

P17-2011-56

Р. Г. Назмитдинов, А. В. Чижов

**КВАНТОВОЕ ПЕРЕПУТЫВАНИЕ  
В ДВУХЭЛЕКТРОННОЙ КВАНТОВОЙ ТОЧКЕ  
В МАГНИТНОМ ПОЛЕ**

Направлено в журнал «Оптика и спектроскопия»

Назмитдинов Р. Г., Чижов А. В.

P17-2011-56

Квантовое перепутывание в двухэлектронной квантовой точке  
в магнитном поле

Исследуются свойства квантового перепутывания основного состояния в точно решаемой модели двухэлектронной квантовой точки. Показано, что степень перепутанности возрастает с ростом взаимодействия между электронами независимо от формы потенциала запираения электронов в квантовой точке. Магнитное поле разрушает перепутывание электронов. Однако в деформированных квантовых точках перепутанность более устойчива к воздействию магнитного поля.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2011

Nazmitdinov R. G., Chizhov A. V.

P17-2011-56

Entanglement in a Two-Electron Quantum Dot  
in a Magnetic Field

Entanglement features of the ground state in an exactly solvable model of a two-electron quantum dot are analysed. It was found that a degree of entanglement increases with the interaction strength between electrons, irrespective of a shape of the confining potential in a quantum dot. The magnetic field destroys the entanglement of electrons. However, the entanglement in deformed quantum dots is more stable to the effect of the magnetic field.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2011

## ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время достаточно хорошо известно, что существуют физические ограничения на миниатюризацию полевых и биполярных транзисторов с использованием  $p$ - $n$ -переходов (см., например, [1]). Современные нанотехнологии, основанные на электронной и рентгеновской литографии, позволяют получать структуры размером от 10–100 нм и толщиной порядка 1–10 нм. Очевидно, что это создает принципиальные возможности для перехода к новой элементной базе вплоть до использования структур, состоящих из цепочки атомов (квантовые проволоки). Одним из важных достижений в этой области является создание квантовых ловушек, так называемых искусственных атомов, или квантовых точек (КТ).

КТ представляет собой потенциальную яму, созданную на границе раздела нескольких полупроводников с разным энергетическим расположением зон проводимости [2]. Например, при размещении слоя GaAs толщиной 10 нм между слоями AlGaAs (изоляторы) удастся создать «квантовый канал», по которому «течет» двумерный электронный газ. Двумерность обусловлена наличием размерного квантования в направлении оси  $z$  (толщина) и свободного движения электронов в плоскости  $xy$ . Если с помощью внешних электродов, расположенных на поверхности изоляторов, приложить внешнее напряжение, то этот газ пространственно локализуется в ограниченной области, т. е. в яме-ловушке. Так как длина свободного пробега электрона превышает пространственные размеры потенциальной ямы, имеет место квантование энергетических уровней в данной яме. Поэтому естественно, что физические свойства КТ определяются квантовой динамикой, обусловленной свойствами потенциальной ямы и электрон-электронного взаимодействия [3]. Современная нанотехнология позволяет контролировать число электронов, которые заселяют уровни потенциальной ямы согласно принципу Паули. Физические характеристики КТ, такие как ее размер и форма, также поддаются внешнему контролю, что позволяет управлять квантовым распределением электронов в яме-ловушке [4]. Квантовая природа КТ особенно ярко проявляется при низких температурах ( $\sim 100$  мК). При таких температурах проводимость системы подчиняется квантовым законам, изменяясь скачкообразным способом при каждом прохождении следующего электрона. Полная теория КТ пока

не сформулирована ввиду своей сложности. Тем не менее в настоящее время сложились некоторые базовые представления, основанные на прозрачных физических идеях и позволяющие успешно объяснить ряд экспериментальных данных. В первую очередь это относится к данным, извлекаемым с помощью одноэлектронной спектроскопии [4], позволяющей измерять проводимость КТ в квантовом режиме. В таких экспериментах КТ слабо связана с внешним миром, и для интерпретации данных можно оперировать моделями для закрытых систем. Физические наблюдаемые при этом определяются прежде всего электронными свойствами квазиизолированной КТ.

