v_z &= v_{\parallel} - 2\frac{v_x\Omega_{\perp}^2}{4\omega_0^2\gamma^2}\cos(2\omega_0t).\end{aligned}\quad (117)$$

Для среднеквадратичной амплитуды скорости поперечных колебаний получим

$$\frac{\bar{v}_x}{v_z} = \frac{\Omega_{\perp}}{\gamma\omega_0} = \frac{a_w}{\gamma}, \quad a_w = \frac{eB_{\perp}}{mc^2k_0}, \quad (118)$$

a_w — нормированный среднеквадратичный векторный потенциал (для справки $mc^2/e = 1700$ Гс · см). Поперечные колебания электрона приводят к потере в поступательном движении, поскольку полная энергия при движении в магнитном поле сохраняется. Таким образом, получим

$$\frac{1}{\gamma^2} = 1 - \frac{v_x^2}{c^2} - \frac{v_z^2}{c^2}, \quad \gamma_{\parallel}^2 = \frac{1}{1 - \frac{v_z^2}{c^2}} = \frac{\gamma^2}{1 + a_w^2}. \quad (119)$$

Заметим, что частный вид ондулятора, когда $a_w \gg 1$, называется вигглером.

Рассмотрим систему отсчета, в которой электрон покоится. В этой системе период (ширина ячейки) уменьшается вследствие лоренцева сокращения длины, а волновое число увеличивается: $l'_0 = l_0/\gamma$; $k'_0 = k_0\gamma$. В этой системе имеются электрическое и магнитное поля: $\vec{B}' = \gamma\vec{B}_{\perp}$, $\vec{E}' = \frac{2}{c}[\vec{v}, \vec{B}_{\perp}]$. Электрон совершает колебания с частотой $\omega'_0 = \gamma k_0 v_{\parallel}$. Поле ондулятора — электромагнитная волна — испытывает томсоновское рассеяние. Найдем частоту рассеянного излучения (покоя ондулятора) в лабораторной системе с помощью преобразований Лоренца:

$$\omega'_0 = \gamma(\omega_s - \vec{k}_s \vec{v}) = \gamma\omega_s(1 - \beta_{\parallel} \cos\theta), \quad (120)$$

где k_s и ω_s — волновой вектор и частота рассеянного фотона; θ — угол между направлениями движения электрона и фотона. Для малых значений этого угла и больших значений гамма-фактора имеем

$$\begin{aligned} 1 - \beta_{\parallel} \cos \theta &= 1 - (1 - (1 - \beta_{\parallel}))(1 - (1 - \cos \theta)) \approx \\ &\approx (1 - \beta_{\parallel}) + (1 - \cos \theta) \approx \frac{1}{2\gamma_{\parallel}^2}(1 + \gamma_{\parallel}^2\theta^2). \end{aligned} \quad (121)$$

В результате получаем более точную формулу для длины волны в лабораторной системе:

$$\lambda_s = \frac{l_0}{2\gamma^2}(1 + a_w^2 + \gamma^2\theta^2). \quad (122)$$

Например, для $l_0 = 1$ см и энергии пучка электронов 2 МэВ, $\gamma = 4$, $\lambda_s = 1/32$ см; для энергии 50 МэВ длина волны уже лежит в инфракрасном диапазоне. Отметим, что томсоновское рассеяние имеет анизотропный характер — электрон эффективно рассеивает в направлении своего движения [16]:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma^{e\gamma \rightarrow e\gamma}}{dO_2} &= \frac{r_0^2}{2}(1 + \cos^2 \theta) \frac{1}{A^2} \left[1 + \frac{(1 - A)^2}{(1 + \cos^2 \theta)A^2} \right], \\ A &= 1 + \frac{\omega_1}{m}(1 - \cos \theta), \end{aligned} \quad (123)$$

