P2-2012-142

А. Б. Пестов [*]

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ. СПИНСТАТИКА И СПИНДИНАМИКА

[*] E-mail: pestov@theor.jinr.ru

Пестов А. Б. Р2-2012-142
Геометрическая теория фундаментальных взаимодействий.
Спинстатика и спиндинамика

Это сообщение содержит результаты единой геометрической теории фундаментальных взаимодействий, которые соответствуют физике микромира и организованы в форме двух разделов: спинстатика и спиндинамика. Предполагается, что закономерности микромира содержатся в одном простом отношении: все в концепции спиновой симметрии и концепция спиновой симметрии во всем. Геометрическая и физическая природа явлений микромира или спиновых явлений раскрывается в биполярной структуре спиновой симметрии, индуцированной гравитационным потенциалом. Дан дедуктивный вывод уравнений спинстатики и спиндинамики. Введены операторы электрического заряда и нейтринного заряда, позволяющие понять истинную природу нейтрино. Дано объяснение конфайнмента и кварк-лептонной симметрии. Установлено, что число поколений кварков и лептонов равно четырем.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2012

Pestov I. B. P2-2012-142
Geometric Theory of Fundamental Interactions.
Spinstatics and Spindynamics

The results of the unified geometrical theory of fundamental interactions that correspond to the physics of microworld are presented and organized in the form of two subdivisions: Spinstatics and Spindynamics. It is supposed that regularities of the microworld are in the relation: everything in the concept of spin symmetry and the concept of spin symmetry in everything. It is shown that geometrical and physical nature of the microworld phenomena or spin one is uncovered in the bipolar structure of spin symmetry induced by the gravitational potential. A deductive derivation of equations of Spinstatics and Spindynamics is given. Operators of the electric charge and neutrino charge are introduced, which give opportunity to understand real nature of the neutrino. An explanation of the confinement and quark–lepton symmetry is given. It is established that the number of the quark–lepton generations is equal to four.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2012

ВВЕДЕНИЕ

Согласно идее общего построения единой геометрической теории фундаментальных взаимодействий в этом разделе будет показано, как многообразие явлений микромира связано с гипотезой геометризации, которая предполагает, что все закономерности единой физики содержатся в одном отношении: все в понятии пространства и понятие пространства во всем. Необходимость локальной геометрической внутренней симметрии, названной спиновой симметрией, для введения понятия спинового поля и понимания сущности явлений микромира как спиновых явлений вытекает из гипотезы геометризации и концепции собственно геометрической полевой величины. Ключевой момент — это поляризация спиновой симметрии, производимая гравитационным полем. К следствиям относятся вывод уравнений спинстатики и спиндинамики, понимание сущности таких концепций Стандартной модели, как кварк, поколение кварков и лептонов, конфайнмент, кварк-лептонная симметрия, которое было бы невозможно без новой концепции времени. Установлена природа электрического заряда и нейтрино. Оператор электрического заряда определяется потоком времени, а оператор нейтринного заряда — ориентацией физического многообразия. В спиндинамике мы встречаемся с полем Янга–Миллса, существование и физический смысл которого определяются антикоммутирующими операторами электрического и нейтринного зарядов, с симметрией внутреннего спина, которая определяет новое взаимодействие и позволяет понять, почему у элементарных частиц отсутствует электрический дипольный момент. Продемонстрирована разрешимость частных задач уравнениями спиндинамики.

Содержание этого сообщения организовано следующим образом. В первом разделе введено понятие спинового поля и спиновой симметрии и доказана теорема о том, что алгебра Ли группы спиновой симметрии может быть построена из элементов алгебр Ли двух дуальных подгрупп полной линейной группы $GL(2^n, \mathbf{R})$. Эта теорема служит ключом к пониманию всего многообразия спиновых явлений или, что то же, явлений микромира. Во втором разделе выведены уравнения спинового поля, находящегося в абсолютном покое или вне времени. Этот раздел содержит все необходимое для построения динамической теории спиновых явлений, которая изложена в последующих разделах.

1. СПИНОВОЕ ПОЛЕ И ПОЛЯРИЗАЦИЯ СПИНОВОЙ СИММЕТРИИ

В абстрактном определении линейного пространства нет ничего, что указывало бы на существование выделенных размерностей такого рода пространств. Однако с геометрической точки зрения размерность 2^n определенно выделена. Действительно, биномиальная формула показывает, что $2^n = \sum\limits_{p=0}^{n} C_p^n$, где C_p^n обозначает число сочетаний из n по p. Ковариантное кососимметричное тензорное поле $a_{i_1 \cdots i_p}$ имеет C_p^n компонент. Таким образом, на n-мерном многообразии всегда существует линейное пространство размерности $N = 2^n$, построенное из собственно геометрических полевых величин. Общий элемент $\mathbf{A}$ этого пространства может быть представлен как 2^n-строка

$$\mathbf{A} = (a, a_{i_1}, a_{i_1 i_2}, \ldots, a_{i_1 \cdots i_n}). \tag{1}$$

Введенная в рассмотрение геометрическая полевая величина состоит из независимых блоков, и поэтому рассмотрение ее как единого целого возможно только с привлечением локальной геометрической внутренней симметрии, которая будет называться спиновой симметрией, но о которой нам ничего заранее не известно. Предварительно изучим возможные типы локальной геометрической внутренней симметрии в линейном пространстве ковекторных полей a_i. Существует только два вида общековариантных локальных преобразований внутренней симметрии, которые действуют в рассматриваемом линейном пространстве: $\overline{a}_i = L_i^k a_k$ и $\overline{a}_i = a_i + \partial_i \phi$, где L_j^i есть тензорное поле типа $(1,1)$ (линейный оператор). Обратимые преобразования первого типа образуют группу локальной внутренней симметрии $GL(n;\mathbf{R})$, а преобразования второго типа известны как калибровочные преобразования. Легко видеть, что группа локальных преобразований $GL(n;\mathbf{R})$ не является группой внешних автоморфизмов калибровочной группы и обратно. Поскольку группа $GL(n;\mathbf{R})$ нарушает отношение эквивалентности, определяемое калибровочной группой, то естественно разделить множество ковекторных полей на класс собственно ковекторных полей и класс дифференциальных форм. Первый образует пространство представления группы $GL(n;\mathbf{R})$, а дифференциальные формы образуют пространство представления группы калибровочных преобразований. Ясно, что общие калибровочные преобразования

$$\overline{a}_{i_1 \cdots i_p} = a_{i_1 \cdots i_p} + p\partial_{[i_1} \phi_{i_2 \cdots i_p]}$$

отображают p-форму в p-форму и, следовательно, не имеет смысла рассматривать 2^n-строку (1) как набор p-форм, так как калибровочные преобразования не объединяют рассматриваемый набор полей в единое целое. Та же самая ситуация имеет место, если рассматривать преобразования вида

$$\overline{a}_{i_1 \cdots i_p} = L_{i_1}^{j_1} \cdots L_{i_p}^{j_p} a_{j_1 \cdots j_p},$$

которые прямо следуют из алгебраической теории тензоров. Вывод состоит в том, что калибровочные преобразования и преобразования группы $GL(n;\mathbf{R})$ не позволяют решить обсуждаемую проблему, но указывают на следующий путь к ее решению. Если в последнюю формулу подставить оператор билатеральной симметрии, то при внимательном изучении можно заметить, что для 2^n-строки (1) преобразование этой симметрии можно представить в виде произведения двух операторов, каждый из которых связывает ее в единое целое. В последующем будет показано, как это осуществляется. Обобщая этот результат, вводим в рассмотрение группу локальных внутренних преобразований $GL(2^n;\mathbf{R})$, которая определяется следующим образом. Рассмотрим множество кососимметричных тензорных полей типа (p,q)

$$L^{i_1\cdots i_p}_{j_1\ldots j_q}, \quad (p,q=0,1,\cdots,n).$$

Геометрическое внутреннее преобразование (линейный оператор) в пространстве 2^n-строк (1), определяется уравнениями $\overline{\mathbf{A}} = L\mathbf{A}$, где $(L\mathbf{A})_{i_1\cdots i_p} = \overline{a}_{i_1\cdots i_p}$, $p=0,1,\ldots,n$ и

$$\overline{a}_{i_1\cdots i_p} = \sum_{q=0}^{n} \frac{1}{q!} L^{j_1\cdots j_q}_{i_1\cdots i_p} a_{j_1\cdots j_q}.$$

Здесь и в последующем будет удобно показывать только общий элемент $a_{i_1\cdots i_p}$ 2^n-строки (1), предполагая, что p пробегает значения от 0 до n. В соответствии с определением для произведения двух рассматриваемых преобразований имеем $N=LM$, где

$$N^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q} = \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{r!} L^{k_1\cdots k_r}_{j_1\cdots j_q} M^{i_1\cdots i_p}_{k_1\cdots k_r}.$$

Тождественное преобразование E определяется условиями

$$E^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q} = 0, \quad \text{если} \quad p \neq q, \quad E^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_p} = \delta^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_p},$$

где используются обобщенные символы Кронекера

$$a_{i_1\cdots i_p} = \frac{1}{p!}\delta^{j_1\cdots j_p}_{i_1\cdots i_p} a_{j_1\cdots j_p}.$$

Так определенные локальные внутренние преобразования образуют группу, упоминаемую как группа спиновой симметрии $GL(2^n,\mathbf{R})$, которая и позволяет рассматривать 2^n-строку (1) как новую геометрическую полевую величину, упоминаемую как спиновое поле. Спиновая симметрия позволяет рассматривать спиновое поле как единое целое, обладающее новым качеством. Сущность этого нового качества состоит в утверждении, что алгебра Ли $gl(2^n, \mathbf{R})$ группы $GL(2^n, \mathbf{R})$ имеет структуру прямого произведения алгебр Ли S_{li} $\widetilde{S}_{li}$ двух дуальных групп S и $\widetilde{S}$, определяемых гравитационным потенциалом.

Этим устанавливается биполярная структура спиновой симметрии и сущность спиновых явлений в их внутренней связи с гравитацией. Последовательность, которая ведет от гипотезы геометризации к теории спиновых явлений, включает в себя понятия физического многообразия, собственно геометрической полевой величины, локальной геометрической внутренней симметрии, гравитационного поля, спинового поля и спиновой симметрии с ее биполярной структурой. Спин есть поляризация группы спиновой симметрии $GL(2^n, \mathbf{R})$. Все остальное вытекает отсюда. Уравнения спинстатики и спиндинамики — это наблюдаемые проявления биполярной структуры, как и все остальное, о чем речь ниже.

Чтобы доказать сформулированное выше утверждение, построим естественный общековариантный базис в алгебре Ли $gl(2^n, \mathbf{R})$. Рассмотрим в пространстве спиновых полей (1) естественные алгебраические операторы $\overline{\mathbf{A}} = E_{\mathbf{v}}\mathbf{A}$ и $\overline{\mathbf{A}} = I_{\mathbf{v}}\mathbf{A}$, определяемые векторным полем v^i следующим образом:

$$E_{\mathbf{v}} : \bar{a}_{i_1 \cdots i_p} = p v_{[i_1} a_{i_2 \cdots i_p]}, \quad I_{\mathbf{v}} : \bar{a}_{i_1 \cdots i_p} = v^k a_{k i_1 \cdots i_p}, \quad p = 0, 1, \ldots, n,$$

где квадратные скобки $[\cdots]$ обозначают процесс альтернации и $v_i = g_{ij} v^j$. Для любых векторных полей v^i w^i имеем

$$I_{\mathbf{v}} E_{\mathbf{w}} + E_{\mathbf{w}} I_{\mathbf{v}} = (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \cdot E, \tag{2}$$

где $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = g_{ij} v^i w^j$. Чтобы доказать формулу (2), здесь и в последующем следует использовать очень полезное соотношение

$$(p+1) v_{[k} a_{i_1 \cdots i_p]} = v_k a_{i_1 \cdots i_p} - p a_{k[i_2 \cdots i_p} v_{i_1]}.$$

Отметим также очевидные равенства

$$E_{\mathbf{v}} E_{\mathbf{w}} + E_{\mathbf{w}} E_{\mathbf{v}} = 0, \quad I_{\mathbf{v}} I_{\mathbf{w}} + I_{\mathbf{w}} I_{\mathbf{v}} = 0.$$

Завершая набор необходимых конструктивных определений, введем числовой диагональный оператор Z, определяемый условиями

$$Z^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q} = 0, \quad \text{если} \quad p \neq q, \quad Z^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_p} = (-1)^p \delta^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_p}.$$

Из определения Z немедленно вытекают соотношения антикоммутации

$$E_{\mathbf{v}} Z + Z E_{\mathbf{v}} = 0, \quad I_{\mathbf{v}} Z + Z I_{\mathbf{v}} = 0, \quad Z^2 = E.$$

Введем фундаментальные операторы

$$Q_{\mathbf{v}} = E_{\mathbf{v}} - I_{\mathbf{v}}, \quad \widetilde{Q}_{\mathbf{v}} = (E_{\mathbf{v}} + I_{\mathbf{v}})Z,$$

определяющие биполярную структуру на группе спиновой симметрии $GL(2^n, \mathbf{R})$. Из определения основных операторов и (2) находим, что

$$Q_{\mathbf{v}}Q_{\mathbf{w}} + Q_{\mathbf{w}}Q_{\mathbf{v}} = -2(\mathbf{v},\mathbf{w}) \cdot E, \quad \widetilde{Q}_{\mathbf{v}}\widetilde{Q}_{\mathbf{w}} + \widetilde{Q}_{\mathbf{w}}\widetilde{Q}_{\mathbf{v}} = -2(\mathbf{v},\mathbf{w}) \cdot E \qquad (3)$$

и, следовательно,

$$Q^2_{\mathbf{v}} = \widetilde{Q}^2_{\mathbf{v}} = -(\mathbf{v},\mathbf{v})\, E = -v^2\, E.$$

Ключевым является соотношение

$$\widetilde{Q}_{\mathbf{v}}Q_{\mathbf{w}} = Q_{\mathbf{w}}\widetilde{Q}_{\mathbf{v}}, \qquad (4)$$

которое выполняется при любых $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$. Далее введем оператор

$$Q_{\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}} = \frac{1}{2}(Q_{\mathbf{v}}Q_{\mathbf{w}} - Q_{\mathbf{w}}Q_{\mathbf{v}}).$$

Легко проверить, что

$$Q^2_{\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}} = - \triangle \cdot E, \qquad (5)$$

где $\triangle$ есть определитель Грама:

$$\triangle = \begin{vmatrix} (\mathbf{v},\mathbf{v}) & (\mathbf{v},\mathbf{w}) \\ (\mathbf{v},\mathbf{w}) & (\mathbf{w},\mathbf{w}) \end{vmatrix}.$$

Конечно, такое же соотношение выполняется для оператора

$$\widetilde{Q}_{\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}} = \frac{1}{2}(\widetilde{Q}_{\mathbf{v}}\widetilde{Q}_{\mathbf{w}} - \widetilde{Q}_{\mathbf{w}}\widetilde{Q}_{\mathbf{v}}).$$

Последняя формула может быть обобщена следующим образом. Возьмем m ($m = 2, 3, \ldots, n$) линейно независимых векторных полей $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \cdots, \mathbf{z}$ и введем операторы, которые определяются как альтернированные произведения операторов $Q_{\mathbf{v}}, Q_{\mathbf{w}}, \ldots, Q_{\mathbf{z}}$ и $\widetilde{Q}_{\mathbf{v}}, \widetilde{Q}_{\mathbf{w}}, \ldots, \widetilde{Q}_{\mathbf{z}}$:

$$Q_{\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}\cdots\wedge\mathbf{z}} = \frac{1}{m!}(Q_{\mathbf{v}}Q_{\mathbf{w}} \ldots Q_{\mathbf{z}} - Q_{\mathbf{w}}Q_{\mathbf{v}} \ldots Q_{\mathbf{z}} + \ldots),$$
$$\widetilde{Q}_{\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}\cdots\wedge\mathbf{z}} = \frac{1}{m!}(\widetilde{Q}_{\mathbf{v}}\widetilde{Q}_{\mathbf{w}} \ldots \widetilde{Q}_{\mathbf{z}} - \widetilde{Q}_{\mathbf{w}}\widetilde{Q}_{\mathbf{v}} \ldots \widetilde{Q}_{\mathbf{z}} + \ldots).$$

Как видно, операторы $Q_{\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}\cdots\wedge\mathbf{z}}$ и $\widetilde{Q}_{\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}\cdots\wedge\mathbf{z}}$ коммутируют друг с другом и все их возможные произведения образуют вместе естественный общековариантный базис в алгебре Ли $gl(2^n, \mathbf{R})$ группы спиновой симметрии $GL(2^n, \mathbf{R})$).

Так как на n-мерном многообразии существует n линейно независимых векторных полей, то суммарное число линейно независимых операторов, определяемых этими векторными полями, равно $2^n \cdot 2^n$ (включая тождественный оператор E). Таким образом, наше утверждение доказано и в рассматриваемом линейном пространстве преобразования группы $GL(2^n, \mathbf{R})$ могут быть представлены в терминах собственно геометрических полевых величин. Следовательно, спиновая симметрия служит новой фундаментальной реализацией общей концепции локальной геометрической внутренней симметрии.

Как видно, построение необходимого общековариантного базиса невозможно без римановой метрики или гравитационного потенциала. Этим устанавливается внутренняя связь между спином и гравитационным полем. В последующем будут установлены новые важные проявления этой связи. Гравитационное поле выступает здесь как «призма», проходя через которую спиновая симметрия, подобно свету, поляризуется и становится наблюдаемой в форме операторов $Q_{\mathbf{v}}, \dots, Q_{\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}\cdots\wedge\mathbf{z}}$ на одном полюсе и операторов $\widetilde{Q}_{\mathbf{v}}, \dots, \widetilde{Q}_{\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}\cdots\wedge\mathbf{z}}$ на другом полюсе.