Очевидно, что описанные характеристики и возможность их внешнего контроля позволяют подробно исследовать явление перепутывания, которое может оказаться достаточно важным для различных приложений в области квантовой информационной технологии. Предметом данного сообщения является анализ степени перепутанности в двухэлектронной КТ в зависимости от силы межэлектронного взаимодействия и внешнего магнитного поля.

## 1. МОДЕЛЬ

Электронные свойства квазиизолированной КТ с небольшим числом электронов могут быть поняты в рамках относительно простых моделей. В этих моделях предполагается, что электроны движутся в эффективном потенциальном поле, возникшем в результате совместной динамики электрон-электронного взаимодействия и потенциальной ямы-ловушки. Кристаллическая структура полупроводникового материала, в котором локализуется КТ, учитывается посредством эффективной массы  $m^*$  для проводящих электронов. Для типичных значений электрического напряжения, приложенного к изолятору, глубина ямы-ловушки порядка нескольких электронвольт. Типичное среднее расстояние между квантовыми уровнями в яме-ловушке не превышает нескольких миллиэлектронвольт. При небольшом числе электронов, запертых в КТ, электронные волновые функции локализованы вблизи минимума потенциальной ямы. Согласно квантовой механике минимум потенциальной ямы (практически для любой функциональной формы) может быть хорошо аппроксимирован потенциалом гармонического осциллятора. Поэтому в настоящее время общепризнано, что в качестве эффективного потенциального поля для КТ с небольшим числом электронов можно использовать модель трехмерного гармонического осциллятора, в котором одна частота ( $\omega_z$ ) существенно превышает две другие частоты ( $\omega_x, \omega_y$ ).

Такое предположение является естественным, так как толщина слоя локализации КТ в несколько раз меньше размеров плоскости ее локализации. Следовательно, квантовое движение электрона значительно ограничено в вертикальном направлении ( $z$ ) по сравнению с его динамикой в плоскости ( $xy$ ).

В пользу таких моделей свидетельствуют, например, оптические эксперименты в инфракрасном диапазоне в магнитных полях. В частности, в этих экспериментах было найдено, что резонансные частоты не зависят от числа электронов в КТ [5] и могут быть ассоциированы с собственными модами гамильтониана модели, описывающей динамику электрона под действием внешнего магнитного поля в потенциале двумерного изотропного гармонического осциллятора [6]. Учитывая этот факт, можно проследить основные эффекты воздействия магнитного поля на КТ с малым числом электронов в рамках оболочечной модели, впервые предложенной в [7–9]. Несмотря на свою простоту, модель содержит основные элементы, свойственные для реалистических подходов, и позволяет проследить эффекты спонтанного нарушения симметрии КТ в магнитных полях.

Если учесть возможность использования внешнего перпендикулярного магнитного поля для управления свойствами КТ, то гамильтониан квази-изолированной двухэлектронной КТ можно записать в виде

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \quad (1)$$

В данной модели гамильтониан  $\hat{H}_0 = \sum_{i=1}^N \hat{h}_i$  характеризует динамику  $N = 2$  независимых электронов, каждый из которых описывается одночастичным гамильтонианом вида

$$\hat{h} = \frac{1}{2m^*} \left( \hat{\mathbf{p}} + \frac{e}{c} \hat{\mathbf{A}} \right)^2 + \frac{m^*}{2} (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2) + \mu^* \hat{\sigma}_z B.$$

Здесь используется симметричная калибровка  $\mathbf{A} = \mathbf{B} \times \mathbf{r}/2$ ,  $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ ,  $\sigma_z$  — матрица Паули. Отметим, что данная модель включает модель Фока [6] как частный случай. Мы не рассматриваем температурные эффекты. Такое приближение отвечает экспериментам при низких температурах ( $\sim 100$  мК), когда  $kT \ll \Delta$  ( $\Delta$  — среднее расстояние между квантовыми уровнями). Для КТ с небольшим числом электронов  $\Delta = \hbar \sqrt{\omega_x \omega_y} \approx 3$  мэВ. В качестве иллюстрации мы используем параметры для GaAs:  $m^* = 0,067 m_e$ ,  $\mu^* = g_L \mu_B$ ,  $g_L = 0,44$ ,  $\mu_B = e\hbar/(2m^*c)$ . Следует подчеркнуть, что магнитные орбитальные эффекты намного превышают спиновые эффекты (зеemanовское расщепление, определяемое членом  $\mu^* \sigma_z B$ ), поэтому в данном сообщении мы пренебрегаем зеemanовским членом.