где ω_1 — частота начального фотона; θ — угол вылета рассеянного фотона; $r_0 = e^2/mc^2 = 2,810^{-13}$ см — классический радиус электрона; σ — сечение процесса; $dO_2 = 2\pi d \cos \theta$ — элемент углового объема рассеянного фотона. При малых частотах получаем классическую формулу Томсона

$$d\sigma = \frac{r_0^2}{2}(1 + \cos^2 \theta)dO_2. \quad (124)$$

12. ТЕПЛОВЫЕ ШУМЫ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ. МЕТОД ЛАНЖЕВЕНА. ТЕОРЕМА НАЙКВИСТА

Метод Ланжевена заключается в записывании дифференциального уравнения системы и введении в правую часть случайной возмущающей функции, описывающей флуктуации в системе. При некоторых предположениях об этой функции может быть получена достаточная информация о системе, чтобы вычислить спектральные плотности флуктуаций. Приведем в качестве примера явление теплового шума в электрических цепях. Рассмотрим цепь с

последовательно включенными сопротивлением R , индуктивностью L и источником теплового шума $H(t)$. Дифференциальное уравнение Ланжевена в этом случае будет

$$L \frac{di}{dt} + Ri = H(t), \quad 0 < t < T. \quad (125)$$

Разлагая в ряд Фурье ток и случайное возмущение:

$$i(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \beta_n e^{i\omega_n t}; \quad H(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{i\omega_n t},$$

$$\omega_n = 2\pi \frac{n}{T}, \quad n = 0; \pm 1; \pm 2; \dots, \quad (126)$$

получим, подставляя ω_n в уравнение Ланжевена:

$$\beta_n = \frac{\alpha_n}{i\omega_n L + R}. \quad (127)$$

Определяя спектральные плотности $f = \omega/(2\pi)$:

$$S_H(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} 2T \alpha_n \alpha_n^*; \quad S_i(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} 2T \beta_n \beta_n^* \quad (128)$$

и пользуясь свойством белого шума $S_H(f) = S_H(0)$, получим для функциональной зависимости спектральной плотности тока

$$S_i(f) = \frac{S_H(0)}{R^2 + \omega^2 L^2}. \quad (129)$$

Задача свелась к определению $S_H(0)$. Для этого найдем среднее квадратичное тока

$$\bar{i}^2 = \int_0^{\infty} S_i(f) df = \frac{S_H(0)}{4RL}. \quad (130)$$

Из теоремы о равномерном распределении энергии по степеням свободы известно:

$$\frac{1}{2} L \bar{i}^2 = \frac{1}{2} kT. \quad (131)$$

В результате получим

$$S_H(0) = 4kTR; \quad S_i(f) = \frac{4RkT}{R^2 + 4L^2 \pi^2 f^2}. \quad (132)$$

Соотношение $S_H(0) = 4kTR$ называется теоремой Найквиста [17].

Теорема Найквиста может быть сформулирована в разных формах. Шум в любой цепи, поддержанной при определенной температуре T , может быть описан шумовой ЭДС $\sqrt{\bar{e}^2}$, включенной последовательно с каждым сопротивлением R , такой, что интенсивность \bar{e}^2 в частотном интервале df равна

$$\bar{e}^2 = 4kTp(f)df, \quad (133)$$

номинальная мощность шума в частотном интервале Δf

$$P_N = \frac{1}{4} \frac{\bar{e}^2}{R} = kTp(f)\Delta f, \quad (134)$$

где $p(f)$ есть фактор Планка, учитывающий квантовые поправки:

$$p(f) = \frac{hf}{kT} (e^{hf/(kT)} - 1)^{-1}, \quad (135)$$

где $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с — постоянная Планка; $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/град — постоянная Больцмана. Постоянная Больцмана была извлечена с точностью до процента из измерений теплового шума, что надо рассматривать как экспериментальное подтверждение применимости закона равнораспределения энергии к электрическим цепям. Квантовый эффект мал. Так, сравнение номинальной мощности с учетом и без учета квантовых эффектов

$$kT' = \frac{hf}{kT} (e^{hf/(kT)} - 1)^{-1} \quad (136)$$

дает для $f = 3 \cdot 10^{10}$ /с разность температур $T - T' = hf/(2k) = 0,7$ К, что в пределах точности современных опытов. Проанализируем применение теоремы Найквиста в случае, когда отдельные участки цепи поддерживаются при разной температуре. Взаимодействие флуктуационного тока с конденсатором и индуктивностью не зависит от температуры, при которых они поддерживаются. Этот факт подтверждается опытом. Но флуктуационный ток производит тепловой эффект в сопротивлении. Поэтому между термостатом и этим током должно быть тепловое равновесие.