Чтобы представить поляризацию спиновой симметрии более наглядно, рассмотрим n линейно независимых векторных полей $\mathbf{v}_\mu$ $(\mu = 1, 2, \dots, n)$. Всегда возможно построить из этого набора векторных полей систему ортогональных единичных векторных полей $\mathbf{E}_\mu$ по отношению к данной метрике g_{ij}:

$$(\mathbf{E}_\mu, \mathbf{E}_\nu,) = g_{ij} E^i_\mu E^j_\nu = \delta_{\mu\nu},$$

где $\delta_{\mu\nu} = 0$, $\mu \neq \nu$, $\delta_{\mu\mu} = 1$, $\mu = 1, 2, \dots, n$ и E^i_μ являются функциями v^i_μ и g_{ij}. Обозначим операторы $Q_{\mathbf{E}_\mu}$ и $\widetilde{Q}_{\mathbf{E}_\mu}$ как Q_μ и $\widetilde{Q}_\mu$ соответственно и из (4) и (5) получим для них следующие соотношения:

$$Q_\mu Q_\nu + Q_\nu Q_\mu = -2\delta_{\mu\nu} \cdot E, \quad \widetilde{Q}_\mu \widetilde{Q}_\nu + \widetilde{Q}_\nu \widetilde{Q}_\mu = -2\delta_{\mu\nu} \cdot E, \quad \widetilde{Q}_\mu Q_\nu = Q_\nu \widetilde{Q}_\mu.$$

Введем, наконец, операторы

$$Q_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(Q_\mu Q_\nu - Q_\nu Q_\mu), \quad \widetilde{Q}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\widetilde{Q}_\mu \widetilde{Q}_\nu - \widetilde{Q}_\nu \widetilde{Q}_\mu).$$

Спиновая структура совершенно ясна из рассмотрения алгебр Ли подгрупп группы $GL(2^n, \mathbf{R})$, которые определяются следующим образом. Полагаем

$$K_\mu = \frac{1}{2} Q_\mu, \quad S_{\mu\nu} = \frac{1}{2} Q_{\mu\nu}, \quad \widetilde{K}_\mu = \frac{1}{2} \widetilde{Q}_\mu, \quad \widetilde{S}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \widetilde{Q}_{\mu\nu}$$

и получаем такие соотношения коммутации:

$$[K_\mu, K_\nu] = S_{\mu\nu}, \quad [S_{\mu\nu}, S_{\sigma\tau}] = \delta_{\mu\tau} S_{\sigma\nu} - \delta_{\sigma\nu} S_{\mu\tau} + \delta_{\mu\sigma} S_{\nu\tau} - \delta_{\nu\tau} S_{\sigma\mu},$$
$$[\widetilde{K}_\mu, \widetilde{K}_\nu] = \widetilde{S}_{\mu\nu}, \quad [\widetilde{S}_{\mu\nu}, \widetilde{S}_{\sigma\tau}] = \delta_{\mu\tau} \widetilde{S}_{\sigma\nu} - \delta_{\sigma\nu} \widetilde{S}_{\mu\tau} + \delta_{\mu\sigma} \widetilde{S}_{\nu\tau} - \delta_{\nu\tau} \widetilde{S}_{\sigma\mu},$$
$$[K_\mu, \widetilde{K}_\nu] = [K_\mu, \widetilde{S}_{\sigma\nu}] = 0, \quad [S_{\mu\nu}, \widetilde{K}_\sigma] = [S_{\mu\nu}, \widetilde{S}_{\sigma\tau}] = 0.$$

Как видно, эти коммутационные соотношения дают два общековариантных двузначных представления группы конформных преобразований сферы S^{n-1}.

Введем положительно определенное, симметричное скалярное произведение $(\mathbf{A}|\mathbf{B})$ в рассматриваемом линейном пространстве следующим образом:

$$(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} a_{i_1 \cdots i_p} b_{j_1 \cdots j_p} g^{i_1 j_1} \cdots g^{i_p j_p}, \quad (\mathbf{A}|\mathbf{B}) = (\mathbf{B}|\mathbf{A}), \quad (\mathbf{A}|\mathbf{A}) > 0, \tag{6}$$

$(\mathbf{A}|\mathbf{A}) = 0$, если $\mathbf{A} = \mathbf{0}$. Скалярное произведение устанавливает отношение эквивалентности в пространстве спиновых полей, позволяя разбить множество спиновых полей на классы эквивалентности. Два спиновых поля принадлежат одному классу эквивалентности, если $(\mathbf{A}|\mathbf{A}) = (\mathbf{B}|\mathbf{B})$. Классы эквивалентности определяются группой симметрии скалярного произведения. Скалярное произведение (6) инвариантно по отношению к преобразованиям $\overline{\mathbf{A}} = L\mathbf{A}$, если $\widetilde{L}L = E$, где $\widetilde{L}$ есть транспонированный оператор по отношению к метрике g_{ij}:

$$\widetilde{L}^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q} = g^{i_1 k_1} \cdots g^{i_p k_p} L^{l_1 \cdots l_q}_{k_1 \cdots k_p} g_{j_1 l_1} \cdots g_{j_q l_q}.$$

Легко показать, что $\widetilde{LM} = \widetilde{M}\widetilde{L}$. Отметим также важные соотношения

$$(\mathbf{A}|Q_{\mathbf{v}}\mathbf{B}) = -(Q_{\mathbf{v}}\mathbf{A}|\mathbf{B}), \quad (\mathbf{A})|\widetilde{Q}_{\mathbf{v}}\mathbf{B}) = -(\widetilde{Q}_{\mathbf{v}}\mathbf{A}|\mathbf{B}),$$

которые показывают, что операторы $Q_{\mathbf{v}}$ и $\widetilde{Q}_{\mathbf{v}}$ являются антисамосопряженными относительно введенного скалярного произведения.

Рассматриваются действительные спиновые поля, поскольку для введения комплексных спиновых полей пока нет абсолютно никаких оснований. Как известно, все еще не существует глубокого понимания роли мнимой единицы $(i = \sqrt{-1})$ в физике, поэтому комплексификация без достаточного основания не представляет никакого интереса. Поскольку

$$(\mathbf{A}|Q_{\mu}\mathbf{B}) = -(Q_{\mu}\mathbf{A}|\mathbf{B}), \quad (\mathbf{A}|\widetilde{Q}_{\mu}\mathbf{B}) = -(\widetilde{Q}_{\mu}\mathbf{A}|\mathbf{B}),$$
$$(\mathbf{A}|Q_{\mu\nu}\mathbf{B}) = -(Q_{\mu\nu}\mathbf{A}|\mathbf{B}), \quad (\mathbf{A}|\widetilde{Q}_{\mu\nu}\mathbf{B})) = -(\widetilde{Q}_{\mu\nu}\mathbf{A}|\mathbf{B}),$$

то скалярное произведение (2) инвариантно относительно преобразований $\bar{\mathbf{A}} = L\mathbf{A}$, $\bar{\mathbf{A}} = \widetilde{L}\mathbf{A}$, где

$$L = \exp\left(K_{\mu}\omega^{\mu} + \frac{1}{2}S_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}\right), \quad \widetilde{L} = \exp\left(\widetilde{K}_{\mu}\widetilde{\omega}^{\mu} + \frac{1}{2}\widetilde{S}_{\mu\nu}\widetilde{\omega}^{\mu\nu}\right)$$

и $\omega^{\mu}, \omega^{\mu\nu}, \widetilde{\omega}^{\mu}, \widetilde{\omega}^{\mu\nu}$ есть набор действительных скалярных полей.

Таким образом, в единой физике спин возникает как поляризация спиновой симметрии, которая характеризуется двумя наборами коммутирующих операторов $Q_{\mathbf{v}}, \ldots, Q_{\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}\cdots\wedge\mathbf{z}}$ и $\widetilde{Q}_{\mathbf{v}}, \ldots, \widetilde{Q}_{\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}\cdots\wedge\mathbf{z}}$. Поляризация спиновой симметрии дает естественный способ вывода уравнений спинового поля.

2. СПИНСТАТИКА

Здесь рассматриваются естественные общековариантные дифференциальные операторы первого порядка, определяемые биполярной структурой спиновой симметрии. Эти дифференциальные операторы позволяют развить полную рациональную теорию спиновых явлений, ядром которой служат уравнения спинстатики и спиндинамики. Первый порядок уравнений свидетельствует о том, что они соответствуют уравнениям Гамильтона. В последующем эта параллель будет продолжена введением симплектической структуры в теорию спинового поля. В данном разделе сформулирована теория спинового поля вне времени (спинстатика). В этом случае физическое многообразие не имеет причинной структуры и не возникает проблемы динамики или проблемы времени, его размерность равна трем, однако там, где это возможно, рассмотрение ведется в любой размерности. Такая практика нацелена на более глубокое понимание выделенности нужной размерности. Сущность статики, в частности спинстатики, состоит в том, чтобы установить законы начальных условий, включая тем самым начальные условия в рамки математического и физического исследования. Физическое пространство с причинной структурой и динамическая теория спинового поля (спиндинамика) будут сформулированы вслед за спинстатикой. Раздел, посвященный спинстатике, можно рассматривать и как независимое исследование, и как базис для спиндинамики.

Пусть ∇_i есть ковариантная производная по отношению к связности, принадлежащей римановой метрике g_{ij}. Символы Кристоффеля этой связности равны

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{il}(\partial_j g_{kl} + \partial_k g_{jl} - \partial_l g_{jk}).$$

Очевидное соответствие между v_i и ∇_i (v^i и $\nabla^i = g^{ij}\nabla_j$) дает возможность ввести два естественных общековариантных дифференциальных оператора для спинового поля как прямое проявление поляризации спиновой симметрии:

$$D = Q_\nabla, \quad \widetilde{D} = \widetilde{Q}_\nabla,$$

$$(D\mathbf{A})_{i_1 i_2 \cdots i_p} = p\nabla_{[i_1} a_{i_2 \cdots i_p]} - \nabla^l a_{l i_1 i_2 \cdots i_p},$$

$$(\widetilde{D}\mathbf{A})_{i_1 i_2 \cdots i_p} = (-1)^{p+1}(p\nabla_{[i_1} a_{i_2 \cdots i_p]} + \nabla^l a_{l i_1 i_2 \cdots i_p}).$$

Эти дифференциальные дуальные операторы наследуют свойство (4)

$$D\widetilde{D} = \widetilde{D}D.$$

Биполярная структура спиновой симметрии реализуется в форме двух общековариантных уравнений для действительного спинового поля. Уравнение

$$D\mathbf{A} = m\mathbf{A} \tag{7}$$

и дуальное уравнение
$$\widetilde{D}\mathbf{A} = m\mathbf{A} \tag{8}$$
устанавливают отношения эквивалентности в пространстве спиновых полей и определяемые ими подгруппы группы спиновой симметрии. Уравнения (7) и (8) представляют биполярную структуру спиновой симметрии и описывают различные физические ситуации, дуальные друг другу (понятие дуальности). Уравнение $D\mathbf{A} = m\mathbf{A}$ характеризует один мир спиновых явлений, тогда как уравнение $\widetilde{D}\mathbf{A} = m\mathbf{A}$ характеризует дуальный мир. В соответствии с понятием дуальности строится все последующее изложение. Как и поляризация света, дуальность приобретает конкретное содержание, если указан оператор, устанавливающий связь между двумя дуальными величинами. Например, известно, что правополяризованный свет становится левополяризованным при отражении. Операторы сопряжения X и Y, характеризующие и обосновывающие понятие дуальности, аналогичны оператору Z и определяются следующим образом:

$$X^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q} = 0, \quad \text{если} \quad p \neq q, \quad X^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_p} = (-1)^{\frac{p(p-1)}{2}}\delta^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_p},$$
$$Y^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q} = 0, \quad \text{если} \quad p \neq q, \quad Y^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_p} = (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}}\delta^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_p}.$$

Из определения операторов X, Y, Z следует, что они коммутируют друг с другом и для них выполняются следующие соотношения:

$$X\,Y\,Z = E, \quad X^2 = Y^2 = Z^2 = E, \quad \widetilde{Q}_{\mathbf{v}} = -YQ_{\mathbf{v}}Y, \quad \widetilde{Q}_{\mathbf{v}} = XQ_{\mathbf{v}}X.$$

Операция сопряжения X устанавливает связь между решениями уравнений (7) и (8). Если спиновое поле $\mathbf{A}$ удовлетворяет уравнению (7), то сопряженное ему поле $\widetilde{\mathbf{A}} = X\mathbf{A}$ будет удовлетворять уравнению (8). Это следует из соотношений
$$\widetilde{D}Y + YD = 0, \quad \widetilde{D}X = DX.$$
В спиндинамике обсуждение принципа дуальности будет продолжено в новых условиях.

Имеют место два важных тождества

$$(\mathbf{A}|D\mathbf{B}) - (\mathbf{B}|D\mathbf{A}) = \nabla_k T^k(\mathbf{B},\,\mathbf{A}), \quad (\mathbf{A}|\widetilde{D}\mathbf{B}) - (\mathbf{B}|\widetilde{D}\mathbf{A}) = \nabla_k \widetilde{T}^k(\mathbf{B},\,\mathbf{A}). \tag{9}$$

Компоненты векторных полей $T^k(\mathbf{B},\mathbf{A})$ и $\widetilde{T}^k(\mathbf{B},\mathbf{A})$ даются выражениями

$$T^k(\mathbf{B},\,\mathbf{A}) = \sum_{p=0}^{n}\frac{1}{p!}(b_{i_1\cdots i_p}a^{ki_1\cdots i_p} - a_{i_1\cdots i_p}b^{ki_1\cdots i_p}),$$
$$\widetilde{T}^k(\mathbf{B},\,\mathbf{A}) = \sum_{p=0}^{n}\frac{(-1)^p}{p!}(b_{i_1\cdots i_p}a^{ki_1\cdots i_p} - a_{i_1\cdots i_p}b^{ki_1\cdots i_p}),$$

которые задают отображения пары спиновых полей на векторное поле. Эти отображения будут называться косыми произведением спиновых полей, так как

$$T^k(\mathbf{B},\,\mathbf{A}) = -T^k(\mathbf{A},\,\mathbf{B}), \quad \widetilde{T}^k(\mathbf{B},\,\mathbf{A}) = -\widetilde{T}^k(\mathbf{A},\,\mathbf{B}).$$

Основное свойство косых произведений спиновых полей выражается соотношениями

$$v_k T^k(\mathbf{A},\,\mathbf{B}) = (Q_{\mathbf{v}}\mathbf{A}|\mathbf{B}), \quad v_k \widetilde{T}^k(\mathbf{A},\,\mathbf{B}) = (\widetilde{Q}_{\mathbf{v}}\mathbf{A}|\mathbf{B}),$$

которые устанавливают важную связь между дуальными косыми произведениями спиновых полей и скалярным произведением. Так как

$$(\widetilde{Q}_{\mathbf{v}}\widetilde{\mathbf{A}}|\widetilde{\mathbf{B}}) = (X\widetilde{Q}_{\mathbf{v}}X\mathbf{A}|\mathbf{B}) = (Q_{\mathbf{v}}\mathbf{A}|\mathbf{B}),$$

отсюда следует, что

$$\widetilde{T}^k(\widetilde{\mathbf{A}},\,\widetilde{\mathbf{B}}) = T^k(\mathbf{A},\,\mathbf{B}).$$

Как видно, линейные дифференциальные операторы D и $\widetilde{D}$ самосопряженные и $\nabla_i T^i = 0$, если $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ есть решения уравнений спинстатики (и то же самое для $\nabla_i \widetilde{T}^i$). Параметр m есть тогда собственное значение самосопряженного оператора. Если m есть собственное значение, то $-m$ также будет собственным значением, поскольку существует оператор Z.

Из (9) следует, что уравнения спинстатики (7) и (8) находятся в сфере действия вариационного принципа с лагранжианами

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\mathbf{A}|D\mathbf{A}) - \frac{m}{2}(\mathbf{A}|\mathbf{A}), \quad \widetilde{\mathcal{L}} = \frac{1}{2}(\mathbf{A}|\widetilde{D}\mathbf{A}) + \frac{m}{2}(\mathbf{A}|\mathbf{A}).$$

Ясно, что $\mathcal{L} = 0$, если $\mathbf{A}$ есть решение уравнения (7), и то же самое для $\widetilde{\mathcal{L}}$.

Рассмотрим общую характеристику подгрупп группы спиновой симметрии, которые определяются уравнениями (7) и (8). Вообще говоря, операторы $\widetilde{Q}_{\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}\wedge\cdots\mathbf{z}}$ могут коммутировать с оператором D и то же самое имеет место для пары $\widetilde{D}$, $Q_{\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}\wedge\cdots\mathbf{z}}$. Напомним характеристическое уравнение $\widetilde{Q}_{\mathbf{v}}Q_{\mathbf{w}} = Q_{\mathbf{w}}\widetilde{Q}_{\mathbf{v}}$. Очевидно, что

$$D\widetilde{Q}_{\mathbf{v}} = \widetilde{Q}_{\mathbf{v}}D, \quad \widetilde{D}Q_{\mathbf{v}} = Q_{\mathbf{v}}\widetilde{D},$$

если $\nabla_i v_j = 0$. Это условие очень жестко ограничивает класс римановых пространств. Например, уравнение $\nabla_i v_j = 0$ имеет только тривиальное решение в римановых пространствах постоянной кривизны. В связи с этим можно изменить постановку задачи следующим образом. Для пары v_i, g_{ij} требуется найти связность $\breve{\Gamma}^i_{jk}$ такую, что по отношению к этой связности v_i и g_{ij} обладают абсолютным параллелизмом, т. е.

$$\breve{\nabla}_i v_j = 0, \quad \breve{\nabla}_i g_{jk} = 0,$$

где $\breve{\nabla}_i$ есть ковариантная производная в этой связности. Нетрудно убедиться, что поставленным условиям удовлетворяет связность

$$\breve{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + v^i \nabla_j v_k - v_k \nabla_j v^i, \quad (\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 1.$$

Обобщение собственно римановой геометрии состоит здесь в том, что каждой кривой ставится в соответствие не только ее длина, но и циркуляция, определяемая криволинейным интегралом $I = \int v_i du^i$. Если определить основные дифференциальные операторы спинстатики с помощью новой связности, то это будет сопряжено с введением нового поля и выводом уравнений этого поля. Такое обобщение не имеет достаточного основания в спинстатике, но приобретает фундаментальное значение в спиндинамике и, конечно, представляет математический интерес.

Рассмотрим далее операторы вида $Q_{\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}}$, $\widetilde{Q}_{\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}}$. Операторы этого класса генерируются кососимметричными тензорными полями $v_i w_j - v_j w_i$, которые называются простыми. Рассмотрим общее кососимметричное тензорное поле S_{ij}. Дуальные спиновые операторы, генерируемые этим полем, обозначим соответственно Σ и $\widetilde{\Sigma}$. Компонентное представление этих операторов имеет вид

$$(\Sigma\mathbf{A})_{i_1\cdots i_p} = \frac{p(p-1)}{2} S_{[i_1 i_2} a_{i_3\cdots i_p]} - \frac{1}{2} S^{kl} a_{kli_1\cdots i_p} + pS_{k[i_1} a^k_{\cdot i_2\cdots i_p]},$$
$$(\widetilde{\Sigma}\mathbf{A})_{i_1\cdots i_p} = -\frac{p(p-1)}{2} S_{[i_1 i_2} a_{i_3\cdots i_p]} + \frac{1}{2} S^{kl} a_{kli_1\cdots i_p} + pS_{k[i_1} a^k_{\cdot i_2\cdots i_p]}.$$

Имеем

$$D\widetilde{\Sigma} = \widetilde{\Sigma} D, \quad \widetilde{D} = Q_{\mathbf{S}} \widetilde{D},$$

если

$$\nabla_i S_{jk} = 0.$$

Ожидалось, что коммутаторы спиновых и дифференциальных операторов будут содержать выражения вида

$$\nabla_i S_{jk} + \nabla_j S_{ki} + \nabla_k S_{ij}, \quad \nabla^k S_{ik},$$

однако наряду с ними появилось также выражение вида $\nabla_i S_{jk} - \nabla_j S_{ki} - \nabla_k S_{ij}$. Уравнения $\nabla_i S_{jk} = 0$ в размерности три сводятся к уравнениям вида $\nabla_i v_j = 0$ и, следовательно, не представляют интереса. В размерности четыре ситуация другая, и она будет обсуждаться в свое время.