Очевидно, что в свободном пространстве кулоновское взаимодействие между электронами определяет их пространственное поведение. В КТ межэлектронное взаимодействие может модифицироваться достаточно нетривиальным образом. Для аналитического рассмотрения проблемы мы используем модель Джонсона–Пейна [10] для эффективного взаимодействия электронов

в КТ, которое имеет следующий вид:

$$V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = V_0 - \lambda^2 \frac{m^*}{2} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2.$$

Введем координаты относительного движения (rel) и центра масс (CM)

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \quad \mathbf{R} = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2},$$

тогда полный гамильтониан (1) преобразуется к виду

$$\hat{H} = \hat{H}_{\text{rel}} + \hat{H}_{\text{CM}} + \hat{V}_0,$$

где

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{rel}} &= \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2\mu} + \frac{\mu}{2} [\omega_1^2 \hat{x}^2 + \omega_2^2 \hat{y}^2] + \omega_L \hat{L}_z, \\ \hat{H}_{\text{CM}} &= \frac{\hat{\mathbf{P}}^2}{2M} + \frac{M}{2} [\Omega_1^2 \hat{X}^2 + \Omega_2^2 \hat{Y}^2] + \omega_L \hat{L}_z \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \omega_{1,2}^2 &= \omega_{x,y}^2 + \omega_L^2 - 2\lambda^2, \quad \Omega_{1,2}^2 = \omega_{x,y}^2 + \omega_L^2, \\ \mu &= \frac{m^*}{2}, \quad M = 2m^*, \quad \omega_L = \frac{eB}{2m^*c}. \end{aligned}$$

С использованием стандартных операторов рождения и уничтожения для гармонического осциллятора гамильтонианы  $\hat{H}_{\text{rel}}$  и  $\hat{H}_{\text{CM}}$  преобразуются к виду

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{rel}} &= \hbar\omega_1(\hat{c}_1^\dagger \hat{c}_1 + 1/2) + \hbar\omega_2(\hat{c}_2^\dagger \hat{c}_2 + 1/2) - \\ &\quad - i\hbar g_1(\hat{c}_1^\dagger \hat{c}_2 - \hat{c}_2^\dagger \hat{c}_1) - i\hbar g_2(\hat{c}_1^\dagger \hat{c}_2^\dagger - \hat{c}_2 \hat{c}_1), \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{CM}} &= \hbar\Omega_1(\hat{C}_1^\dagger \hat{C}_1 + 1/2) + \hbar\Omega_2(\hat{C}_2^\dagger \hat{C}_2 + 1/2) - \\ &\quad - i\hbar G_1(\hat{C}_1^\dagger \hat{C}_2 - \hat{C}_2^\dagger \hat{C}_1) - i\hbar G_2(\hat{C}_1^\dagger \hat{C}_2^\dagger - \hat{C}_2 \hat{C}_1), \quad (3) \end{aligned}$$

где параметры взаимодействия определяются как

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{\omega_L}{2} \frac{\omega_1 + \omega_2}{\sqrt{\omega_1 \omega_2}}, & g_2 &= \frac{\omega_L}{2} \frac{\omega_1 - \omega_2}{\sqrt{\omega_1 \omega_2}}, \\ G_1 &= \frac{\omega_L}{2} \frac{\Omega_1 + \Omega_2}{\sqrt{\Omega_1 \Omega_2}}, & G_2 &= \frac{\omega_L}{2} \frac{\Omega_1 - \Omega_2}{\sqrt{\Omega_1 \Omega_2}}. \end{aligned}$$

Преобразования Боголюбова

$$\hat{a}_{\pm} = \sum_{m=1}^2 (A_m^{\pm} \hat{c}_m + B_m^{\pm} \hat{c}_m^{\dagger}), \quad \hat{b}_{\pm} = \sum_{m=1}^2 (F_m^{\pm} \hat{C}_m + D_m^{\pm} \hat{C}_m^{\dagger})$$