Для цепи из двух последовательно включенных сопротивлений R_1 и R_2 , находящихся при температурах T_1 и T_2 , шумовая ЭДС в интервале частот df

$$\bar{e}^2 = 4kT_N(R_1 + R_2)df = 4kT_1R_1df + 4kT_2R_2df, \quad (137)$$

откуда находим эквивалентную шумовую температуру

$$T_N = T_1 \frac{R_1}{R_1 + R_2} + T_2 \frac{R_2}{R_1 + R_2}. \quad (138)$$

Одно из важных направлений — измерение космического радишума, производимого антеннами. В настоящее время твердо установлено, что разные области Галактики излучают шум разной интенсивности. Величина мощности шума определяет нижнюю границу сигнала, могущего быть принятым антенной. Так, в 1965 г. было открыто реликтовое излучение, отвечающее температуре газа фотонов около 3 К. Это излучение, заполняющее все пространство, представляет фон для работы радиоантенн в дециметровом диапазоне длин волн. Исследование участков интенсивного излучения позволяет определить неоднородности реликтового излучения.

13. КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ. ДВИЖЕНИЕ ВДОЛЬ ГРАНИЦ ОБЛАСТЕЙ

Конформное преобразование $w = f(z)$ сопоставляет некоторой области G в плоскости комплексной переменной $z = x + iy$ определенную область Q в плоскости $w = u(x, y) + iv(x, y)$. По принципу соответствия границ каждой точке границы L области G будет соответствовать определенная точка границы N области Q . Равномерному движению точки вдоль границы L области G будет отвечать в общем случае неравномерное движение соответствующего образа этой точки вдоль границы N области Q . Определим относительную скорость движения образа точки

$$v(x, y) = \frac{dw}{dz}, \quad z \in L. \quad (139)$$

Эта величина не зависит от направления дифференцирования (это обеспечивается условиями Коши–Римана для аналитических функций), и поэтому мы можем считать скорость направленной по касательной к участку границы в момент прохождения точки. В случае конечных областей времена прохождения замкнутых границ одинаковы:

$$\int_N \frac{dw}{v} = \int_L dz. \quad (140)$$

Ниже мы иллюстрируем это соотношение на нескольких примерах.

1. Рассмотрим преобразование окружности $|z| = 1$ в плоскости z в прямую при преобразовании:

$$w = \frac{z - 1}{z + 1}. \quad (141)$$

Параметризуя точку на границе окружности $z = e^{i\phi}$, $0 < \phi < 2\pi$, получим $w = i \tan \frac{\phi}{2}$. Для скорости движения образа точки (вдоль мнимой оси) имеем

$v = i(1 + |w|^2)/2$. Из принципа соответствия границ получим в этом случае

$$d\phi = \frac{2d|w|}{1 + |w|^2}. \quad (142)$$

Время прохождения всей окружности совпадает со временем движения вдоль прямой:

$$2\pi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2d|w|}{1 + |w|^2}. \quad (143)$$

2. Преобразование $w = \frac{z - z_0}{1 - z\bar{z}_0} \frac{1 - \bar{z}_0}{1 - z_0}$, $z_0 = \rho e^{i\alpha}$, $\rho < 1$, отображает окружность $|z| = 1$ в окружность $|w| = 1$.