Уравнения спинстатики (7) и (8), будучи записанными в компонентной форме, выглядят очень асимметричными, но в размерности $n = 3$ их можно записать в симметричном виде. Полагаем в этом случае $a = \alpha$, $a_{ijk} = -e_{ijk}\beta$, $a_{ij} = e_{ijk} b^k$ и, используя формализм обычного векторного анализа в общековариантной форме, получаем следующую систему уравнений спинстатики:

$$
\begin{aligned}
-\operatorname{div}\mathbf{a} &= m\,\alpha,\\
-\operatorname{div}\mathbf{b} &= m\,\beta,\\
\operatorname{rot}\mathbf{a} + \operatorname{grad}\beta &= m\,\mathbf{b},\\
\operatorname{rot}\mathbf{b} + \operatorname{grad}\alpha &= m\,\mathbf{a}.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Дуальное уравнение (8) принимает такой вид:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}\mathbf{a} &= m\,\alpha,\\
\operatorname{div}\mathbf{b} &= m\,\beta,\\
\operatorname{rot}\mathbf{a} - \operatorname{grad}\beta &= m\,\mathbf{b},\\
\operatorname{rot}\mathbf{b} - \operatorname{grad}\alpha &= m\,\mathbf{a}.
\end{aligned}
$$

Таким образом, основные уравнения спинстатики выведены.

Рассмотрим еще одно очень важное проявление биполярной структуры. Когда число векторных полей равно размерности физического многообразия, можно положить $\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}\cdots\wedge\mathbf{z}=\mathbf{e}$, где $\mathbf{e}$ есть кососимметричный тензор $e_{i_1\cdots i_n}$. Полагаем в этом случае

$$Q_{\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}\cdots\wedge\mathbf{z}} = H, \quad \widetilde{Q}_{\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}\cdots\wedge\mathbf{z}} = \widetilde{H}.$$

Как и выше, для операторов H и $\widetilde{H}$ имеем

$$D\widetilde{H} = \widetilde{H}D, \quad \widetilde{D}H = H\widetilde{D},$$

если $\nabla_k e_{i_1\cdots i_n} = 0$. Последнее уравнение удовлетворяется, если $e_{i_1\cdots i_n}$ есть ориентация физического многообразия («элемент объема»), нормированная как $e_{1\cdots n} = \sqrt{g}$. Запишем дуальные операторы, определяемые ориентацией физического многообразия, в компонентной форме

$$
\begin{aligned}
(H\mathbf{A})_{i_1\cdots i_p} &= \frac{(-1)^n}{(n-p)!}(-1)^{\frac{(n-p)(n-p+1)}{2}} e_{i_1\cdots i_p j_1\cdots j_{n-p}} a^{j_1\cdots j_{n-p}},\\
(\widetilde{H}\mathbf{A})_{i_1\cdots i_p} &= \frac{(-1)^n}{(n-p)!}(-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} e_{i_1\cdots i_p j_1\cdots j_{n-p}} a^{j_1\cdots j_{n-p}}
\end{aligned}
$$

и выведем следующие соотношения:

$$
\begin{gathered}
H^2 = \widetilde{H}^2 = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}E, \quad HZ = (-1)^n ZH, \quad \widetilde{H}Z = (-1)^n Z\widetilde{H},\\
HQ_{\mathbf{v}} + (-1)^n Q_{\mathbf{v}}H = 0, \quad \widetilde{H}\widetilde{Q}_{\mathbf{v}} + (-1)^n\widetilde{Q}_{\mathbf{v}}\widetilde{H} = 0.
\end{gathered}
$$

Очевидно, что

$$HD + (-1)^n DH = 0, \quad \widetilde{H}\widetilde{D} + (-1)^n\widetilde{D}\widetilde{H} = 0.$$

Так как

$$\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} a^{i_1\cdots i_p} b_{i_1\cdots i_p} = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{(n-p)!} a^{i_1\cdots i_{n-p}} b_{i_1\cdots i_{n-p}},$$
$$e_{i_1\cdots i_{n-p} j_1\cdots j_p} = (-1)^{p(n-p)} e_{j_1\cdots j_p i_1\cdots i_{n-p}},$$
$$\frac{p(p+1)}{2} + p(n-p) + \frac{(n-p)(n-p+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2},$$

имеют место следующие соотношения:

$$(\mathbf{A}|H\mathbf{B}) = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} (H\mathbf{A}|\mathbf{B}), \quad (\mathbf{A}|\widetilde{H}\mathbf{B}) = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} (\widetilde{H}\mathbf{A}|\mathbf{B}).$$

Также отметим, что

$$(\widetilde{H}H\mathbf{A})_{i_1\cdots i_p} = (-1)^{p(n+1)} a_{i_1\cdots i_p}$$

и, следовательно,

$$\widetilde{H}H = H\widetilde{H} = Z$$

для четной размерности и

$$\widetilde{H}H = H\widetilde{H} = E$$

для нечетной размерности. В случае $n = 3$ имеем $H^2 = E$, $\widetilde{H}^2 = E$, $H = \widetilde{H}$ и, следовательно, имеется два состояния с ориентационной четностью, равной ± 1. Для $\widetilde{H}A = A$ имеем $\alpha = \beta$, $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ и в другом случае $\alpha = -\beta$, $\mathbf{a} = -\mathbf{b}$. Как видно, все явления спинстатики описываются уравнениями

$$-\operatorname{div}\mathbf{a} = m\,\alpha,$$
$$\operatorname{rot}\mathbf{a} + \operatorname{grad}\alpha = m\,\mathbf{a}$$

или дуальными уравнениями

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = m\,\alpha,$$
$$\operatorname{rot}\mathbf{a} - \operatorname{grad}\alpha = m\,\mathbf{a}.$$

Дополним уравнения спинстатики уравнениями Эйнштейна

$$G_{ij} = T_{ij},$$

где $G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij}$ есть тензор Эйнштейна и T_{ij} может быть найден из соотношений $\delta\mathcal{L} = \frac{1}{2} T_{ij} \delta g^{ij}$ или дуальных соотношений $\delta\widetilde{\mathcal{L}} = \frac{1}{2} \widetilde{T}_{ij} \delta g^{ij}$. Уравнения Эйнштейна имеют нетривиальные решения, если $T_{ij} \neq 0$, так как в размерности $n = 3$ тензор кривизны $R^k_{ijl} = 0$, если равен нулю тензор Эйнштейна, $G_{ij} = 0$.

3. СПИНДИНАМИКА

Переход от спинстатики к теории динамических спиновых явлений естественно начать с изучения результатов замены в основных формулах спинстатики положительно определенной римановой метрики вспомогательной метрикой лоренцевой сигнатуры:

$$\overline{g}_{ij} = 2t_i t_j - g_{ij}, \quad \overline{g}^{ij} = 2t^i t^j - g^{ij},$$

которая упоминается как причинная структура, так как она обеспечивает переход от уравнений статики к уравнениям спиндинамики. Рассмотрим индефинитное скалярное произведение в спиновом пространстве, которое определяется вспомогательной метрикой

$$\langle \mathbf{A}|\mathbf{B}\rangle = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} a_{i_1\cdots i_p} b_{j_1\cdots j_p} \overline{g}^{i_1 j_1} \cdots \overline{g}^{i_p j_p}. \tag{11}$$

Поскольку $\overline{g}^{ij} = R^j_k g^{ik}$, получаем такое соотношение между основным и вспомогательным скалярными произведениями:

$$\langle \mathbf{A}|\mathbf{B}\rangle = (\mathbf{A}|R\mathbf{B}) = -(\mathbf{A}|Q_{\mathbf{t}}\widetilde{Q}_{\mathbf{t}}\mathbf{B}) = (Q_{\mathbf{t}}\mathbf{A}|\widetilde{Q}_{\mathbf{t}}\mathbf{B}) = (\widetilde{Q}_{\mathbf{t}}\mathbf{A}|Q_{\mathbf{t}}\mathbf{B}), \tag{12}$$

где оператор

$$(R\mathbf{A})_{i_1\cdots i_p} = R^{j_1}_{i_1}\cdots R^{j_p}_{i_p} a_{j_1\cdots j_p} = (-1)^p (a_{i_1\cdots i_p} - 2pt^k a_{k[i_2\cdots i_p} t_{i_1]})$$

дает представление отражения в соответствии с алгебраической теорией тензоров, когда каждый p-вектор переводится в p-вектор. Понятие четности естественно связать с ориентацией пространственных сечений физического многообразия и инвариантностью физических явлений относительно изменения ориентации пространственного сечения. Статус спинового поля предполагает, что введение поля времени в спиндинамику можно связать также и с определяемыми потоком времени операторами $Q_{\mathbf{t}}$ и $\widetilde{Q}_{\mathbf{t}}$. Покажем, что это действительно так.

Принимая во внимание определение операторов $E_{\mathbf{v}}, I_{\mathbf{v}}$ и $Q_{\mathbf{v}}, \widetilde{Q}_{\mathbf{v}}$, последовательно получаем

$$R = Z(E - 2E_{\mathbf{t}}I_{\mathbf{t}}) = -Q_{\mathbf{t}}\widetilde{Q}_{\mathbf{t}} = Q_{-\mathbf{t}}\widetilde{Q}_{\mathbf{t}} = Q_{\mathbf{t}}\widetilde{Q}_{-\mathbf{t}}.$$

Таким образом, показано, что рассматриваемый оператор отражения есть произведение двух операторов, задаваемых потоком времени. Это именно те операторы, от которых ведет свое происхождение спиновая симметрия и которые позволяют по-новому трактовать билатеральную симметрию в случае спиновых полей, о чем говорилось выше, перед введением группы спиновой симметрии. Система двух спиновых полей $\mathbf{A}$ и $\overline{\mathbf{A}}$ обладает двухсторонней симметрией, если

$$\overline{\mathbf{A}} = Q_{\mathbf{t}}\mathbf{A}, \quad \mathbf{A} = Q_{-\mathbf{t}}\overline{\mathbf{A}}.$$

Как видно, в рассматриваемом случае важное значение приобретает направление потока времени. В дуальном случае двухсторонняя симметрия определяется соотношениями

$$\overline{\mathbf{A}} = \widetilde{Q}_{\mathbf{t}}\mathbf{A}, \quad \mathbf{A} = \widetilde{Q}_{-\mathbf{t}}\overline{\mathbf{A}}.$$

Эти соотношения означают, что нет внутренней причины, которая позволила бы отличать операторы $Q_{\mathbf{t}}$ и $-Q_{\mathbf{t}} = Q_{-\mathbf{t}}$. Это не противоречит сущности спинового поля и открывает для исследования кроме скалярного произведения (11) приведенные ниже скалярные произведения, позволяющие по-иному вводить поле времени в спиндинамику:

$$\langle \widetilde{Q}_{\mathbf{t}}\mathbf{A}|\mathbf{B}\rangle = (Q_{\mathbf{t}}\mathbf{A}|\mathbf{B}), \quad \langle Q_{\mathbf{t}}\mathbf{A}|\mathbf{B}\rangle = (\widetilde{Q}_{\mathbf{t}}\mathbf{A}|\mathbf{B}).$$

Будем устанавливать и исследовать возможные лагранжианы спинового поля в соответствии с введенными скалярными произведениями. Рассмотрим первый случай. Прежде всего решим вопрос об основных дифференциальных операторах спиндинамики. Недостаточно в основных дифференциальных операторах спинстатики просто заменить риманову метрику вспомогательной метрикой, так как поток времени не ковариантно постоянен в связности, принадлежащей метрике g_{ij}, $\nabla_i \overline{g}_{ij} \neq 0$. Введение связности

$$\overline{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + 2t^i \nabla_j t_k$$

также неудовлетворительно, поскольку вспомогательная метрика ковариантно постоянна в этой связности, однако поток времени не является ковариантно постоянным в этой связности, $\overline{\nabla}_i t_j \neq 0$. В связности

$$\widetilde{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + t^i \nabla_j t_k - t_j \nabla_k t^i - t_k \nabla_j t^i$$

наблюдается обратная картина, поскольку поток времени ковариантно постоянен в этой связности, однако для вспомогательной метрики это не выполняется. Всем условиям удовлетворяет связность

$$\breve{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + t^i \nabla_j t_k - t_k \nabla_j t^i,$$

конструкция которой была указана в спинстатике. Риманова метрика и поток времени ковариантно постоянны в этой связности и, следовательно, ковариантно постоянна в ней и вспомогательная метрика, поэтому поднятие и опускание индексов перестановочно с этим ковариантным дифференцированием, которое будет рассматриваться как основное в спиндинамике. Имеем, например,

$$\breve{\nabla}_i t_j = \nabla_i t_j - (t^l \nabla_i t_j - t_j \nabla_i t^l) t_l = \nabla_i t_j - \nabla_i t_j = 0,$$

так как $t^l t_l = 1$. Таким образом, основными дифференциальными операторами спиндинамики служат операторы Π и $\widetilde{\Pi}$, которые получаются из операторов D и $\widetilde{D}$ заменой римановой метрики на вспомогательную метрику и ковариантной производной ∇ на ковариантную производную $\breve{\nabla}$,

$$(\Pi\mathbf{A})_{i_1\cdots i_p} = p\breve{\nabla}_{[i_1} a_{i_2\cdots i_p]} + \breve{\nabla}^k a_{ki_1\cdots i_p} - 2t^k \breve{\nabla}_{\mathbf{t}} a_{ki_1\cdots i_p},$$

так как $\overline{g}^{kl}\breve{\nabla}_l = 2t^k\breve{\nabla}_{\mathbf{t}} - \breve{\nabla}^k$.

Рассмотрим сопряженные лагранжианы

$$\mathcal{L}_{\mathbf{t}} = \frac{1}{2}\langle \mathbf{A}|\Pi\mathbf{A}\rangle - \frac{m}{2}\langle \mathbf{A}|\mathbf{A}\rangle,$$
$$\widetilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{t}} = \frac{1}{2}\langle \mathbf{A}|\widetilde{\Pi}\mathbf{A}\rangle - \frac{m}{2}\langle \mathbf{A}|\mathbf{A}\rangle.$$

Поскольку для любого векторного поля

$$\breve{\nabla}_i T^i = \nabla_i T^i - \varphi t_i T^i, \quad \varphi = \nabla_i t^i,$$

основное тождество (9) запишется в следующем виде:

$$\left\langle \mathbf{A}|\Pi\mathbf{B} + \frac{1}{2}Q_{\mathbf{t}}\varphi\mathbf{B}\right\rangle - \left\langle \mathbf{B}|\Pi\mathbf{A} + \frac{1}{2}Q_{\mathbf{t}}\varphi\mathbf{A}\right\rangle = \nabla_k T^k(\mathbf{B},\, \mathbf{A}).$$

Косое произведение двух спиновых полей, определение которого было дано в спинстатике, отнесено здесь к вспомогательной метрике. Отсюда следует, что уравнение $\delta\mathcal{L}_{\mathbf{t}} = 0$ и ему сопряженное имеют вид

$$\Pi\mathbf{A} + \frac{1}{2}\varphi Q_{\mathbf{t}}\mathbf{A} = m\mathbf{A}, \tag{13}$$

$$\widetilde{\Pi}\mathbf{A} + \frac{1}{2}\varphi \widetilde{Q}_{\mathbf{t}}\mathbf{A} = -m\mathbf{A}. \tag{14}$$

Изучаемые лагранжианы инвариантны относительно обращения времени, и, так как

$$\Pi\widetilde{Q}_{\mathbf{t}} - \widetilde{Q}_{\mathbf{t}}\Pi = 0, \quad \langle \widetilde{Q}_{\mathbf{t}}\mathbf{A}|\mathbf{B}\rangle = -\langle \mathbf{A}|\widetilde{Q}_{\mathbf{t}}\mathbf{B}\rangle,$$

они инвариантны также относительно соответствующих преобразований

$$\overline{\mathbf{A}} = \exp{(\lambda\widetilde{Q}_{\mathbf{t}})}\mathbf{A}, \quad \overline{\mathbf{A}} = \exp{(\widetilde{\lambda}Q_{\mathbf{t}})}\mathbf{A}.$$

Полагая в основном тождестве $\mathbf{B} = -\widetilde{Q}_{\mathbf{t}}\mathbf{A}$, находим, что дивергенция векторного поля

$$C^k = T^k(\mathbf{A},\, \widetilde{Q}_{\mathbf{t}}\mathbf{A})$$

обращается в нуль:

$$\nabla_k C^k = 0,$$

если спиновое поле удовлетворяет уравнению (14). Компоненты векторного поля C^k и сопряженного ему $\widetilde{C}^k$ могут быть найдены также из соотношений

$$v_i C^i = \langle L_{\mathbf{v}}\mathbf{A}|\widetilde{Q}_{\mathbf{t}}\mathbf{A}\rangle, \quad v_i\widetilde{C}^k = \langle \widetilde{L}_{\mathbf{v}}\mathbf{A}|Q_{\mathbf{t}}\mathbf{A}\rangle. \tag{15}$$

Далее в определении дуальных операторов H и $\widetilde{H}$ вместо римановой метрики g_{ij} подставляем вспомогательную метрику $\overline{g}_{ij}$ и получаем таким способом дуальные операторы

$$J = -HQ_{\mathbf{t}}\widetilde{Q}_{\mathbf{t}} = Q_{\mathbf{t}}H\widetilde{Q}_{\mathbf{t}}, \quad \widetilde{J} = -\widetilde{H}Q_{\mathbf{t}}\widetilde{Q}_{\mathbf{t}} = \widetilde{Q}_{\mathbf{t}}\widetilde{H}Q_{\mathbf{t}},$$

которые вместе с операторами $Q_{\mathbf{t}}$ и $\widetilde{Q}_{\mathbf{t}}$ действуют в пространстве решений соответствующих дуальных уравнений. Следующие соотношения

$$J^2 = \widetilde{J}^2 = (-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}E$$

для случая $n = 4$ дают

$$J^2 = -E, \quad \widetilde{J}^2 = -E, \quad JQ_{\mathbf{t}} + Q_{\mathbf{t}}J = 0, \quad \widetilde{J}\widetilde{Q}_{\mathbf{t}} + \widetilde{Q}_{\mathbf{t}}\widetilde{J} = 0.$$

В последующем будет доказано, что ковариантная производная в связности $\breve{\Gamma}$ от тензорного поля $e_{i_1\cdots i_n}$, представляющего ориентацию физического многообразия, равна нулю. Отсюда немедленно следует, что равны нулю коммутаторы

$$\Pi\widetilde{J} - \widetilde{J}\Pi = 0, \quad \widetilde{\Pi}J - J\widetilde{\Pi} = 0,$$

однако соответствующие лагранжианы не инвариантны относительно преобразований

$$\overline{\mathbf{A}} = \exp{(\lambda\widetilde{J})}\mathbf{A}, \quad \overline{\mathbf{A}} = \exp{(\lambda J)}\mathbf{A}.$$

Поэтому, например, векторное поле

$$S^k = T^k(\mathbf{A},\, \widetilde{J}\mathbf{A})$$

равно нулю. Докажем это. Имеем

$$v_i S^i = \langle L_{\mathbf{v}}\mathbf{A}|\widetilde{J}\mathbf{A}\rangle = -\langle \mathbf{A}|\widetilde{J}L_{\mathbf{v}}\mathbf{A}\rangle = -\langle L_{\mathbf{v}}\mathbf{A}|\widetilde{J}\mathbf{A}\rangle = -v_i S^i.$$

Отсюда следует, что $v_i S^i = 0$ для любого векторного поля v_i и, следовательно, $S^i = 0$. Так как

$$\Pi J + J\Pi = 0, \quad \widetilde{\Pi}\widetilde{J} + \widetilde{J}\widetilde{\Pi} = 0,$$

первые слагаемые в дуальных лагранжианах будут инвариантны относительно соответствующих преобразований

$$\overline{\mathbf{A}} = \exp(\lambda J)\mathbf{A}, \quad \overline{\mathbf{A}} = \exp(\lambda \widetilde{J})\mathbf{A},$$

при том, что вторые слагаемые такой инвариантностью не обладают. Осталось только рассмотреть спиновую симметрию, определяемую антисимметричными тензорными полями. Этот вопрос будет предметом специального исследования в отдельном разделе.