позволяют привести гамильтонианы (2), (3) к диагональному виду (см., например, [12])

$$\hat{H}_{\text{rel}} = \sum_{\pm} \hbar \omega_{\pm} (\hat{a}_{\pm}^{\dagger} \hat{a}_{\pm} + 1/2), \quad \hat{H}_{\text{CM}} = \sum_{\pm} \hbar \Omega_{\pm} (\hat{b}_{\pm}^{\dagger} \hat{b}_{\pm} + 1/2).$$

Собственные моды гамильтонианов  $\hat{H}_{\text{rel}}$  и  $\hat{H}_{\text{CM}}$  имеют вид

$$\begin{aligned} \omega_{\pm}^2 &= \frac{1}{2} [\omega_x^2 + \omega_y^2 + 4(\omega_L^2 - \lambda^2) \pm \\ &\quad \pm \sqrt{(\omega_x^2 - \omega_y^2)^2 + 8\omega_L^2(\omega_x^2 + \omega_y^2 + 2\omega_L^2 - 4\lambda^2)}], \\ \Omega_{\pm}^2 &= \frac{1}{2} [\omega_x^2 + \omega_y^2 + 4\omega_L^2 \pm \sqrt{(\omega_x^2 - \omega_y^2)^2 + 8\omega_L^2(\omega_x^2 + \omega_y^2 + 2\omega_L^2)}]. \end{aligned}$$

Пространственная составляющая полной волновой функции системы характеризуется набором из четырех квантовых чисел  $n_{\pm}$  и  $N_{\pm}$ :

$$|n_+ n_- N_+ N_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_+! n_-! N_+! N_-!}} (\hat{a}_+^{\dagger})^{n_+} (\hat{a}_-^{\dagger})^{n_-} (\hat{b}_+^{\dagger})^{N_+} (\hat{b}_-^{\dagger})^{N_-} |0000\rangle,$$

которые определяют полную энергию КТ

$$\begin{aligned} E &= \hbar \omega_+ (n_+ + 1/2) + \hbar \omega_- (n_- + 1/2) + \\ &\quad + \hbar \Omega_+ (N_+ + 1/2) + \hbar \Omega_- (N_- + 1/2). \end{aligned}$$

Полная волновая функция включает спиновую компоненту и имеет вид  $\Phi = |n_+ n_- N_+ N_-\rangle \chi_s$ .

## 2. КВАНТОВАЯ ПЕРЕПУТАННОСТЬ

Как правило, при небольших магнитных полях для взаимодействующих электронов низколежащие состояния определяются квантовыми числами относительного движения  $n_{\pm}$ , так как квантовые числа движения центра масс  $N_+ = N_- = 0$  [13].

В данной работе мы исследуем явление квантового перепутывания, обусловленное орбитальным движением электронов. В качестве примера рассматривается основное состояние КТ с квантовыми числами  $n_+ = n_- = 0$ , что

соответствует спиновому синглету с антисимметричной спиновой волновой функцией  $\chi_s$ . Для меры такого перепутывания мы используем логарифмическую отрицательность [14], которая связана с наличием отрицательных собственных значений у частично транспонированной (по отношению к одной из подсистем) матрицы плотности перепутанного состояния. В случае гауссовых состояний, к которым и относится рассматриваемое состояние, логарифмическая отрицательность полностью определяется характеризующей его матрицей дисперсий. Для двухэлектронного двумерного состояния матрица дисперсий имеет размерность  $8 \times 8$  и определяется соотношением

$$\gamma_{jk} = \frac{1}{\hbar} \text{Tr} (\hat{\rho} \hat{R}_j \hat{R}_k) - \frac{i}{2} \sigma_{jk}, \quad (4)$$

где операторный 8-мерный столбец  $\hat{R} = (\hat{x}_1, \hat{p}_{x1}, \hat{y}_1, \hat{p}_{y1}, \hat{x}_2, \hat{p}_{x2}, \hat{y}_2, \hat{p}_{y2})^T$  состоит из соответствующих проекций операторов координат и импульсов электронов,  $\hat{\rho}$  — матрица плотности орбитального движения электронов, а антисимметричная матрица  $\sigma$  имеет блочную структуру:

$$\sigma = \bigoplus_{j=1}^4 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда симплектический спектр частично транспонированной матрицы дисперсий  $\gamma^{T_1}$  (получаемой из матрицы (4) заменой  $\hat{p}_1 \rightarrow -\hat{p}_1$ ), который состоит из значений  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$  блочно-диагональной матрицы

$$-\sigma \gamma^{T_1} \sigma \gamma^{T_1} = \text{diag} (\xi_1, \xi_1, \xi_2, \xi_2, \xi_3, \xi_3, \xi_4, \xi_4),$$