Полагая $w = e^{i\psi}$, получим

$$\psi(\phi) = -i \left[\ln \frac{e^{i\phi} - z_0}{1 - e^{i\phi}\bar{z}_0} + \ln \frac{1 - \bar{z}_0}{1 - z_0} \right], \quad \psi(0) = 0, \quad (144)$$

$$\frac{d\psi}{d\phi} = \frac{z}{z - z_0} + \frac{z_0}{1 - z\bar{z}_0}, \quad z = e^{i\phi}. \quad (145)$$

Равенство времен прохождения окружностей обеспечивается соотношением

$$\frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} d\phi \frac{d\psi}{d\phi} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{z - z_0} = 1. \quad (146)$$

3. Отображение верхней полуплоскости z , $\text{Im } z > 0$, на выпуклый многоугольник с углами $\pi\alpha_k$ при вершинах осуществляется с помощью интеграла Кристоффеля–Шварца [18, 19]:

$$w(z) = c \int_{z_0}^z dz (z - a_1)^{\alpha_1 - 1} (z - a_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (z - a_n)^{\alpha_n - 1} + c_1, \quad (147)$$

где действительные числа $a_k, \alpha_k, k = 1, 2, \dots, n$, удовлетворяют соотношению

$$-\infty < a_1 < a_2 < \dots < a_n < \infty, \quad 0 < \alpha_i < 1, \quad \sum_{k=1}^n \alpha_k = n - 2. \quad (148)$$

Действительно, аргумент производной постоянен на отрезках, а сама производная (скорость движения образа на этой стороне многоугольника) не

обращается в нуль внутри такого отрезка действительной оси. Длина этой стороны

$$A_k A_{k+1} = c \int_{a_k}^{a_{k+1}} dz (z - a_1)^{\alpha_1 - 1} (z - a_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (z - a_n)^{\alpha_n - 1}. \quad (149)$$

Таким образом, функция $w(x)$ в силу принципа соответствия границ осуществляет взаимно-однозначное соответствие действительной оси и контура многоугольника $A_1 A_2 \dots A_n$, а скорость прохождения сторон многоугольника образом точки, равномерно движущейся вдоль действительной оси x , будет

$$|v(x)| = \left| \frac{dw(x)}{dx} \right| = c |(x - a_1)^{\alpha_1 - 1} (x - a_2)^{\alpha_2 - 1} (x - a_n)^{\alpha_n - 1}|. \quad (150)$$

Для треугольника Π с единичной стороной и углами, составленными другими сторонами с ней, имеем [19]

$$w(x) = \frac{1}{B(\alpha_1, \alpha_2)} \int_0^x dz z^{\alpha_1 - 1} (1 - z)^{\alpha_2 - 1}, \quad -\infty < x < \infty, \quad w \in \Pi. \quad (151)$$

**ПРИЛОЖЕНИЕ
ЕДИНИЦЫ ИЗМЕРЕНИЯ,
ИМЕЮЩИЕ СОБСТВЕННЫЕ НАИМЕНОВАНИЯ,
И ИХ РАЗМЕРНОСТЬ В СИСТЕМЕ СИ**

Частота	герц	Гц	c^{-1}
Сила	ньютон	Н	$\text{мкг} \cdot c^{-2}$
Давление	паскаль	Па	$\text{Н} \cdot \text{м}^{-2}$
Энергия	джоуль	Дж	$\text{Н} \cdot \text{м}$
Мощность	ватт	Вт	$\text{Дж} \cdot c^{-1}$
Электрический заряд	кулон	Кл	$\text{А} \cdot c$
Сила тока	ампер	А	$\text{Кл} \cdot c^{-1}$
Напряжение	вольт	В	$\text{Вт} \cdot \text{А}^{-1}$
Электрическая емкость	фарад	Ф	$\text{Кл} \cdot \text{В}^{-1}$
Электрическое сопротивление	ом	Ом	$\text{В} \cdot \text{А}^{-1}$
Поток магнитной индукции	вебер	Вб	$\text{В} \cdot c$
Магнитная индукция	тесла	Тл	$\text{Вб} \cdot \text{м}^{-2}$
Индуктивность	генри	Гн	$\text{Вб} \cdot \text{А}^{-1}$

Заряд электрона $e = 4,8 \cdot 10^{-10}$ CGSE = $1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, его масса $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг, масса протона $M_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг. Постоянная Больцмана $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/град. Приведем полезные соотношения:

$$\Phi \cdot \text{Ом} = \text{Гн} / \text{Ом} = c; \quad \text{Гн} \cdot \Phi = c^2; \quad \text{Дж} = \text{Кл} \cdot \text{В}. \quad (152)$$