Найденный закон сохранения носит универсальный характер, и его естественно связать с законом сохранения электрического заряда. Оператор $\widetilde{Q}_{\mathbf{t}}$ и дуальный ему оператор $Q_{\mathbf{t}}$ суть операторы электрического заряда. Следовательно, удивительная универсальность электромагнитных взаимодействий связана с существованием связности

$$\breve{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + t^i \nabla_j t_k - t_k \nabla_j t^i.$$

Чтобы найти зарядовую плотность и физический ток, который должен быть ортогональным потоку времени, положим

$$C^k = t^k(\mathbf{t}, \mathbf{C}) + C^k - t^k(\mathbf{t}, \mathbf{C}) = \rho t^k + J^k.$$

Закон сохранения заряда запишется тогда в виде

$$D_{\mathbf{t}}(\sqrt{g}\rho) + \partial_i(\sqrt{g}J^i) = 0, \quad t_i J^i = 0.$$

Согласно (16)

$$\rho = t_k C^k = \langle Q_{\mathbf{t}}\mathbf{A}|\widetilde{Q}_{\mathbf{t}}\mathbf{A}\rangle = (Q_{\mathbf{t}}Q_{\mathbf{t}}\mathbf{A}|\widetilde{Q}_{\mathbf{t}}\widetilde{Q}_{\mathbf{t}}\mathbf{A}) = (\mathbf{A}|\mathbf{A}).$$

Поскольку $\rho = (\mathbf{A}|\mathbf{A}) > 0$ и из $(\mathbf{A}|\mathbf{A}) = 0$ следует, что $\mathbf{A} = 0$, доказан очень важный результат о существовании вероятностной меры в пространстве решений уравнений вещественного спинового поля (14). Это является убедительным аргументом в пользу предложенной физической интерпретации рассматриваемого закона сохранения как закона сохранения электрического заряда.

Пусть A_i есть компоненты потенциала $\mathbf{a}$ электромагнитного поля. В соответствии с (16) записываем лагранжиан взаимодействия электромагнитного и вещественного спинового полей:

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{1}{2}q\, A_i C^i = -\frac{1}{2}q\,\phi\rho - \frac{1}{2}q\,\Phi_i J^i = -\frac{1}{2}q\langle L_{\mathbf{a}}\mathbf{A}|\widetilde{Q}_{\mathbf{t}}\mathbf{A}\rangle,$$

где q есть постоянная взаимодействия, а

$$\phi = t^i A_i, \quad \Phi_i = A_i - \phi t_i, \quad t^i \Phi_i = 0,$$

есть, соответственно, скалярный и векторный потенциалы электромагнитного поля. При калибровочных преобразованиях потенциала электромагнитного поля $A_i \Rightarrow A_i + \partial_i \Lambda$ скалярный и векторный потенциалы преобразуются по закону

$$\phi' = \phi + D_{\mathbf{t}} \Lambda, \quad {\Phi_i}' = \Phi_i + \triangle_i \Lambda, \quad \triangle_i = \nabla_i - t_i \nabla_{\mathbf{t}}.$$

При обращении времени плотность потенциальной энергии взаимодействия изменяет знак. Если она была положительной, то станет отрицательной, и обратно. Отталкивание сменяется притяжением и наоборот. В случае вещественного спинового поля константа взаимодействия, называемая электрическим зарядом, характеризует интенсивность взаимодействия, но электрический заряд не может рассматриваться как квантовое число, равное плюс или минус единице, так как для квадрата оператора электрического заряда выполняется соотношение

$$\widetilde{Q}_{\mathbf{t}}^2 = -E,$$

и, следовательно, этот оператор допускает собственные значения, равные $\pm i$. Таким образом, для введения заряда как квантового числа равного плюс или минус единица необходимо ввести комплексное спиновое поле

$$\mathbf{\Psi} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{A} + i\mathbf{B}), \quad \overset{*}{\mathbf{\Psi}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{A} - i\mathbf{B})$$

и подчинить его уравнениям

$$\widetilde{Q}_{\mathbf{t}} \mathbf{\Psi} = -i\mathbf{\Psi}, \quad \widetilde{Q}_{\mathbf{t}} \overset{*}{\mathbf{\Psi}} = i\overset{*}{\mathbf{\Psi}},$$

причем второе из этих уравнений есть следствие первого. Таким образом, если и можно говорить о том, что вещественное спиновое поле служит носителем электрического заряда, то только одного знака. Тогда можно сказать, что из двух пар

$$(\mathbf{\Psi}, \quad \overset{*}{\mathbf{\Psi}}), \quad (\overset{*}{\mathbf{\Psi}}, \quad \mathbf{\Psi})$$

первая переносит электрический заряд, равный единице, а, соответственно, вторая переносит заряд, равный минус единице, но движется вспять по времени, так как

$$\widetilde{Q}_{-\mathbf{t}} \overset{*}{\mathbf{\Psi}} = -i\overset{*}{\mathbf{\Psi}}, \quad \widetilde{Q}_{-\mathbf{t}} \mathbf{\Psi} = i\mathbf{\Psi}.$$

Комплексификация спинового поля не увеличивает в рассматриваемом случае число неизвестных вещественных функций и имеет определенную аргументацию, однако за этим все же не видно истинной необходимости для введения комплексных спиновых полей. Поэтому запишем уравнения вещественного спинового поля, взаимодействующего с электромагнитным полем, и раскроем причинную структуру этих уравнений. Искомые уравнения имеют вид

$$\left(\Pi + \frac{1}{2}\varphi Q_{\mathbf{t}}\right)\mathbf{A} + qL_{\mathbf{a}}\widetilde{Q}_{\mathbf{t}}\mathbf{A} = m\mathbf{A}, \tag{16}$$

$$\left(\widetilde{\Pi} + \frac{1}{2}\varphi \widetilde{Q}_{\mathbf{t}}\right)\mathbf{A} + q\widetilde{L}_{\mathbf{a}}Q_{\mathbf{t}}\mathbf{A} = -m\mathbf{A}. \tag{17}$$

Имея в виду последующее рассмотрение, дадим также комплексное представление уравнений (24) и (25). Чтобы включить комплексификацию в рамки лагранжева формализма, введем, как обычно, проекционные операторы

$$P_{\pm} = \frac{1}{2}(E \pm i\widetilde{Q}_{\mathbf{t}}), \quad P_+ + P_- = E, \quad P_{\pm}^2 = P_{\pm}, \quad P_+P_- = P_-P_+ = 0.$$

Запишем дуальные лагранжианы комплексного спинового поля в виде

$$\mathcal{L}_{\mathbf{t}} = \frac{1}{2}\langle P_- \overset{*}{\mathbf{\Psi}}|\Pi\mathbf{\Psi}\rangle + \frac{1}{2}\langle P_+\mathbf{\Psi}|\Pi\overset{*}{\mathbf{\Psi}}\rangle - m\langle\overset{*}{\mathbf{\Psi}}|P_+\mathbf{\Psi}\rangle.$$

$$\widetilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{t}} = \frac{1}{2}\langle P_- \overset{*}{\mathbf{\Psi}}|\widetilde{\Pi}\mathbf{\Psi}\rangle + \frac{1}{2}\langle P_+\mathbf{\Psi}|\widetilde{\Pi}\overset{*}{\mathbf{\Psi}}\rangle + m\langle\overset{*}{\mathbf{\Psi}}|P_+\mathbf{\Psi}\rangle.$$

Уравнения вещественного спинового поля в комплексной форме запишутся в следующем виде:

$$\left(\Pi + \frac{1}{2}\varphi Q_{\mathbf{t}}\right)\mathbf{\Psi}_+ - iqL_{\mathbf{a}}\mathbf{\Psi}_+ = m\mathbf{\Psi}_+, \tag{18}$$

$$\left(\widetilde{\Pi} + \frac{1}{2}\varphi \widetilde{Q}_{\mathbf{t}}\right)\mathbf{\Psi}_+ - i\widetilde{L}_{\mathbf{a}}\mathbf{\Psi}_+ = -m\mathbf{\Psi}_+, \tag{19}$$

где $\mathbf{\Psi}_+ = P_+\mathbf{\Psi}$. Отсюда понятно, почему для рассмотрения взаимодействия комплексного спинового поля с электромагнитным полем нужно просто удлинить ковариантную производную по правилу $\breve{\nabla}_k \Rightarrow \breve{\nabla}_k - iqA_k$, так как $\widetilde{Q}_{\mathbf{t}}\mathbf{\Psi}_+ = -i\mathbf{\Psi}_+$.

Раскроем причинную структуру уравнений спиндинамики, которая показывает, как, зная состояние поля в определенный момент времени, найти его состояние в последующие моменты времени. В следующем разделе будет доказано, что оператор $\nabla_{\mathbf{t}} + \dfrac{1}{2}\varphi$, $\varphi = \nabla_i t^i$, является оператором эволюции в спиндинамике, и, следовательно, он аналогичен оператору $D_{\mathbf{t}} + \varphi$ в последовательной теории взаимодействия света и гравитации. Оператор эволюции показывает, как поле времени связано с динамическими процессами.

4. ПРИЧИННАЯ СТРУКТУРА УРАВНЕНИЙ СПИНДИНАМИКИ

Представим уравнения спиндинамики в наиболее симметричной и явно динамической (гамильтоновой) форме. Уравнение (19), будучи записанным в покомпонентной форме, выглядит очень сложным и несимметричным. Для записи уравнений спиндинамики в симметричной форме используем те же идеи, что и в спинстатике, дополнительно привлекая для этого результаты, полученные при выводе собственно уравнений Максвелла для электрического и магнитного полей в явно динамической и общековариантной форме.

Оператор rot определяется для векторных полей следующим образом:

$$(\mathrm{rot}\,\mathbf{M})^i = [\nabla \times \mathbf{M}]^i = e^{ijkl} t_j \partial_k \mathrm{M}_l = \frac{1}{2} e^{ijkl} t_j (\partial_k \mathrm{M}_l - \partial_l \mathrm{M}_k). \qquad (20)$$

Нетрудно убедиться, что

$$(\mathbf{M},\, \mathrm{rot}\,\mathbf{N}) + \mathrm{div}[\mathbf{M} \times \mathbf{N}] = (\mathrm{rot}\,\mathbf{M},\, \mathbf{N}),$$

где

$$[\mathbf{M} \times \mathbf{N}]^i = e^{ijkl} t_j \mathrm{M}_k \mathrm{N}_l$$

есть векторное произведение двух векторных полей $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$, $\mathrm{div}\,\mathbf{M} = \nabla_i \mathrm{M}^i$. Таким образом, оператор rot является самосопряженным. Чтобы найти собственные векторы и собственные значения этого оператора, нужно решить уравнение $\mathrm{rot}\,\mathbf{M} = \sigma \mathbf{M}$. Отметим также, что $(\mathrm{grad}\,\varphi)_i = \triangle_i\, \varphi$ и

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{grad} = 0, \quad \mathrm{div}\,\mathrm{rot} = 0.$$

Таким образом, собственные векторы рассматриваемого оператора, несущие ненулевое собственное значение, автоматически ортогональны потоку времени и имеют нулевую расходимость.

Чтобы применить формализм векторного анализа и векторной алгебры к уравнениям спиндинамики, рассмотрим отображение спинового поля

$$\mathbf{A} = (a, a_i, a_{ij}, a_{ijk}, a_{ijkl})$$

на два скаляра κ и μ, два псевдоскаляра λ и ν, два вектора $\mathbf{K}$ и $\mathbf{M}$, два псевдовектора $\mathbf{L}$ и $\mathbf{N}$, ортогональных потоку времени,

$$(\mathbf{t}, \mathbf{K}) = (\mathbf{t}, \mathbf{L}) = (\mathbf{t}, \mathbf{M}) = (\mathbf{t}, \mathbf{N}) = 0.$$

Названное отображение определяется следующим образом:

$$\kappa = t^i a_i, \quad \mu = a, \quad \lambda = \frac{1}{3!} t_l e^{ijkl} a_{ijk}, \quad \nu = \frac{1}{4!} e^{ijkl} a_{ijkl},$$

$$\mathrm{K}^i = h^i_m a^m, \quad \mathrm{M}^i = t_k a^{ki}, \quad \mathrm{L}^i = \frac{1}{3!} h^i_m e^{mjkl} a_{jkl}, \quad \mathrm{N}^i = t_k \widetilde{a}^{ki},$$

где $h^i_j = \delta^i_j - t^i t_j$, $\widetilde{a}^{ki} = \dfrac{1}{2} e^{kijl} a_{jl}$. Обратное отображение имеет такой вид:

$$
\begin{gathered}
a = \mu, \quad a_i = \mathrm{K}_i + \kappa t_i, \quad a_{ij} = t_i \mathrm{M}_j - t_j \mathrm{M}_i + e_{ijkl} t^k \mathrm{N}^l, \\
a_{ijk} = e_{mijk} \mathrm{L}^m + \lambda\, t^m e_{ijkm}, \quad a_{ijkl} = \nu\, e_{ijkl}.
\end{gathered}
$$

Далее запишем уравнение спиндинамики (19) в компонентной форме, полагая $p = 0, 1, 2, 3, 4$, и после некоторых преобразований получим следующую симметричную систему уравнений спиндинамики, которая включает в себя четыре скалярных и четыре векторных уравнения:

$$
\begin{aligned}
\left(\nabla_{\mathbf{t}} + \frac{1}{2}\varphi\right) \mu - q\phi\, \kappa &= \nabla_i \mathrm{M}^i - q\Phi_i \mathrm{K}^i + m\, \kappa, \\
\left(\nabla_{\mathbf{t}} + \frac{1}{2}\varphi\right) \kappa + q\phi\, \mu &= \nabla_i \mathrm{K}^i + q\Phi_i \mathrm{M}^i - m\, \mu, \\
\left(\nabla_{\mathbf{t}} + \frac{1}{2}\varphi\right) \lambda - q\phi\, \nu &= \nabla_i \mathrm{L}^i - q\Phi_i \mathrm{N}^i - m\, \nu, \\
\left(\nabla_{\mathbf{t}} + \frac{1}{2}\varphi\right) \nu + q\phi\, \lambda &= \nabla_i \mathrm{N}^i + q\Phi_i \mathrm{L}^i + m\, \lambda;
\end{aligned}
\tag{21}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(\nabla_{\mathbf{t}} + \frac{1}{2}\varphi\right) \mathrm{M}_i - q\phi \mathrm{K}_i &= (\operatorname{rot} \mathbf{N})_i + q[\mathbf{\Phi} \times \mathbf{L}]_i + \triangle_i\, \mu - q\Phi_i\, \kappa - m\, \mathrm{K}_i, \\
\left(\nabla_{\mathbf{t}} + \frac{1}{2}\varphi\right) \mathrm{K}_i + q\phi \mathrm{M}_i &= -(\operatorname{rot} \mathbf{L})_i + q[\mathbf{\Phi} \times \mathbf{N}]_i + \triangle_i\, \kappa + q\Phi_i\, \mu + m\, \mathrm{M}_i, \\
\left(\nabla_{\mathbf{t}} + \frac{1}{2}\varphi\right) \mathrm{L}_i - q\phi \mathrm{N}_i &= (\operatorname{rot} \mathbf{K})_i + q[\mathbf{\Phi} \times \mathbf{M}]_i + \triangle_i\, \lambda - q\Phi_i\, \nu + m\, \mathrm{N}_i, \\
\left(\nabla_{\mathbf{t}} + \frac{1}{2}\varphi\right) \mathrm{N}_i + q\phi \mathrm{L}_i &= -(\operatorname{rot} \mathbf{M})_i + q[\mathbf{\Phi} \times \mathbf{K}]_i + \triangle_i\, \nu + q\Phi_i\, \lambda - m\, \mathrm{L}_i.
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Запишем эти фундаментальные уравнения также в инвариантном виде:

$$
\begin{aligned}
\left(\nabla_{\mathbf{t}} + \frac{1}{2}\varphi\right) \mu - q\phi\, \kappa &= \operatorname{div} \mathbf{M} - q(\mathbf{\Phi},\, \mathbf{K}) + m\, \kappa, \\
\left(\nabla_{\mathbf{t}} + \frac{1}{2}\varphi\right) \kappa + q\phi\, \mu &= \operatorname{div} \mathbf{K} + q(\mathbf{\Phi},\, \mathbf{M}) - m\, \mu, \\
\left(\nabla_{\mathbf{t}} + \frac{1}{2}\varphi\right) \lambda - q\phi\, \nu &= \operatorname{div} \mathbf{L} - q(\mathbf{\Phi},\, \mathbf{N}) - m\, \nu, \\
\left(\nabla_{\mathbf{t}} + \frac{1}{2}\varphi\right) \nu + q\phi\, \lambda &= \operatorname{div} \mathbf{N} + q(\mathbf{\Phi},\, \mathbf{L}) + m\, \lambda;
\end{aligned}
\tag{23}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(\nabla_{\mathbf{t}}+\frac{1}{2}\varphi\right)\mathbf{M}-q\phi\mathbf{K}=(\operatorname{rot}\mathbf{N})+q[\mathbf{\Phi}\times\mathbf{L}]+\operatorname{grad}\mu-q\mathbf{\Phi}\,\kappa-m\,\mathbf{K},\\
&\left(\nabla_{\mathbf{t}}+\frac{1}{2}\varphi\right)\mathbf{K}+q\phi\mathbf{M}=-(\operatorname{rot}\mathbf{L})+q[\mathbf{\Phi}\times\mathbf{N}]+\operatorname{grad}\kappa+q\mathbf{\Phi}\,\mu+m\,\mathbf{M},\\
&\left(\nabla_{\mathbf{t}}+\frac{1}{2}\varphi\right)\mathbf{L}-q\phi\mathbf{N}=\operatorname{rot}\mathbf{K}+q[\mathbf{\Phi}\times\mathbf{M}]+\operatorname{grad}\lambda-q\mathbf{\Phi}\,\nu+m\,\mathbf{N},\\
&\left(\nabla_{\mathbf{t}}+\frac{1}{2}\varphi\right)\mathbf{N}+q\phi\mathbf{L}=-\operatorname{rot}\mathbf{M}+q[\mathbf{\Phi}\times\mathbf{K}]+\operatorname{grad}\nu+q\mathbf{\Phi}\,\lambda-m\,\mathbf{L}.
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Таким образом, самосопряженный оператор rot играет такую же фундаментальную роль в спиндинамике, как и в теории Максвелла, что служит еще одним свидетельством простоты и гармонии единой физики. К этому оператору нужно добавить еще один самосопряженный оператор, известный как оператор Лапласа, и картина ключевых по своему значению и общности самосопряженных операторов будет фактически полной.