определяет логарифмическая отрицательность по формуле

$$E_{\mathcal{N}} = - \sum_{j=1}^4 \log_2 (\min(1, 2\xi_j)). \quad (5)$$

Для анализа квантового перепутывания мы варьировали величину индукции магнитного поля  $B$ , степень деформации  $\omega_y/\omega_x$  и интенсивность межэлектронного взаимодействия  $\lambda$ . В расчетах максимальное значение индукции магнитного поля не превышает 1 Тл, что соответствует максимальному значению ларморовой частоты  $\omega_L \approx \omega_x$  для выбранных в работе частот конфайнмента электронов. Очевидно, что при использовании взаимодействия Джонсона–Пейна межэлектронное взаимодействие играет роль возмущения. Поэтому в наших расчетах сила взаимодействия определялась условием  $\lambda/\omega_x < 1$ . Как видно из рис. 1, при небольшой деформации системы увеличение межэлектронного взаимодействия в отсутствие магнитного поля приводит к заметному усилению перепутывания. Однако усиление магнитного



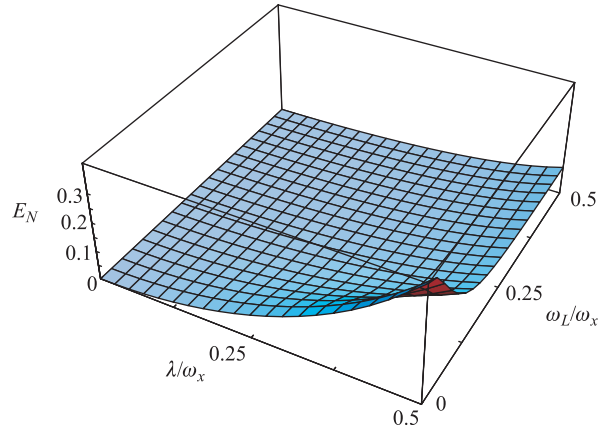


Рис. 1. Зависимость меры квантового перепутывания (логарифмической отрицательности (5)) орбитального движения электронов в основном состоянии КТ от индукции магнитного поля  $B$  (ларморовой частоты  $\omega_L$  в единицах  $\omega_x$ ) и от силы взаимодействия  $\lambda/\omega_x$  при  $\omega_y/\omega_x = 1,2$

поля разрушает перепутывание. При этом происходит эффективное усиление потенциала запираения, что приводит к ослаблению кулоновского взаимодействия (см., например, [15, 16]). Таким образом, чем сильнее потенциал запираения при фиксированном значении силы межэлектронного взаимодействия, тем слабее корреляционные эффекты. Для фиксированного значения взаимодействия (рис. 2) деформация КТ приводит к ослаблению перепутыва-

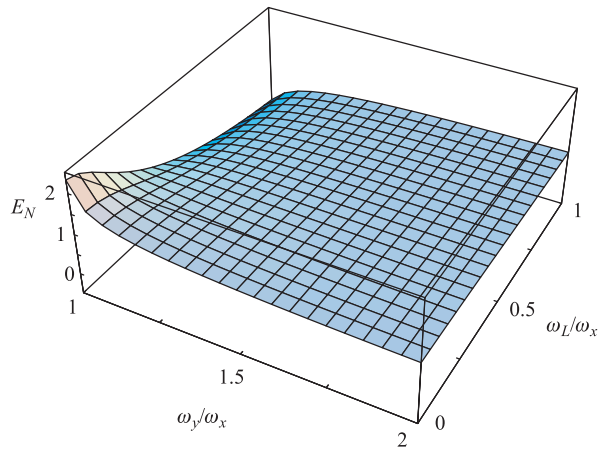


Рис. 2. То же, что и для рис. 1, в зависимости от степени деформации КТ ( $\omega_y/\omega_x$ ) при  $\lambda/\omega_x = 0,7$