Приведем также принятые обозначения для множителей:

тера (Т)	10^{12}	санти (с)	10^{-2}
гига (Г)	10^9	милли (м)	10^{-3}
мега (М)	10^6	микро (мк)	10^{-6}
кило (к)	10^3	нано (н)	10^{-9}
гекто (г)	10^2	пико (п)	10^{-12}
дека (да)	10	фемто (ф)	10^{-15}
деци (д)	10^{-1}	атто (а)	10^{-18}

Для примера: 1) при $T = 300$ К находим $kT/e = 0,025$ В; 2) собственная частота контура, состоящего из индуктивности $L = 10^{-8}$ Гн и емкости $C = 2$ пФ, будет $f = 1/(2\pi\sqrt{LC}) = 1200$ МГц.

Благодарности. Автор благодарит Андрея Арбузова, Азада Ахмедова, Юрия Быстрицкого, Владимира Ваняшина, Ольгу Соловцову, Инну Криничную и др. Он также благодарен участникам семинара, проходившего 25 августа 2010 г. в ЛТФ ОИЯИ, за внимание и ряд критических замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962.
2. Вейль А. // Математика: Сб. М., 1969. Т. 13. С. 18–98;
Вейль А. Эллиптические функции по Эйзенштейну и Кронекеру. М.: Мир, 1978.
3. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. II, гл. IX. М.: Физматлит, 2003.
4. Дирихле П. Лекции по теории чисел. М.: УРСС, 2007.
5. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М., 1951.
6. Bartlett D. F., Monrooy J., Reeves J. // Phys. Rev. D. 1977. V. 16. P. 3459.
7. Леус В. А., Богач В. А. // Поиск математических закономерностей: Сб. Новосибирск: ИМ СО РАН, 1999.
8. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Мир, 1972.
9. Khuat-dug D., Leboeuf P. // Appl. Phys. Lett. 1999. V. 63. P. 1903.
10. Bethe H. // Astrophys. 1980. V. 421. P. 241.
11. Loiseau J.-F., Codaccioni J.-P., Caboz R. // Mathematics of Computation. 1988. V. 50. P. 501.
12. Эйтс С. Репьюниты и десятичные дроби. М.: Мир, 1992.
13. Рибенбойм П. // Успехи математических наук. 1982. Т. 42. С. 141.
14. Маршалл Т. Лазеры на свободных электронах. М.: Мир, 1987.

15. *Лебедев А. Н.* Лазеры на свободных электронах // Природа. 1984. №9. С. 28.
16. *Akhiezer A. I., Berestetskij V. B.* Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1981.
17. *Коган Ш.* Электронный шум и флуктуации в твердых телах. М.: Физматлит, 2009;
Ван Дер Зил А. Флуктуации в радиотехнике и физике. М.: Госэнергоиздат, 1958.
18. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1965.
19. *Сидоров Ю. В., Федорук М. В., Шабунин М. И.* Лекции по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1989.
20. *Рвачев В. Л.* Теория R -функции и некоторые ее приложения. Киев: Наук. думка, 1982;
Рвачев В. Л., Курпа Л. В. R -функции в задачах теории пластин. Киев: Наук. думка, 1982;
Кравченко В. Ф., Рвачев В. Л. Алгебра логики, атомарные функции и вейвлеты в физических приложениях. М.: Физматлит, 2006.
21. *Гарднер М.* Математические досуги. М.: Мир, 1972.
22. *Виноградов И. М.* Основы теории чисел. М.: Наука, 1981.
23. *Barbiery R., Mignaco J. A., Remitty E.* // Nuovo Cimento. A. 1972. V. 11. P. 824, 865.
24. *Lakdawala S., Mohr P.* // Phys. Rev. 1980. V. 22. P. 1572.

Получено 27 августа 2010 г.

Редактор *А. И. Петровская*

Подписано в печать 25.11.2010.

Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 2,5. Уч.-изд. л. 3,09. Тираж 415 экз. Заказ № 57171.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.

E-mail: publish@jinr.ru

www.jinr.ru/publish/