Решая уравнение $\widetilde{Q}_{\mathbf{t}}\Psi=-i\Psi$ и предполагая, что скалярные и векторные поля являются комплексными, получим

$$
\kappa=i\mu,\quad \nu=i\lambda,\quad \mathbf{K}=i\mathbf{M},\quad \mathbf{N}=i\mathbf{L}.
$$

Уравнения спиндинамики (23) и (24) запишутся в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
&\left(\nabla_{\mathbf{t}}+\frac{1}{2}\varphi-iq\phi\right)\mu=(\nabla-iq\mathbf{\Phi},\,\mathbf{M})+im\,\mu,\\
&\left(\nabla_{\mathbf{t}}+\frac{1}{2}\varphi-iq\phi\right)\lambda=(\nabla-iq\mathbf{\Phi},\,\mathbf{L})-im\,\lambda;
\end{aligned}
\tag{25}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(\nabla_{\mathbf{t}}+\frac{1}{2}\varphi-iq\phi\right)\mathbf{L}=i[(\nabla-iq\mathbf{\Phi})\times\mathbf{M}]+(\triangle-iq\mathbf{\Phi})\,\lambda+im\,\mathbf{L},\\
&\left(\nabla_{\mathbf{t}}+\frac{1}{2}\varphi-iq\phi\right)\mathbf{M}=i[(\nabla-iq\mathbf{\Phi})\times\mathbf{L}]+(\triangle-iq\mathbf{\Phi})\,\mu-im\,\mathbf{M},
\end{aligned}
\tag{26}
$$

где скалярные и векторные поля являются комплексными.

В установленных уравнениях спиндинамики число неизвестных функций в два раза превышает число неизвестных функций в матричном уравнении Дирака. Такое увеличение числа степеней свободы свидетельствует о существовании не рассмотренной выше дополнительной симметрии лагранжиана спиндинамики и существовании физических величин, отсутствующих в теории Дирака. Это будет продемонстрировано в следующем разделе.

5. КОНЦЕПЦИЯ ВНУТРЕННЕГО СПИНА

В этом разделе вводится концепция внутреннего спина, которая представляет собой еще одно проявление биполярной структуры. Затем рассматривается решение уравнений спиндинамики, которое соответствует весьма неустойчивой физической системе, известной как атом водорода. Дело в том, что давно научились разделять молекулярный водород, однако полученные атомы водорода за время, меньшее чем одна тысячная секунды, рекомбинируют, вновь образуя водородные молекулы. Концепция внутреннего спина позволяет объяснить это явление. Отметим, что все изложенные ниже построения, связанные с концепцией внутреннего спина, имеют смысл только в размерности $n = 4$.

Спиновые операторы Σ и $\widetilde{\Sigma}$, введенные в спинстатике, будут операторами внутренней симметрии уравнений спиндинамики, если определяющий их кососимметричный тензор S_{ij} будет ковариантно постоянным в связности $\breve{\Gamma}$:

$$\breve{\nabla}_i S_{jk} = 0.$$

Сразу же отметим, что если тензорное поле S_{jk} ковариантно постоянно в связности $\breve{\Gamma}$, то ковариантная производная тензорного поля $\overline{S}_{ij} = \frac{1}{2} e_{ijkl} S^{kl}$ будет также равна нулю, так как $\breve{\nabla}_i e_{jklm} = 0$. Докажем последнее соотношение, которое справедливо в любой размерности. Имеем

$$\breve{\nabla}_k e_{i_1 \cdots i_n} = \nabla_k e_{i_1 \cdots i_n} - T^l_{k i_1} e_{l i_2 \cdots i_n} - \cdots - T^l_{k i_n} e_{i_1 \cdots i_{n-1} l},$$

где $T^i_{jk} = t^i \nabla_j t_k - t_k \nabla_j t^i$. Так как $\nabla_k e_{i_1 \cdots i_n} = 0$, то искомое следует из тождества

$$(n+1) T^m_{k[l} e_{i_1 \cdots i_n]} = T^m_{kl} e_{i_1 \cdots i_n} - n T^m_{k[i_1} e_{|l| i_2 \cdots i_n]}, \quad T^l_{kl} = 0.$$

Составляя условие интегрируемости рассматриваемого уравнения, получаем

$$\breve{R}^m_{ijk} S_{ml} + \breve{R}^m_{ijl} S_{km} = 0,$$

где $\breve{R}^m_{ijk}$ есть тензор Римана связности $\breve{\Gamma}$. Следовательно, уравнение вполне интегрируемо, если тензор Римана $\breve{R}^m_{ijk}$ равен нулю. Рассмотрим вытекающие отсюда следствия. После некоторых вычислений находим связь между тензорами Римана $\breve{R}^l_{ijk}, R^l_{ijk}$ связностей $\breve{\Gamma}$ и Γ:

$$\breve{R}^l_{ijk} = R^l_{ijk} - t^l R^m_{ijk} t_m - t_k R^l_{ijm} t^m + \nabla_i t^l \nabla_j t_k - \nabla_j t^l \nabla_i t_k.$$

Отсюда находим, что если уравнения вполне интегрируемы, то

$$R_{jk} = R^l_{ljk} = t_k R_{jm} t^m + t^l R^m_{ljk} t_m + \nabla_j t^l \nabla_k t_l - \varphi \nabla_j t_k.$$

Используя известные тождества для тензора кривизны, можно показать, что все тензоры, входящие в последнее уравнение, симметричны, кроме тензора $t_k R_{jm} t^m$. Отсюда находим, что $t_k R_{jm} t^m - t_j R_{km} t^m = 0$ и, следовательно, $R_{jm} t^m - t_j t^k R_{km} t^m = h^i_j R_{im} t^m = G_j = 0$. Таким образом, равенство нулю вектора потока гравитационной энергии G_j есть необходимое условие того, что рассматриваемое уравнение вполне интегрируемо. С физической точки зрения это слишком ограничительное условие. Поэтому необходимо только потребовать, чтобы наше уравнение просто имело нетривиальное решение, что определенно сужает область, в которой ищутся физически допустимые гравитационные потенциалы. Поэтому в последующем будет предполагаться, что все физические гравитационные потенциалы содержатся в этой новой области. Это обеспечивает универсальный характер вводимой здесь концепции внутреннего спина и связанного с ней нового взаимодействия за счет уменьшения числа степеней свободы гравитационного поля. Подробное рассмотрение возникающей здесь интересной математической задачи выходит за рамки данного исследования. Отметим только, что уравнение $\nabla_i S_{jk} = 0$ выделяет очень интересный и нетривиальный класс римановых пространств, который детально изучен в математической литературе в связи с понятием комплексно-аналитической структуры. Впервые этот класс римановых пространств был открыт казанским геометром П. А. Широковым в 1925 г. и носит его имя.

Покажем, что спиновые операторы Σ и $\widetilde{\Sigma}$ имеют интересное представление в размерности $n = 4$. Пусть t^i есть компоненты единичного векторного поля, $(\mathbf{t}, \mathbf{t}) = 1$, тогда для любого кососимметричного тензорного поля S_{ij} можно указать следующее представление:

$$S_{ij} = t_i v_j - t_j v_i + e_{ijkl} t^k w^l, \quad \overline{S}_{ij} = t_i w_j - t_j w_i + e_{ijkl} t^k v^l,$$

которое ранее было использовано при установлении причинной структуры уравнений спиндинамики. Здесь v^i — компоненты векторного поля, а w^i есть компоненты псевдовекторного поля, которые ортогональны данному векторному полю t^i, $(\mathbf{t}, \mathbf{v}) = 0$, $(\mathbf{t}, \mathbf{w}) = 0$. Обратное отображение имеет вид

$$v_i = t^k S_{ki}, \quad w_i = t^k \overline{S}_{ki}, \quad \overline{S}_{ij} = \frac{1}{2} e_{ijkl} S^{kl}.$$

Полагая $N_{ij} = e_{ijkl} t^k w^l$, получаем для оператора спина следующее представление: $\Sigma = Q_{\mathbf{t}\wedge\mathbf{v}} + Q_{\mathbf{N}}$. Можно показать, что $Q_{\mathbf{N}} = -Q_{\mathbf{t}\wedge\mathbf{w}} H$ и, следовательно,

$$\Sigma = \Sigma_{\mathbf{v}*\mathbf{w}} = Q_{\mathbf{t}\wedge\mathbf{v}} - Q_{\mathbf{t}\wedge\mathbf{w}} H = Q_{\mathbf{t}}(Q_{\mathbf{v}} - Q_{\mathbf{w}} H).$$

Для дуального оператора имеем

$$\widetilde{\Sigma} = \widetilde{\Sigma}_{\mathbf{v}*\mathbf{w}} = \widetilde{Q}_{\mathbf{t}}(\widetilde{Q}_{\mathbf{v}} - \widetilde{Q}_{\mathbf{w}} \widetilde{H}).$$

Операторы, порождаемые тензорным полем $\overline{S}_{ij}$, отличаются от введенных перестановкой $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$. Нетрудно вывести следующие соотношения:

$$\Sigma^2 = -(v^2 + w^2)E + 2(\mathbf{v}, \mathbf{w})H, \quad \widetilde{\Sigma}^2 = -(v^2 + w^2)E + 2(\mathbf{v}, \mathbf{w})\widetilde{H}.$$

Перенесем эти результаты в спиндинамику. Рассмотрим операторы, аналогичные Σ и $\widetilde{\Sigma}$:

$$\Sigma_L = \frac{1}{2}Q_{\mathbf{t}}(L_{\mathbf{v}} - L_{\mathbf{w}}J),$$
$$\widetilde{\Sigma}_L = \frac{1}{2}\widetilde{Q}_{\mathbf{t}}(\widetilde{L}_{\mathbf{v}} - \widetilde{L}_{\mathbf{w}}\widetilde{J}),$$

где в данном случае $\mathbf{t}$ есть поток времени. Имеем

$${\Sigma_L}^2 = \frac{1}{4}[(v^2 - w^2)E - 2(\mathbf{v}, \mathbf{w})J], \quad \widetilde{\Sigma}_L^2 = \frac{1}{4}[(v^2 - w^2)E - 2(\mathbf{v}, \mathbf{w})\widetilde{J}].$$

По определению, операторы Σ_L и $\widetilde{\Sigma}_L$, которые удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\Pi\widetilde{\Sigma}_L - \widetilde{\Sigma}_L\Pi = 0, \quad \widetilde{\Pi}\Sigma_L - \Sigma_L\widetilde{\Pi} = 0,$$

есть дуальные операторы внутреннего спина. Операторы внутреннего спина, очевидно, можно представить как сумму двух операторов, которые обозначим соответственно

$$\Sigma_{\mathbf{v}} = \frac{1}{2}Q_{\mathbf{t}}L_{\mathbf{v}}, \quad \Sigma_{\mathbf{w}} = -\frac{1}{2}Q_{\mathbf{t}}L_{\mathbf{w}}J, \quad \Sigma_L = \Sigma_{\mathbf{v}} + \Sigma_{\mathbf{w}},$$
$$\widetilde{\Sigma}_{\mathbf{v}} = \frac{1}{2}\widetilde{Q}_{\mathbf{t}}\widetilde{L}_{\mathbf{v}}, \quad \widetilde{\Sigma}_{\mathbf{w}} = -\frac{1}{2}\widetilde{Q}_{\mathbf{t}}\widetilde{L}_{\mathbf{w}}\widetilde{J}, \quad \widetilde{\Sigma}_L = \widetilde{\Sigma}_{\mathbf{v}} + \widetilde{\Sigma}_{\mathbf{w}}.$$

Оператор $\Sigma_{\mathbf{v}}$ антикоммутирует с оператором $Q_{\mathbf{t}}$, тогда как оператор $\Sigma_{\mathbf{w}}$ коммутирует с $Q_{\mathbf{t}}$ и аналогично для дуальных операторов

$$\Sigma_{\mathbf{v}}Q_{\mathbf{t}} + Q_{\mathbf{t}}\Sigma_{\mathbf{v}} = 0, \quad \Sigma_{\mathbf{w}}Q_{\mathbf{t}} - Q_{\mathbf{t}}\Sigma_{\mathbf{w}} = 0,$$
$$\widetilde{\Sigma}_{\mathbf{v}}\widetilde{Q}_{\mathbf{t}} + \widetilde{Q}_{\mathbf{t}}\widetilde{\Sigma}_{\mathbf{v}} = 0, \quad \widetilde{\Sigma}_{\mathbf{w}}\widetilde{Q}_{\mathbf{t}} - \widetilde{Q}_{\mathbf{t}}\widetilde{\Sigma}_{\mathbf{w}} = 0.$$

Следовательно, с физической точки зрения представляют интерес только операторы типа $\Sigma_{\mathbf{w}}$, $\widetilde{\Sigma}_{\mathbf{w}}$, поскольку дуальные лагранжианы вещественного спинового поля, взаимодействующего с электромагнитным полем, инвариантны относительно преобразований, порождаемых этими операторами. Рассматриваемая симметрия может быть нарушена включением взаимодействия с электромагнитным полем по следующей схеме.

Пусть $F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i$ есть тензор электромагнитного поля, тогда

$$F_{ij} = t_i \mathrm{e}_j - t_j \mathrm{e}_i + e_{ijkl}t^k \mathrm{h}^l,$$

где $\mathrm{e}_i = t^k F_{ki}$ есть ковариантные компоненты напряженности электрического поля $\mathbf{e}$ и $\mathrm{h}_i = t^k \widetilde{F}_{ki}$ — ковариантные компоненты напряженности магнитного поля $\mathbf{h}$. Дуальные операторы

$$\Sigma_{\mathbf{e}} = -\frac{1}{2} Q_{\mathbf{t}} L_{\mathbf{e}} J, \quad \widetilde{\Sigma}_{\mathbf{e}} = -\frac{1}{2} \widetilde{Q}_{\mathbf{t}} \widetilde{L}_{\mathbf{e}} \widetilde{J}, \quad \Sigma_{\mathbf{h}} = -\frac{1}{2} Q_{\mathbf{t}} L_{\mathbf{h}} J, \quad \widetilde{\Sigma}_{\mathbf{h}} = -\frac{1}{2} \widetilde{Q}_{\mathbf{t}} \widetilde{L}_{\mathbf{h}} \widetilde{J}$$

представляют новую форму энергии, плотность которой можно записать в виде лагранжианов следующего вида:

$$\mathcal{L}_{is} = \mu \langle Q_{\mathbf{t}} \mathbf{A} | \widetilde{\Sigma}_{\mathbf{h}} \mathbf{A} \rangle, \quad \widetilde{\mathcal{L}}_{is} = \mu \langle \widetilde{Q}_{\mathbf{t}} \mathbf{A} | \Sigma_{\mathbf{h}} \mathbf{A} \rangle.$$

Здесь необходимо отметить, что замена в этих лагранжианах вектора магнитной напряженности на вектор электрической напряженности приводит к несохранению четности, поэтому соответствующие лагранжианы представляют только потенциальный интерес, связанный с существованием электрического дипольного момента. Полагая

$$\mathcal{L}_{is} = \mathrm{h}_k d^k,$$

заключаем, что вектор, который строится из компонент вещественного спинового поля, представляет магнитный дипольный момент этого поля. Электрический дипольный момент не рассматривается по причине, отмеченной выше. Энергия магнитного дипольного момента спинового поля рассматривается здесь как естественная причина рекомбинации атомов водорода с образованием более устойчивого состояния.

Чтобы приготовить состояние спинового поля, соответствующее этой системе, рассмотрим с иной точки зрения антиэрмитов оператор

$$\widetilde{\Sigma}_{\mathbf{w}} = -\frac{1}{2} \widetilde{Q}_{\mathbf{t}} \widetilde{L}_{\mathbf{w}} \widetilde{J} = \frac{1}{2} Q_{\mathbf{w}} Q_{\mathbf{t}} \widetilde{H} Z = \frac{1}{2} Q_{\mathbf{w}} Q_{\mathbf{t}} H.$$

Полагая в этом случае

$$\widetilde{S}_1 = \frac{1}{2} Q_{\mathbf{u}} Q_{\mathbf{t}} H, \quad \widetilde{S}_2 = \frac{1}{2} Q_{\mathbf{v}} Q_{\mathbf{t}} H, \quad \widetilde{S}_3 = \frac{1}{2} Q_{\mathbf{w}} Q_{\mathbf{t}} H,$$

где $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ есть три ортогональных единичных вектора

$$[\mathbf{uv}] = \mathbf{w}, \quad [\mathbf{vw}] = \mathbf{u}, \quad [\mathbf{wu}] = \mathbf{v},$$

и принимая во внимание, что $\widetilde{S}_1 \widetilde{S}_2 = \dfrac{1}{4} Q_{\mathbf{u}} Q_{\mathbf{v}}$ и $u_i v_j - u_j v_i = -e_{ijkl} t^k w^l$, получаем

$$\widetilde{S}_1 \widetilde{S}_2 - \widetilde{S}_2 \widetilde{S}_1 = \frac{1}{2} Q_{\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}} = \frac{1}{2} Q_{\mathbf{t}} Q_{\mathbf{w}} H = -\widetilde{S}_3$$

и подобные соотношения для других коммутаторов. Таким образом, для эрмитовых операторов $\widetilde{I}_\mu = -i\widetilde{S}_\mu$, $\mu = 1, 2, 3$, справедливы следующие соотношения коммутации:

$$\widetilde{I}_\mu \widetilde{I}_\nu - \widetilde{I}_\nu \widetilde{I}_\mu = i e_{\mu\nu\lambda} \widetilde{I}_\lambda,$$
$$\widetilde{I}_\mu \widetilde{I}_\nu + \widetilde{I}_\nu \widetilde{I}_\mu = \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu} E.$$

Операторы внутреннего спина $\widetilde{I}_\mu$ коммутируют с оператором $\widetilde{Q}_{\mathbf{t}}$, и, следовательно, существует состояние, которое будет собственным вектором третьей компоненты внутреннего спина и оператора электрического заряда:

$$\widetilde{Q}_{\mathbf{t}} \mathbf{\Psi} = -i\mathbf{\Psi}, \quad \widetilde{I}_3 \mathbf{\Psi} = \pm\frac{1}{2}\mathbf{\Psi}.$$

Это состояние обозначим $\mathbf{\Psi}_{++}$. В этом случае оператор внутреннего спина может быть реализован как квантовое число, что, видимо, соответствует совершению работы над молекулой водорода и созданию атомов водорода. Для этого есть некоторые основания, так как в известных устройствах газ из атомов водорода рекомбинирует взрывообразно, образуя молекулярный водород. Потребуем далее, чтобы спиновое поле $\mathbf{\Psi}_{++}$ удовлетворяло уравнениям спиндинамики (25) и (26), когда физическое многообразие представляет собой 4-мерное евклидово пространство, а внешнее электромагнитное поле представлено кулоновским полем с зарядом q.