ния. Отметим, что в отсутствие магнитного поля наши результаты находятся в качественном соответствии с расчетами меры перепутывания на основе энтропии фон Неймана для двухэлектронной КТ с кулоновским взаимодействием (см., например, [17]). Магнитное поле приводит к заметному разрушению перепутывания в осесимметричной КТ. Несмотря на то, что в деформированных КТ перепутывание ослаблено, оно более устойчиво к воздействию магнитного поля.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках простой аналитически решаемой модели проведен анализ степени квантового перепутывания для основного состояния двухэлектронной КТ в зависимости от интенсивности приложенного перпендикулярного магнитного поля и силы межэлектронного взаимодействия. В качестве меры перепутывания использовалась логарифмическая отрицательность [14]. Результаты нашего анализа показали, что степень перепутывания зависит от формы потенциала запираения: она максимальна для осесимметричной КТ при фиксированной интенсивности межэлектронного взаимодействия и убывает с ростом деформации. Магнитное поле приводит к разрушению перепутывания. Тем не менее в деформированных КТ степень перепутывания более устойчива к воздействию магнитного поля, чем в осесимметричных КТ.

Отметим, что рассмотренная модель может адекватно отражать физические характеристики самоорганизующих (self-assembled) КТ (см., например, [2]). В таких системах потенциальная энергия ямы-ловушки доминирует во всех физических процессах, а кулоновское взаимодействие играет роль малого возмущения. Поэтому в настоящее время идут интенсивные технологические исследования с целью отыскания сравнительно дешевого способа изготовления таких КТ и использования их свойств при комнатных температурах.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 11-02-00086) и гранта № FIS2008-00781/FIS (Испания).

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Гуртов В.* Твердотельная электроника. М.: Техносфера, 2006.
2. *Jacak L., Hawrylak P., Wojs A.* Quantum Dots. Berlin: Springer, 1998.
3. *Chakraborty T.* Quantum Dots: A Survey of the Properties of Artificial Atoms. Amsterdam: North-Holland, 1999.
4. *Kouwenhoven L. P., Austing D. G., Tarucha T.* // Rep. Prog. Phys. 2001. V. 64. P. 701.
5. *Sikorski Ch., Merkt U.* // Phys. Rev. Lett. 1989. V. 62. P. 2164.

6. *Fock V.* // *Z. Phys.* 1928. V. 47. P. 446.
7. *Heiss W. D., Nazmitdinov R. G.* // *Phys. Lett. A.* 1996. V. 222. P. 309.
8. *Heiss W. D., Nazmitdinov R. G.* // *Phys. Rev. B.* 1997. V. 55. P. 16310.
9. *Heiss W. D., Nazmitdinov R. G.* // *Письма в ЖЭТФ.* 1998. V. 68. P. 870.
10. *Johnson N. F., Payne M. C.* // *Phys. Rev. Lett.* 1991. V. 67. P. 1157.
11. *Tarucha S. et al.* // *Phys. Rev. Lett.* 1996. V. 77. P. 3613.
12. *Chizhov A. V., Nazmitdinov R. G.* // *Phys. Rev. A.* 2008. V. 78. P. 064302.
13. *Dineykhon M., Nazmitdinov R. G.* // *Phys. Rev. B.* 1997. V. 55. P. 13707.
14. *Vidal G., Werner R. F.* // *Phys. Rev. A.* 2002. V. 65. P. 032314.
15. *Dineykhon M., Nazmitdinov R. G.* // *J. Phys.: Condens. Matter.* 1999. V. 11. P. L83.
16. *Nazmitdinov R. G., Simonovic N. S., Rost J. M.* // *Phys. Rev. B.* 2002. V. 65. P. 155307.
17. *Košćik P., Okopińska A.* // *Phys. Lett. A.* 2010. V. 374. P. 3481.

Получено 17 июня 2011 г.

Редактор *Е. В. Сабаева*

Подписано в печать 15.09.2011.

Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 0,75. Уч.-изд. л. 0,89. Тираж 265 экз. Заказ № 57429.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований  
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.

E-mail: [publish@jinr.ru](mailto:publish@jinr.ru)

[www.jinr.ru/publish/](http://www.jinr.ru/publish/)