В физическом многообразии R^4 основное уравнение поля времени (4)

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial u^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial u^3}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial u^4}\right)^2 = 1$$

имеет два фундаментальных решения:

$$f(u^1, u^2, u^3, u^4) = a^1 u^1 + a^2 u^2 + a^3 u^3 + a^4 u^4 + a,$$

где $\mathbf{a} = (a^1, a^2, a^3, a^4)$ есть единичный постоянный вектор $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) = 1$, и

$$f(u^1, u^2, u^3, u^4) = \sqrt{(u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2 + (u^4)^2}.$$

Эти решения определяют две причинные структуры в рассматриваемом физическом пространстве. Нетрудно показать, что первая причинная структура соответствует специальной теории относительности. Аналитически линии времени определяются как решения автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{du^i}{dt} = g^{ij}\frac{\partial f}{\partial u^j} = t^i = a^i.$$

Общее решение является прямой линией, проходящей через заданную точку $\mathbf{u}_0$:
$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{a}(t - t_0) + \mathbf{u}_0. \tag{27}$$
Рассматриваемая причинная структура определяет интервал следующим образом. Пусть
$$\mathbf{u}_R = 2\mathbf{a}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}) - \mathbf{u}$$
есть вектор, полученный отражением $\mathbf{u}$ по отношению к потоку времени $\mathbf{a}$. Тогда в координатах u^1, u^2, u^3, u^4 интервал может быть записан так:
$$s^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_R = 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{u})^2 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2 \cos 2\varphi,$$
где φ есть угол между $\mathbf{a}$ и $\mathbf{u}$. Чтобы быть уверенным, что s есть действительно хорошо известный интервал, введем естественную систему координат, согласованную с причинной структурой. С этой целью предположим, что все начальные данные в (26) принадлежат пространственному сечению
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_0 = t_0. \tag{28}$$
Рассмотрим естественную систему четырех ортогональных единичных векторов $\mathbf{E}_0 = \mathbf{a} = (a^1,\, a^2,\, a^3,\, a^4)$, $\mathbf{E}_1 = (-a^4,\, -a^3,\, a^2,\, a^1)$, $\mathbf{E}_2 = (a^3,\, -a^4,\, -a^1,\, a^2)$, $\mathbf{E}_3 = (-a^2,\, a^1,\, -a^4,\, a^3)$. Сейчас общее решение уравнения (27) принимает вид
$$\mathbf{u}_0 = t_0\mathbf{E}_0 + x\mathbf{E}_1 + y\mathbf{E}_2 + z\mathbf{E}_3.$$
Подставляя это выражение в формулу (27), получаем $\mathbf{u} = t\mathbf{E}_0 + x\mathbf{E}_1 + y\mathbf{E}_2 + z\mathbf{E}_3$. Легко видеть, что в координатах t, x, y, z
$$s^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2.$$
Вторая причинная структура будет рассмотрена в другом месте.

Для дальнейшего используем векторные сферические гармоники $\mathbf{Y}^L_{JM}(\theta,\varphi)$ [1]. Для контравариантных циклических компонент $\mathbf{Y}^L_{JM}(\theta,\varphi)$ находим следующие соотношения:
$$\sqrt{\frac{(J-M+1)(2J+3)}{J+1}}\mathbf{Y}^{J+1}_{JM}(\theta,\varphi) - \sqrt{\frac{(J+M+1)(J+2)}{J+1}}\mathbf{Y}^{J+1}_{J+1M}(\theta,\varphi) =$$
$$= \left[\sqrt{2(J-M+2)}Y_{J+1M-1}(\theta,\varphi)\right]\mathbf{e}_{+1} - \left[\sqrt{J+M+1}Y_{J+1M}(\theta,\varphi)\right]\mathbf{e}_0,$$

$$\sqrt{\frac{(J+M)(2J-1)}{J}}\mathbf{Y}^{J-1}_{JM}(\theta,\varphi) - \sqrt{\frac{(J-M)(J-1)}{J}}\mathbf{Y}^{J-1}_{J-1M}(\theta,\varphi) =$$
$$= \left[\sqrt{2(J+M-1)}Y_{J-1M-1}(\theta,\varphi)\right]\mathbf{e}_{+1} + \left[\sqrt{J-M}Y_{J-1M}(\theta,\varphi)\right]\mathbf{e}_0.$$

Используя эти формулы и другие известные соотношения для векторных сферических гармоник, находим точные решения алгебраических уравнений для $\mathbf{\Psi}_{++}$ и уравнений спиндинамики (25) и (26), что в результате дает формулу Зоммерфельда для водородных уровней при $q = e$. Таким образом, уравнения спиндинамики согласуются в этом с уравнениями Дирака, которые раскрыли многие секреты спина, но не все. Отмеченный результат получен нарушением симметрии, отвечающей за понятие внутреннего спина. Судя по всему, концепция внутреннего спина тесно связана с природой химической связи и так называемым спариванием электронов. Для окончательного прояснения ситуации необходимо найти другие проявления внутреннего спина.

6. НОВАЯ ПРИЧИННАЯ СТРУКТУРА СПИНДИНАМИКИ

Двухсторонняя симметрия предполагает другой возможный способ введения поля времени в теорию спиновых полей, который будет рассмотрен в этом разделе. Так как

$$(Q_{\mathbf{t}}\mathbf{A}|\mathbf{B}) = -(\mathbf{A}|Q_{\mathbf{t}}\mathbf{B}), \quad (\widetilde{Q}_{\mathbf{t}}\mathbf{A}|\mathbf{B}) = -(\mathbf{A}|\widetilde{Q}_{\mathbf{t}}\mathbf{B}),$$

билинейные формы

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = (Q_{\mathbf{t}}\mathbf{A}|\mathbf{B}), \quad \widetilde{[\mathbf{A}, \mathbf{B}]} = (\widetilde{Q}_{\mathbf{t}}\mathbf{A}|\mathbf{B})$$

кососимметричны. Отсюда следует, что

$$[\mathbf{A}, \mathbf{A}] = 0, \quad \widetilde{[\mathbf{A}, \mathbf{A}]} = 0,$$

и становится ясным, что в этом случае введение причинной структуры требует рассмотрения двух независимых вещественных спиновых полей. Проблема состоит в том, чтобы открыть то новое и существенное, что вытекает из удвоения числа степеней свободы спинового поля, диктуемое новой трактовкой двухсторонней симметрии. При исследовании этого вопроса было обнаружено следующее.

Симплектические скалярные произведения инвариантны относительно преобразований группы $SL(2, \mathbf{R})$, называемой в последующем группой псевдозарядовой симметрии, генераторы которой h_1, h_2, h_3 задаются двухрядными квадратными матрицами

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

удовлетворяющими следующим соотношениям:

$$\tau_1^2 = -1, \quad \tau_2^2 = 1, \quad \tau_1\tau_2 + \tau_2\tau_1 = 0, \quad \tau_1\tau_2 = \tau_3,$$

$h_a = \dfrac{1}{2}\tau_a$, $a = 1, 2, 3$. Рассмотрим конечные преобразования группы псевдозарядовой симметрии $SL(2, \mathbf{R})$,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}' \\ \mathbf{B}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\dfrac{1}{2}\theta\cos\dfrac{1}{2}\varphi & \sinh\dfrac{1}{2}\theta - \cosh\dfrac{1}{2}\theta\sin\dfrac{1}{2}\varphi \\ \sinh\dfrac{1}{2}\theta + \cosh\dfrac{1}{2}\theta\sin\dfrac{1}{2}\varphi & \cosh\dfrac{1}{2}\theta\cos\dfrac{1}{2}\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix},$$

где θ и φ — координаты на рассматриваемой группе. Нетрудно проверить, что симплектические скалярные произведения инвариантны относительно этих преобразований и, следовательно, они инвариантны также относительно преобразований

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}' \\ \mathbf{B}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{1}{2}\varphi & -\sin\dfrac{1}{2}\varphi \\ \sin\dfrac{1}{2}\varphi & \cos\dfrac{1}{2}\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}' \\ \mathbf{B}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\dfrac{1}{2}\theta & \sinh\dfrac{1}{2}\theta \\ \sinh\dfrac{1}{2}\theta & \cosh\dfrac{1}{2}\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}.$$

Ясно, что вращения в псевдозарядовом пространстве $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ не коммутируют с гиперболическими поворотами. Получаем два естественных способа нарушения инвариантности относительно преобразований группы $SL(2, \mathbf{R})$. Рассмотрим только ту возможность, которая обеспечивает существование вероятностной меры в пространстве решений уравнений спиндинамики. Для этого достаточно найти собственные векторы матрицы $\tau_1 = Q_p$, которую можно рассматривать как оператор псевдозаряда, так как ее собственные значения равны $\pm i$ и, следовательно, совпадают с собственными значениями оператора электрического заряда $Q = \widetilde{Q}_{\mathbf{t}}$, $\widetilde{Q} = Q_{\mathbf{t}}$, статус которого был определен выше.

Начиная с этого момента, факт удвоения числа степеней свободы спинового поля и нарушения псевдозарядовой симметрии реализуется в форме комплексного спинового поля и ему комплексно сопряженного:

$$\mathbf{\Psi} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{A} + i\mathbf{B}), \quad \overset{*}{\mathbf{\Psi}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{A} - i\mathbf{B}).$$

Примем, что пара $\mathbf{\Psi}, \overset{*}{\mathbf{\Psi}}$ переносит псевдозаряд, равный единице, тогда пара $\overset{*}{\mathbf{\Psi}}, \mathbf{\Psi}$ переносит псевдозаряд, равный минус единице. Отметим также уравнение

$$i\begin{pmatrix} \mathbf{\Psi} \\ -i\mathbf{\Psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{\Psi} \\ -i\mathbf{\Psi} \end{pmatrix},$$

которое показывает явный вид собственного вектора оператора псевдозаряда.

После подстановки

$$\mathbf{A} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\overset{*}{\mathbf{\Psi}} + \mathbf{\Psi}), \quad \mathbf{B} = \frac{i\sqrt{2}}{2}(\overset{*}{\mathbf{\Psi}} - \mathbf{\Psi})$$

получаем

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = i(Q_{\mathbf{t}}\overset{*}{\mathbf{\Psi}}|\mathbf{\Psi}), \quad \widetilde{[\mathbf{A}, \mathbf{B}]} = i(\widetilde{Q}_{\mathbf{t}}\overset{*}{\mathbf{\Psi}}|\mathbf{\Psi}).$$

Наша ближайшая цель состоит в том, чтобы вывести уравнения спиндинамики, определяемые новой причинной структурой.

Фундаментальные лагранжианы спиндинамики принимают в изучаемом случае вид

$$\mathcal{L}_{\mathbf{t}} = -\frac{i}{2}\langle \widetilde{Q}_{\mathbf{t}}\overset{*}{\mathbf{\Psi}}|\Pi\mathbf{\Psi}\rangle + \frac{i}{2}\langle \widetilde{Q}_{\mathbf{t}}\mathbf{\Psi}|\Pi\overset{*}{\mathbf{\Psi}}\rangle + im\langle \widetilde{Q}_{\mathbf{t}}\overset{*}{\mathbf{\Psi}}|\mathbf{\Psi}\rangle,$$
$$\widetilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{t}} = -\frac{i}{2}\langle Q_{\mathbf{t}}\overset{*}{\mathbf{\Psi}}|\widetilde{\Pi}\mathbf{\Psi}\rangle + \frac{i}{2}\langle Q_{\mathbf{t}}\mathbf{\Psi}|\widetilde{\Pi}\overset{*}{\mathbf{\Psi}}\rangle + im\langle Q_{\mathbf{t}}\overset{*}{\mathbf{\Psi}}|\mathbf{\Psi}\rangle.$$

Причинная структура вводится в соответствии с новым представлением двухсторонней симметрии, поскольку

$$\langle \widetilde{Q}_{\mathbf{t}}\overset{*}{\mathbf{\Psi}}|\mathbf{\Psi}\rangle = (Q_{\mathbf{t}}\overset{*}{\mathbf{\Psi}}|\mathbf{\Psi}), \quad \langle Q_{\mathbf{t}}\overset{*}{\mathbf{\Psi}}|\mathbf{\Psi}\rangle = (\widetilde{Q}_{\mathbf{t}}\overset{*}{\mathbf{\Psi}}|\mathbf{\Psi}).$$

Как видно, новые лагранжианы не инвариантны относительно обращения времени T: $t_i \to -t_i$. Они изменяют знак $\mathcal{L}_{-\mathbf{t}} = -\mathcal{L}_{\mathbf{t}}$, $\widetilde{\mathcal{L}}_{-\mathbf{t}} = -\widetilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{t}}$. Отсюда следует, что тензор энергии-импульса, который выводится из уравнений $\delta\mathcal{L}_{\mathbf{t}} = \frac{1}{2}T_{ij}\delta\overline{g}^{ij}$, $\delta\widetilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{t}} = \frac{1}{2}T_{ij}\delta\overline{g}^{ij}$ изменяет знак при обращении времени. Таким образом, уравнения гравидинамики, записанные в форме

$$G_{ij} + T_{ij} = \varepsilon t_i t_j,$$

явно не инвариантны относительно обращения времени, поскольку тензор Эйнштейна G_{ij} вспомогательной метрики $\overline{g}_{ij}$ инвариантен относительно обращения времени. Это означает, что гравитационные взаимодействия спинового поля нарушают инвариантность относительно обращения времени и появляется стрела времени. Однако это рассуждение не является полным. Действительно, лагранжианы $\mathcal{L}_{\mathbf{t}}$ и $\widetilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{t}}$ изменяют знак при преобразовании

$$C_p: \mathbf{\Psi} \to \overset{*}{\mathbf{\Psi}}, \quad \overset{*}{\mathbf{\Psi}} \to \mathbf{\Psi}.$$

Отсюда заключаем, что если пара $\mathbf{\Psi}, \overset{*}{\mathbf{\Psi}}$ представляет спиновую материю с псевдозарядом единица и движется вперед по времени, то пара $\overset{*}{\mathbf{\Psi}}, \mathbf{\Psi}$ представляет спиновую материю с псевдозарядом минус единица и движется вспять по времени. Следовательно, теория инвариантна относительно произведения рассматриваемых преобразований и инвариантность относительно обращения времени восстанавливается. Дуальную симметрию и операцию дуального сопряжения естественно истолковать тогда как существование мира физических явлений, где время течет вспять. Вообще, идея Фейнмана о позитроне как электроне, движущемся вспять по времени, получает вполне ясные и понятные очертания только в рамках спиндинамики.

Накладывая на комплексное спиновое поле, обсуждавшееся ранее, условие $\widetilde{Q}_{\mathbf{t}}\Psi = -i\Psi$, придем от рассматриваемых лагранжианов к тем, которые были установлены ранее. Что касается нашего случая, то совершенно ясно, что преобразования зарядовой симметрии накладываются на преобразования псевдозарядовой симметрии и отличить их в данном случае становится невозможно. С этой целью необходимо найти такую физическую ситуацию, где взаимодействие вещественного спинового поля с электромагнитным полем не требует введения комплексного спинового поля ни в какой форме. Только так статус оператора электрического заряда может быть установлен окончательно. Эта задача находится в стадии рассмотрения. Другой способ прояснить различие заряда и псевдозаряда состоит в изучении внутренней симметрии вновь установленных лагранжианов.

Прежде приведем уравнения свободного комплексного спинового поля

$$\left(\Pi + \frac{1}{2}\varphi Q_{\mathbf{t}}\right)\mathbf{\Psi} = m\mathbf{\Psi}, \tag{29}$$

$$\left(\widetilde{\Pi}\frac{1}{2}\varphi \widetilde{Q}_{\mathbf{t}}\right)\mathbf{\Psi} + = m\mathbf{\Psi}, \tag{30}$$

которые выводятся из установленных лагранжианов и, как видно, по форме ничем не отличаются от свободных уравнений вещественного спинового поля.

Таким образом, причинная структура уравнений комплексного спинового поля совпадает с причинной структурой уравнений вещественного спинового поля. Отметим только, что комплексное спиновое поле

$$\mathbf{\Psi} = (\psi, \psi_i, \psi_{ij}, \psi_{ijk}, \psi_{ijkl})$$

отображается на два комплексных скаляра κ и μ, два комплексных псевдоскаляра λ и ν, два комплексных вектора $\mathbf{K}$ и $\mathbf{M}$, два комплексных псевдовектора $\mathbf{L}$ и $\mathbf{N}$, ортогональные потоку времени,

$$(\mathbf{t}, \mathbf{K}) = (\mathbf{t}, \mathbf{L}) = (\mathbf{t}, \mathbf{M}) = (\mathbf{t}, \mathbf{N}) = 0.$$

Само отображение и ему обратное по форме идентично случаю вещественного спинового поля:

$$\kappa = t^i\psi_i, \quad \mu = \psi, \quad \lambda = \frac{1}{3!}t_l e^{ijkl}\psi_{ijk}, \quad \nu = \frac{1}{4!}e^{ijkl}\psi_{ijkl},$$
$$\mathrm{K}^i = h^i_m\psi^m, \quad \mathrm{M}^i = t_k\psi^{ki}, \quad \mathrm{L}^i = \frac{1}{3!}h^i_m e^{mjkl}\psi_{jkl}, \quad \mathrm{N}^i = t_k\widetilde{\psi}^{ki},$$

где $h^i_j = \delta^i_j - t^i t_j$, $\widetilde{\psi}^{ki} = \dfrac{1}{2}e^{kijl}\psi_{jl}$,

$$\psi = \mu, \quad \psi_i = \mathrm{K}_i + \kappa t_i, \quad \psi_{ij} = t_i\mathrm{M}_j - t_j\mathrm{M}_i + e_{ijkl}t^k\mathrm{N}^l,$$
$$\psi_{ijk} = e_{mijk}\mathrm{L}^m + \lambda\, t^m e_{ijkm}, \quad \psi_{ijkl} = \nu\, e_{ijkl}.$$

Уравнения комплексного спинового поля, не взаимодействующего с другими полями, как уже сказано, по форме не отличаются от уравнений вещественного спинового поля

$$\begin{aligned}
\left(\nabla_{\mathbf{t}} + \frac{1}{2}\varphi\right)\kappa &= \operatorname{div}\mathbf{K} - m\,\mu,\\
\left(\nabla_{\mathbf{t}} + \frac{1}{2}\varphi\right)\lambda &= \operatorname{div}\mathbf{L} - m\,\nu,\\
\left(\nabla_{\mathbf{t}} + \frac{1}{2}\varphi\right)\mu &= \operatorname{div}\mathbf{M} + m\,\kappa,\\
\left(\nabla_{\mathbf{t}} + \frac{1}{2}\varphi\right)\nu &= \operatorname{div}\mathbf{N} + m\,\lambda;
\end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned}
\left(\nabla_{\mathbf{t}} + \frac{1}{2}\varphi\right)\mathbf{K} &= -\operatorname{rot}\mathbf{L} + \operatorname{grad}\kappa + m\,\mathbf{M},\\
\left(\nabla_{\mathbf{t}} + \frac{1}{2}\varphi\right)\mathbf{L} &= \operatorname{rot}\mathbf{K} + \operatorname{grad}\lambda + m\,\mathbf{N},\\
\left(\nabla_{\mathbf{t}} + \frac{1}{2}\varphi\right)\mathbf{M} &= \operatorname{rot}\mathbf{N} + \operatorname{grad}\mu - m\,\mathbf{K},\\
\left(\nabla_{\mathbf{t}} + \frac{1}{2}\varphi\right)\mathbf{N} &= -\operatorname{rot}\mathbf{M} + \operatorname{grad}\nu - m\,\mathbf{L}.
\end{aligned} \tag{32}$$

Дуальные операторы J и $\widetilde{J}$ определяются ориентацией физического многообразия и поэтому тесно связаны с несохранением четности. Существование нейтрино дает основание назвать их операторами нейтринного заряда. Поскольку $J^2 = \widetilde{J}^2 = -E$, то собственные значение этих операторов равны $\pm i$, а их собственные векторы находятся решением алгебраических уравнений

$$J\mathbf{\Psi} = \pm i\,\mathbf{\Psi}, \quad \widetilde{J}\mathbf{\Psi} = \pm i\,\mathbf{\Psi}.$$

Решая, например, уравнение $\widetilde{J}\mathbf{\Psi} = i\mathbf{\Psi}$, получаем

$$\kappa = i\,\lambda, \quad \mu = i\,\nu, \quad \mathrm{K}_i = i\,\mathrm{L}_i, \quad \mathrm{M}_i = i\,\mathrm{N}_i,$$

и уравнения спиндинамики для этой ситуации принимают такой вид:

$$\begin{aligned} \left(\nabla_{\mathbf{t}} + \frac{1}{2}\varphi\right)\kappa &= \operatorname{div}\mathbf{K} - m\,\mu, \\ \left(\nabla_{\mathbf{t}} + \frac{1}{2}\varphi\right)\mu &= \operatorname{div}\mathbf{M} + m\,\kappa; \end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned} \left(\nabla_{\mathbf{t}} + \frac{1}{2}\varphi\right)\mathbf{K} &= i\operatorname{rot}\mathbf{K} + \operatorname{grad}\kappa + m\,\mathbf{M}, \\ \left(\nabla_{\mathbf{t}} + \frac{1}{2}\varphi\right)\mathbf{M} &= -i\operatorname{rot}\mathbf{M} + \operatorname{grad}\mu - m\,\mathbf{K}. \end{aligned} \tag{34}$$

Для оператора эволюции $T = \nabla_{\mathbf{t}} + \dfrac{1}{2}\varphi$ имеем

$$(\mathbf{\Psi}|T\mathbf{\Phi}|) + (\mathbf{\Phi}|T\mathbf{\Psi}) = \nabla_k v^k,$$

где $v^k = (\mathbf{\Psi}|\mathbf{\Phi})\,t^k$, и, следовательно, он аналогичен оператору $D_{\mathbf{t}} + \varphi$ в теории электромагнитного и гравитационного полей. Вывод состоит в том, что оператор $\nabla_{\mathbf{t}} + \dfrac{1}{2}\varphi$ служит оператором эволюции в спиндинамике.

Докажем, что с оператором псевдозаряда связано существование вероятностной меры в пространстве решений рассматриваемых уравнений и положительно определенного скалярного произведения. Последнее означает, что спиновое поле подчиняется статистике Ферми–Дирака. Для сравнения отметим, что в теории вещественного скалярного поля и электромагнитного поля скалярные произведения в пространстве решений соответствующих уравнений являются симплектическими, что означает, что эти поля подчиняются статистике Бозе–Эйнштейна. Рассматриваемые лагранжианы инвариантны относительно фазовых преобразований, и в основном тождестве, записанном для комплексных спиновых полей, можно положить $\mathbf{\Phi} = i\,\overset{*}{\mathbf{\Psi}}$, что в результате дает уравнения

$$\nabla_k C^k = 0, \quad \nabla_k \widetilde{C}^k = 0.$$

Компоненты C^k и $\widetilde{C}^k$ дуальных 4-токов $\mathbf{C}$ и $\widetilde{\mathbf{C}}$ могут быть найдены из соотношений

$$v_i C^i = \langle Q_{\mathbf{v}}\,\overset{*}{\mathbf{\Psi}}\,|\widetilde{Q}_{\mathbf{t}}\mathbf{\Psi}\rangle, \quad v_i\widetilde{C}^i = \langle \widetilde{Q}_{\mathbf{v}}\,\overset{*}{\mathbf{\Psi}}\,|Q_{\mathbf{t}}\mathbf{\Psi}\rangle. \tag{35}$$

Чтобы найти дуальные псевдозарядовые плотности и дуальные физические псевдозарядовые токи, положим

$$C^k = t^k(\mathbf{t}, \mathbf{C}) + C^k - t^k(\mathbf{t}, \mathbf{C}) = \rho t^k + J^k,$$
$$\widetilde{C}^k = t^k(\mathbf{t}, \widetilde{\mathbf{C}}) + \widetilde{C}^k - t^k(\mathbf{t}, \widetilde{\mathbf{C}}) = \widetilde{\rho} t^k + \widetilde{J}^k.$$

Поскольку $\rho = t_k C^k$, $\widetilde{\rho} = t_k \widetilde{C}^k$, то из (22) получаем

$$\rho = \langle Q_{\mathbf{t}} \overset{*}{\mathbf{\Psi}} | \widetilde{Q}_{\mathbf{t}} \mathbf{\Psi} \rangle = (Q_{\mathbf{t}} Q_{\mathbf{t}} \overset{*}{\mathbf{\Psi}} | \widetilde{Q}_{\mathbf{t}} \widetilde{Q}_{\mathbf{t}} \mathbf{\Psi}) = (\overset{*}{\mathbf{\Psi}} | \mathbf{\Psi}) = \widetilde{\rho}.$$

Необходимый результат получен, поскольку $(\overset{*}{\mathbf{\Psi}} | \mathbf{\Psi}) \geqslant 0$ и из $(\overset{*}{\mathbf{\Psi}} | \mathbf{\Psi}) = 0$ следует, что $\mathbf{\Psi} = 0$.

Пусть B_i есть компоненты потенциала $\mathbf{b}$ псевдоэлектромагнитного поля. Дуальные лагранжианы взаимодействия псевдоэлектромагнитного и комплексного спинового полей записываются немедленно:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{int}} = \frac{1}{2} f\, B_i C^i = q \langle L_{\mathbf{b}} \overset{*}{\mathbf{\Psi}} | \widetilde{Q}_{\mathbf{t}} \mathbf{\Psi} \rangle, \quad \widetilde{\mathcal{L}}_{\mathrm{int}} = \frac{1}{2} f\, B_i \widetilde{C}^i = \langle \widetilde{L}_{\mathbf{b}} \overset{*}{\mathbf{\Psi}} | Q_{\mathbf{t}} \mathbf{\Psi} \rangle,$$

где f есть постоянная взаимодействия. Если принять во внимание псевдоэлектромагнитные взаимодействия, то уравнения спиндинамики изменятся, что может быть осуществлено с помощью подстановки

$$\check{\nabla}_i \to \check{\nabla}_i - \frac{1}{2} i f\, B_i.$$

Лагранжианы комплексного спинового поля инвариантны также относительно соответствующих преобразований вида

$$\mathbf{\Psi}' = \exp\left(\frac{1}{2} \alpha \widetilde{Q}_{\mathbf{t}}\right) \mathbf{\Psi}, \qquad \mathbf{\Psi}' = \exp\left(\frac{1}{2} \alpha Q_{\mathbf{t}}\right) \mathbf{\Psi},$$
$$\mathbf{\Psi}' = \exp\left(\frac{1}{2} \beta \widetilde{J}\right) \mathbf{\Psi}, \qquad \mathbf{\Psi}' = \exp\left(\frac{1}{2} \beta J_{\mathbf{t}}\right) \mathbf{\Psi},$$
$$\mathbf{\Psi}' = \exp\left(\frac{1}{2} \gamma\, \widetilde{Q}_{\mathbf{t}} \widetilde{J}\right) \mathbf{\Psi}, \quad \mathbf{\Psi}' = \exp\left(\frac{1}{2} \gamma\, Q_{\mathbf{t}} J\right) \mathbf{\Psi}.$$

Первая группа преобразований рассматривалась выше, что касается второй и третьей групп преобразований, то появление их целиком обязано новому определению двухсторонней симметрии и, следовательно, введению новой причинной структуры в дуальные лагранжианы спиндинамики. Конкретно отметим следующие важные соотношения:

$$\widetilde{Q}_{\mathbf{t}} \widetilde{J} + \widetilde{J} \widetilde{Q}_{\mathbf{t}} = 0, \quad Q_{\mathbf{t}} J + J Q_{\mathbf{t}} = 0,$$

поясняющие механизм усиления симметрии соответствующих лагранжианов. Комплексификация спинового поля также относится к сущности этого явления, что уже отмечалось выше при обсуждении псевдозарядовой симметрии.

Таким образом, показано, что комплексное спиновое поле есть пространство, в котором реализуется представление группы $SU(2) \times U(1)$. Такая группа симметрии была впервые постулирована в электрослабой теории, поэтому при последующем обсуждении будут использоваться некоторые представления этой теории, что будет специально оговариваться. Группа $SU(2)$ реализуется в спиндинамике с помощью алгебры операторов, идентичной алгебре кватернионов. Поэтому естественно использовать понятия, принятые в теории кватернионов. Полагая

$$\widetilde{I} = \widetilde{Q}_{\mathbf{t}}, \quad \widetilde{I}\widetilde{J} = -\widetilde{J}\widetilde{I} = \widetilde{K}, \quad I = Q_{\mathbf{t}}, \quad IJ = -JI = K,$$

задаем кватернионную структуру спиндинамики в явном виде. Фазы

$$p = p_1 I + p_2 J + p_3 K + p_4 E, \quad q = q_1 \widetilde{I} + q_2 \widetilde{J} + q_3 \widetilde{K} + q_4 E,$$

где ${p_1}^2 + {p_2}^2 + {p_3}^2 + {p_4}^2 = 1$, ${q_1}^2 + {q_2}^2 + {q_3}^2 + {q_4}^2 = 1$, задают общие элементы дуальных кватернионных реализаций группы $SU(2)$.

Потенциалу поля Янга–Миллса ставится в соответствие кватернион с равной нулю скалярной частью:

$$R_i = U_i \widetilde{I} + V_i \widetilde{J} + W_i \widetilde{K}.$$

Тензор напряженности поля Янга–Миллса определяется следующим выражением:

$$N_{ij} = \partial_i R_j - \partial_j R_i + R_i R_j.$$

Лагранжианы взаимодействия комплексного спинового поля с калибровочными полями имеют вид

$$\mathcal{L}_{\mathbf{b}} = \frac{1}{2} f \langle L_{\mathbf{b}} \overset{*}{\mathbf{\Psi}} | \widetilde{Q}_{\mathbf{t}} \mathbf{\Psi} \rangle = \frac{1}{2} f B_k H^k, \quad \rho_{\mathbf{b}} = \frac{1}{2} f (\overset{*}{\mathbf{\Psi}} | \mathbf{\Psi}),$$

где $\rho_{\mathbf{b}} = t_k H^k$ есть плотность тока H^k.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\mathbf{u}} &= \frac{1}{2} ig \langle L_{\mathbf{u}} \overset{*}{\mathbf{\Psi}} | \mathbf{\Psi} \rangle = \frac{1}{2} ig U_k I^k, & \rho_{\mathbf{u}} &= \frac{1}{2} ig (\widetilde{Q}_{\mathbf{t}} \overset{*}{\mathbf{\Psi}} | \mathbf{\Psi}), \\
\mathcal{L}_{\mathbf{v}} &= \frac{1}{2} ig \langle L_{\mathbf{v}} \overset{*}{\mathbf{\Psi}} | \widetilde{J} \widetilde{Q}_{\mathbf{t}} \mathbf{\Psi} \rangle = \frac{1}{2} ig V_k J^k, & \rho_{\mathbf{v}} &= -\frac{1}{2} ig (\overset{*}{\mathbf{\Psi}} | \widetilde{J} \mathbf{\Psi}), \\
\mathcal{L}_{\mathbf{w}} &= \frac{1}{2} ig \langle L_{\mathbf{w}} \overset{*}{\mathbf{\Psi}} | \widetilde{J} \mathbf{\Psi} \rangle = \frac{1}{2} ig W_k K^k, & \rho_{\mathbf{w}} &= -\frac{1}{2} ig (\overset{*}{\mathbf{\Psi}} | \widetilde{Q}_{\mathbf{t}} \widetilde{J} \mathbf{\Psi}),
\end{aligned}$$

Если ввести проекционные операторы вида

$$P_+ = \frac{1}{2}(E + i\widetilde{Q}_{\mathbf{t}}), \quad P_- = \frac{1}{2}(E - i\widetilde{Q}_{\mathbf{t}})$$

и соответственно проекционные операторы вида

$$P_+ = \frac{1}{2}(E + i\widetilde{J}), \quad P_- = \frac{1}{2}(E - i\widetilde{J}),$$

то с помощью этих операторов нетрудно убедиться, что плотности $\rho_{\mathbf{u}}$ и $\rho_{\mathbf{v}}$ могут быть представлены как разности двух положительно определенных величин, которые получают естественную интерпретацию как плотности числа электронов и позитронов в одном случае и плотности числа нейтрино и антинейтрино в другом случае.

Теория электрослабого взаимодействия предполагает также существование скалярных полей, которые называются полями Хиггса. Экспериментальное обнаружение этих полей представляет собой важную нерешенную задачу. В спиндинамике скалярные поля также появляются, но не как артефакты, а как основное состояние псевдоэлектромагнитного поля или поля Янга–Миллса. Основным состоянием псевдоэлектромагнитного поля называется такое состояние, которое не дает вклада в энергию этого поля. Основное состояние переносит новую форму энергии. Аналогично определяется основное состояние поля Янга–Миллса. Уравнения, которые определяют основное состояние этих полей, имеют вид

$$H_{ij} = 0, \quad N_{ij} = 0,$$

где $H_{ij} = \partial_i B_j - \partial_j B_i$ — тензор псевдоэлектромагнитного поля. Дадим общее решение этих уравнений, которое характеризует структуру основного состояния и может быть важным при истолковании псевдоэлектромагнитного поля и поля Янга–Миллса как возбуждений основного состояния. Рассмотрим решение первого уравнения. Пусть $\phi = \phi_1 + \phi_2 i$, $\overline{\phi} = \phi_1 - \phi_2 i$ есть комплексное скалярное поле. Из комплексного скалярного поля построим ковекторное поле

$$\omega_j = \frac{\overline{\phi}}{|\phi|}\partial_j\left(\frac{\phi}{|\phi|}\right), \quad |\phi|^2 \equiv \overline{\phi}\phi,$$

которое дает общее решение поставленной задачи. Так как $\overline{\omega}_j = -\omega_j$, рассматриваемое ковекторное поле является чисто мнимым. Действительное ковекторное поле

$$P_j = i\omega_j + \frac{1}{2}fB_j = i\frac{\overline{\phi}}{|\phi|}(\partial_j - \frac{1}{2}ifB_j)\left(\frac{\phi}{|\phi|}\right)$$

является калибровочно-инвариантной характеристикой основного состояния псевдоэлектромагнитного поля. Таким образом, при построении теории основного состояния в лагранжиан теории естественно включить два слагаемых

$$L = \frac{a}{2}P_jP^j + \frac{b}{4}(P_jP^j)^2,$$

где a есть константа размерности см$^{-2}$, а другая постоянная безразмерна.

Выясним физический смысл очевидных сингулярностей основного состояния. Если $\overline{\phi}\phi = 0$, то выполняются уравнения

$$\phi_1(u_1, u_2, u_3, u_4) = 0, \quad \phi_2(u_1, u_2, u_3, u_4) = 0.$$

Эти уравнения определяют некоторую двухмерную поверхность в физическом многообразии, если векторы $\nabla\phi_1, \nabla\phi_2$ не параллельны. Эту поверхность можно реализовать как поверхность, заметаемую движущейся струной. Нетрудно сформулировать теорию струн в четырехмерном физическом многообразии и вывести уравнения движения струны. Решая эти уравнения, можно найти функции $\phi_1(u_1, u_2, u_3, u_4)$ и $\phi_2(u_1, u_2, u_3, u_4)$. На таком пути теория струн может найти новые интересные приложения в теории физических полей.

Общее решение второго уравнения находится вполне аналогично. В рассмотрение вводится кватернионное скалярное поле и ему сопряженное

$$\varphi = \varphi_1\widetilde{I} + \varphi_2\widetilde{J} + \varphi_3\widetilde{K} + \varphi_4 E, \quad \overline{\varphi} = -\varphi_1\widetilde{I} - \varphi_2\widetilde{J} - \varphi_3\widetilde{K} + \varphi_4 E,$$

так что

$$\overline{\varphi}\varphi \equiv |\varphi|^2 = \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 + \varphi_4^2.$$

Кватернионное ковекторное поле

$$\Omega_j = \frac{\overline{\varphi}}{|\varphi|}\partial_j\left(\frac{\varphi}{|\varphi|}\right),$$

которое представляет собой чисто мнимый кватернион, так как $\overline{\Omega}_j = -\Omega_j$, и дает общее решение второго уравнения. Остается только отметить, что кватернионное ковекторное поле

$$P_j = \frac{\overline{\varphi}}{|\varphi|}(\partial_j + R_j)\left(\frac{\varphi}{|\varphi|}\right)$$

преобразуется однородно относительно локальных преобразований

$$\varphi \to q(u)\varphi, \quad R_j \to q(u)\, R_j\, \overline{q}(u) - \overline{q}(u)\partial_j q(u).$$

Более детальное изучение темы скалярных полей выходит за рамки основной задачи данного исследования, но основной вопрос формулируется вполне конкретно: «Представляют ли поля Хиггса основное состояние псевдоэлектромагнитного поля и поля Янга–Миллса?». Если ответ будет положительным, тогда хиггсы, видимо, окажутся хорошо известными элементарными частицами.

Продолжим тему общего сопоставления спиндинамики со Стандартной моделью по другим направлениям. В спиндинамике оператор электрического заряда является одной из компонент изотопического спина, и поэтому включение электромагнитных взаимодействий нарушает пространство изотопического спина его изотропии. Действительно, чтобы включить электромагнитные взаимодействия, необходимо прежде всего приготовить состояние спинового поля, которое является собственным вектором оператора электрического заряда. Так как спиновое поле является комплексным, таких состояний будет два: $\widetilde{Q}_{\mathbf{t}}\Psi = \pm i\Psi$. Это, в частности, приведет к появлению так называемых заряженных W-бозонов, что очевидно просто из беглого взляда на лагранжианы взаимодействия комплексного спинового поля с полем Янга–Миллса. Включение электромагнитных взаимодействий делает неотличимыми симметрии, ответственные за псевдозаряд и заряд. Это приводит к ряду интересных следствий, обсуждение которых требует детального и заинтересованного сравнения спиндинамики со Стандартной моделью, что выходит за рамки настоящего сообщения, посвященного общим вопросам.

Наконец остановимся на очень интересных представлениях, которые возникли в рамках Стандартной модели, и посмотрим, как они преломляются в спиндинамике. Речь идет о так называемой кварк-лептонной симметрии, на основе которой было предсказано существование c-кварка, а после открытия τ-лептона было предсказано существование b-кварка и t-кварка. Выяснение природы кварк-лептонной симметрии рассматривается как одна из важнейших задач физики. Общая квантовая механика, одним из разделов которой является спиндинамика, предлагает следующее очевидное объяснение сущности кварк-лептонной симметрии. Согласно общей квантовой механике существуют две причинные структуры на физическом многообразии. Одна из них в своем простейшем выражении представляет собой пространство Минковского. Эту причинную структуру естественно связать с лептонами, которым соответствует спиновое поле, несущее псевдозаряд, электрический заряд и нейтринный заряд. Вторую причинную структуру естественно отнести к кваркам, которым также соответствует комплексное спиновое поле. Вещественное спиновое поле, нагруженное только электрическим зарядом, естественно отнести к миру атомов и молекул. Таким образом, в области так называемых сильных взаимодействий реализуется вторая причинная структура, в которой пространственные сечения в простейшем случае представляют собой трехмерные сферы с общим центром, причем поток времени направлен по лучам, выходящим из этого центра. Координата времени, соответствующая рассматриваемой причинной структуре, с геометрической точки зрения представляет собой радиальную переменную, которая изменяется в конечных пределах. При стереографической проекции пространственное сечение отображается на внутренность шара в трехмерном евклидовом пространстве. Отсюда следует, что кварки и связанные с ними бозонные поля локализованы в замкнутой ограниченной области пространства. Если поле Янга–Миллса локализовано только в этой области, тогда π-мезоны естественно отнести к первой причинной структуре и рассматривать их как продолжение потенциала поля Янга–Миллса за пределы действия второй причинной структуры. Эта ситуация аналогична векторному потенциалу соленоида, у которого напряженность магнитного поля локализована, а векторный потенциал выходит за пределы области локализации и приводит к наблюдаемым эффектам.

Вывод состоит в том, что кварки и лептоны подчиняются одним и тем же законам, но относятся к различным причинным структурам. Отсюда и кварк-лептонная симметрия, и конфайнмент кварков, и так называемый закон сохранения числа барионов. Кварки удерживает в ограниченной замкнутой области пространства не сила, а сама причинность. Против силы всегда найдется превосходящая сила, но если откуда-то, образно выражаясь, не дает выйти сам световой конус, то речь идет о совсем иной категории понятий.

Представление о поколениях возникло в Стандартной модели, причем число поколений не следует из первых принципов. В спиндинамике число поколений определяется операторами электрического и нейтринного зарядов, оператором внутреннего спина и дуальными им операторами. Составляя полные наборы коммутирующих операторов и затем проекционные операторы, можно заключить, что существует четыре поколения лептонов и четыре поколения кварков как четыре различных состояния комплексного спинового поля. Конечно, как уже было сказано, кварки и лептоны относятся при этом к различным причинным структурам. Общепринято считать, что число поколений равно трем, однако в работе [2] показано, что экспериментальные данные не противоречат факту существования четвертого поколения лептонов. Таким образом, из гипотезы геометризации следует, что существует еще одно, четвертое, поколение кварков и лептонов.

7. СТРУКТУРА ПРОСТЕЙШЕГО ФИЗИЧЕСКОГО МНОГООБРАЗИЯ

В простейшем случае размерность физического многообразия совпадает с размерностью объемлющего евклидова пространства. Обозначим его H^4, поскольку при изучении геометрии такого физического многообразия и его причинных структур наиболее подходящим и эвристическим методом является отождествление его с телом кватернионов. Точки H^4 имеют векторное

$$\mathbf{q} = (q_1,\, q_2,\, q_3,\, q_4)$$

и кватернионное представление

$$q = q_1 i + q_2 j + q_3 k + q_4 1$$

с обычной линейной структурой. Будем использовать правила умножения кватернионных единиц, открытые Гамильтоном:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad i1 = 1i = i, \quad j1 = 1j = j, \quad k1 = 1k = k,$$
$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j.$$

Евклидово скалярное произведение

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3 + p_4q_4$$

обеспечивает очень важную связь между геометрическим и алгебраическим представлениями

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = \frac{1}{2}(p\overline{q} + q\overline{p}) = \frac{1}{2}(\overline{p}q + \overline{q}p), \tag{36}$$

где $\overline{q} = -q_1i - q_2j - q_3k + q_41$ есть фундаментальный автоморфизм $\overline{pq} = \overline{q}\overline{p}$. Скалярное произведение инвариантно относительно левых и правых поворотных растяжений

$$q \Rightarrow \tilde{q} = u\,q, \quad q \Rightarrow \tilde{q} = q\,\overline{s}, \tag{37}$$

так как

$$\tilde{\mathbf{p}} \cdot \tilde{\mathbf{q}} = u\overline{u}\,(\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}), \quad \tilde{\mathbf{p}} \cdot \tilde{\mathbf{q}} = s\overline{s}\,(\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}).$$

Для данного q уравнения $q = uq$, $q = q\overline{s}$ имеют только тривиальное решение: $u = \overline{s} = 1$, и это является фундаментальным свойством группы симметрии рассматриваемого физического пространства. Таким образом, поворотные растяжения (35) выражают не только свойства симметрии H^4, но и его отличительную особенность. Это означает, что геометрически значимыми будут только те свойства H^4, которые инвариантны относительно преобразований поворотного растяжения. Перейдем к рассмотрению этих свойств. Из (35) следует, что канонический ортогональный базис

$$\begin{gathered}
\mathbf{c}_1 = (1,\ 0,\ 0,\ 0), \quad \mathbf{c}_2 = (0,\ 1,\ 0,\ 0), \\
\mathbf{c}_3 = (0,\ 0,\ 1,\ 0), \quad \mathbf{c}_4 = (0,\ 0,\ 0,\ 1), \\
c_1 = i, \quad c_2 = j, \quad c_3 = k, \quad c_4 = 1
\end{gathered}$$

порождает два правоориентированных подвижных ортогональных базиса

$$\begin{gathered}
m_1 = iq, \quad m_2 = jq, \quad m_3 = kq, \quad m_4 = 1q, \\
n_1 = qi, \quad n_2 = qj, \quad n_3 = qk, \quad n_4 = q1.
\end{gathered}$$

В векторной форме это читается так:

$$\begin{aligned}
\mathbf{m}_1 &= (q_4,\ -q_3,\ q_2,\ -q_1), \\
\mathbf{m}_2 &= (q_3,\ q_4,\ -q_1,\ -q_2), \\
\mathbf{m}_3 &= (-q_2,\ q_1,\ q_4,\ -q_3), \\
\mathbf{m}_4 &= (q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4)
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
\mathbf{n}_1 &= (q_4,\ q_3,\ -q_2,\ -q_1), \\
\mathbf{n}_2 &= (-q_3,\ q_4,\ q_1,\ -q_2), \\
\mathbf{n}_3 &= (q_2,\ -q_1,\ q_4,\ -q_3), \\
\mathbf{n}_4 &= (q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4).
\end{aligned}$$

Используя кватернионное или векторное представление, проверяем, что

$$\mathbf{m}_a \cdot \mathbf{m}_b = q\bar{q}\,\delta_{ab}, \quad \mathbf{n}_a \cdot \mathbf{n}_b = q\bar{q}\,\delta_{ab}, \quad a, b = 1, 2, 3, 4.$$

Рассмотрим семь точек

$$\begin{gathered} T(q_1,\, q_2,\, q_3,\, q_4), \\ A(q_4,\, -q_3,\, q_2,\, -q_1), \quad B(q_3,\, q_4,\, -q_1,\, -q_2), \quad C(-q_2,\, q_1,\, q_4,\, -q_3), \\ K(q_4,\, q_3,\, -q_2,\, -q_1), \quad L(-q_3,\, q_4,\, q_1,\, -q_2), \quad M(q_2,\, -q_1,\, q_4,\, -q_3). \end{gathered}$$

Легко проверить, что

$$d^2_{AB} = d^2_{AC} = d^2_{BC} = d^2_{TA} = d^2_{TB} = d^2_{TC} = 2q\bar{q}$$

и, соответственно,

$$d^2_{KL} = d^2_{KM} = d^2_{LM} = d^2_{TK} = d^2_{TL} = d^2_{TM} = 2q\bar{q},$$

где d_{AB} есть расстояние между точками A и B. Налицо два правильных тетраэдра $TABC$ и $TKLM$ с общей вершиной T. Эти тетраэдры дают визуальное представление о базисах $\mathbf{m}_a$ и $\mathbf{n}_a$. Пусть $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$ есть траектория в H^4. Когда точка T движется вдоль этой траектории, тетраэдры $TABC$ и $TKLM$ пульсируют и вращаются по отношению друг к другу. Матрица скалярных произведений

$$\mathrm{P}_{\mu\nu} = \mathbf{m}_\mu \cdot \mathbf{n}_\nu \quad (\mu,\, \nu = 1, 2, 3)$$

описывает эти вращения. Умножение матрицы P на транспонированную ей матрицу дает тривиальную матрицу

$$\mathrm{P}\tilde{\mathrm{P}} = (q\bar{q})^2\,\mathbf{1},$$

где $\mathbf{1}$ есть единичная матрица.

Скалярные произведения касательного вектора $\dot{\mathbf{q}} = d\mathbf{q}/dt$ с векторами подвижных базисов $\mathbf{m}_a$ и $\mathbf{n}_a$ $(a = 1, 2, 3, 4)$

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_1 \cdot \frac{d\mathbf{q}}{dt} &= q^4\frac{dq^1}{dt} - q^3\frac{dq^2}{dt} + q^2\frac{dq^3}{dt} - q^1\frac{dq^4}{dt}, \\ \mathbf{m}_2 \cdot \frac{d\mathbf{q}}{dt} &= q^3\frac{dq^1}{dt} + q^4\frac{dq^2}{dt} - q^1\frac{dq^3}{dt} - q^2\frac{dq^4}{dt}, \\ \mathbf{m}_3 \cdot \frac{d\mathbf{q}}{dt} &= -q^2\frac{dq^1}{dt} + q^1\frac{dq^2}{dt} + q^4\frac{dq^3}{dt} - q^3\frac{dq^4}{dt}, \\ \mathbf{n}_1 \cdot \frac{d\mathbf{q}}{dt} &= q^4\frac{dq^1}{dt} + q^3\frac{dq^2}{dt} - q^2\frac{dq^3}{dt} - q^1\frac{dq^4}{dt}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{n}_2\cdot\frac{d\mathbf{q}}{dt}=-q^3\frac{dq^1}{dt}+q^4\frac{dq^2}{dt}+q^1\frac{dq^3}{dt}-q^2\frac{dq^4}{dt},$$
$$\mathbf{n}_3\cdot\frac{d\mathbf{q}}{dt}=q^2\frac{dq^1}{dt}-q^1\frac{dq^2}{dt}+q^4\frac{dq^3}{dt}-q^3\frac{dq^4}{dt},$$
$$\mathbf{e}_4\cdot\frac{d\mathbf{q}}{dt}=\mathbf{f}_4\cdot\frac{d\mathbf{q}}{dt}=q^1\frac{dq^1}{dt}+q^2\frac{dq^2}{dt}+q^3\frac{dq^3}{dt}+q^4\frac{dq^4}{dt}$$

инвариантны относительно левых и правых поворотных растяжений физического пространства, и поэтому эти скалярные произведения имеют очень важный физический смысл. Инварианты

$$\Omega_\mu=\frac{1}{2}\,\mathbf{m}_\mu\cdot\frac{d\mathbf{q}}{dt},\quad \tilde{\Omega}_\mu=\frac{1}{2}\,\mathbf{n}_\mu\cdot\frac{d\mathbf{q}}{dt}\quad(\mu=1,2,3)$$

представляют, соответственно, компоненты угловой скорости вращения тетраэдра $TABC$ относительно тетраэдра $TKLM$ и обратно.

Компоненты оператора угловой скорости представляют эту визуальную классическую картину в спиндинамике. Чтобы показать эти операторы, введем $4d$-оператор набла

$$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial q_1},\ \frac{\partial}{\partial q_2},\ \frac{\partial}{\partial q_3},\ \frac{\partial}{\partial q_4}\right)$$

и, полагая

$$M_\nu=\frac{1}{2}(\mathbf{m}_\nu\cdot\nabla),\quad N_\nu=\frac{1}{2}(\mathbf{n}_\nu\cdot\nabla)\quad(\nu=1,2,3),$$

получаем шесть антиэрмитовых операторов, представляющих относительное вращение тетраэдров. Множитель $1/2$ является очень важным, так как только таким путем получаются естественные соотношения коммутации

$$M_1M_2-M_2M_1=M_3,\quad N_1N_2-N_2N_1=-N_3$$

и т. д. Знак минус в коммутационных соотношениях для операторов N_ν связан с одинаковой ориентацией базисов $\mathbf{m}_a$ и $\mathbf{n}_a$. Изменив направление, например у вектора $\mathbf{n}_3$, на обратное, получим коммутационные соотношения одного и того же вида. Оператор растяжений

$$D=q_1\frac{\partial}{\partial q_1}+q_2\frac{\partial}{\partial q_2}+q_3\frac{\partial}{\partial q_3}+q_4\frac{\partial}{\partial q_4}\tag{38}$$

имеет также важное значение, так как он является оператором сдвига вдоль линий времени, как это будет ясно из последующего. Этот оператор коммутирует с операторами угловой скорости

$$DM_\nu-M_\nu D=0,\quad DN_\nu-N_\nu D=0\quad(\nu=1,\,2,\,3).$$

Рассмотрим теперь причинные структуры в H^4, которые определяются темпоральным полем $f(q_1, q_2, q_3, q_4)$, удовлетворяющим в данном случае уравнению

$$\left(\frac{\partial f}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial q_4}\right)^2 = 1. \tag{39}$$

Уравнение (37) имеет общее решение, которое обсуждалось выше, $f(q_1, q_2, q_3, q_4) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{q}+a$, где $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ есть постоянный единичный вектор

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = 1,$$

и особое решение

$$f(q_1, q_2, q_3, q_4) = \sqrt{(\mathbf{q}\cdot\mathbf{q})} = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2},$$

которое представляет собой функцию геодезического расстояния, отнесенную к началу координат. Пространственное сечение H^4 определяется полем времени. Для данного действительного числа t пространственное сечение определяется уравнением $f(q^1, q^2, q^3, q^4) = t$. Таким образом, в первом случае пространственные сечения H^4 являются евклидовыми пространствами E^3, а во втором случае пространственные сечения есть $3d$-сферы $\sqrt{\mathbf{q}\cdot\mathbf{q}} = t$. Для потока времени или градиента поля времени находим

$$t^i = t_i = \frac{\partial f}{\partial q_i} = \frac{q^i}{f}, \quad \partial_i t^i = \frac{3}{f}. \tag{40}$$

Проведенное рассмотрение показывает, что, задавая траекторию движения одной точки в H_4, мы одновременно задаем траектории движения еще шести точек, которые вместе образуют два правильных тетраэдра. В спиндинамике тетраэдрам $TABC$ и $TKLM$ ставятся в соответствие операторы угловых скоростей относительных вращений и оператор сдвига вдоль линий времени M_ν, N_ν, D, а также хорошо известные гармонические полиномы

$$D^j_{mn}(q_1, q_2, q_3, q_4) = \sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+n)!(j-n)!}\times$$
$$\times\sum_k (-1)^{m+k}\frac{(q_1+iq_2)^{m-n+k}(q_1-iq_2)^k(q_3+iq_4)^{j-m-k}(q_3-iq_4)^{j+n-k}}{(m-n+k)!k!(j-m-k)!(j+n-k)!}, \tag{41}$$

которые образуют полный ортогональный базис функций на S^3 и одновременно служат собственными функциями этих операторов.

Причинная структура, определяемая общим решением уравнения поля времени, уже рассматривалась выше. При этом оказалось, что инвариантность относительно поворотных растяжений нарушается. Для второй причинной структуры, напротив, группа поворотных растяжений сохраняет свое значение полностью. Как отмечалось выше, существование во Вселенной двух причинных структур в рамках спиндинамики можно применить для совместного изучения электрослабых и сильных взаимодействий. В данном конкретном случае нам нужны прежде всего уравнения спиндинамики, определяемые второй причинной структурой. Приведем конечный результат:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{f}\left(D+\frac{3}{2}\right)\kappa &= \operatorname{div}\mathbf{K} - m\,\mu,\\
\frac{1}{f}\left(D+\frac{3}{2}\right)\lambda &= \operatorname{div}\mathbf{L} - m\,\nu,\\
\frac{1}{f}\left(D+\frac{3}{2}\right)\mu &= \operatorname{div}\mathbf{M} + m\,\kappa,\\
\frac{1}{f}\left(D+\frac{3}{2}\right)\nu &= \operatorname{div}\mathbf{N} + m\,\lambda;
\end{aligned} \tag{42}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{f}\left(D+\frac{3}{2}\right)\mathbf{K} &= -\operatorname{rot}\mathbf{L} + \operatorname{grad}\kappa + m\,\mathbf{M},\\
\frac{1}{f}\left(D+\frac{3}{2}\right)\mathbf{L} &= \operatorname{rot}\mathbf{K} + \operatorname{grad}\lambda + m\,\mathbf{N},\\
\frac{1}{f}\left(D+\frac{3}{2}\right)\mathbf{M} &= \operatorname{rot}\mathbf{N} + \operatorname{grad}\mu - m\,\mathbf{K},\\
\frac{1}{f}\left(D+\frac{3}{2}\right)\mathbf{N} &= -\operatorname{rot}\mathbf{M} + \operatorname{grad}\nu - m\,\mathbf{L},
\end{aligned} \tag{43}$$

и поясним смысл входящих сюда выражений. Оператор D есть оператор растяжений, определенный выше. Ротор векторного поля $\mathbf{M}$ определяется как векторное произведение $4d$-оператора ∇ и $\mathbf{M}$:

$$\operatorname{rot}\mathbf{M} = \nabla\times\mathbf{M}, \quad (\operatorname{rot}\mathbf{M})^i = e^{ijkl}t_j\partial_k A_l = \frac{1}{f}e^{ijkl}q_j\partial_k A_l,$$

где e^{ijkl} есть контравариантные компоненты тензора Леви-Чивиты, нормированные в данном случае на единицу $e_{1234} = \sqrt{g} = 1$. Также отметим, что

$$(\operatorname{grad}\varphi)_i = \triangle_i\,\varphi, \quad \triangle_i = \partial_i - \frac{q_i}{f^2}D, \quad \operatorname{rot}\operatorname{grad} = 0, \quad \operatorname{div}\operatorname{rot} = 0.$$

Для полноты картины запишем также уравнения Максвелла в форме, соответствующей рассматриваемой причинной структуре:

$$\frac{1}{f}(D+2)\mathbf{H} = -\operatorname{rot}\mathbf{E}, \quad \frac{1}{f}(D+2)\mathbf{E} = \operatorname{rot}\mathbf{H}, \tag{44}$$

$$\mathbf{q}\cdot\mathbf{E} = \mathbf{q}\cdot\mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{E} = \operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \tag{45}$$

где

$$E_i = \frac{q_k}{f} F_{ik}, \quad H_i = \frac{q_k}{f} \overset{*}{F}_{ik}, \quad F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i, \quad \overset{*}{F}_{ij} = \frac{1}{2} e_{ijkl} F^{kl}.$$

Поскольку самосопряженный оператор rot имеет важное значение, найдем его собственные значения, устанавливая связь этого оператора с операторами угловой скорости относительного вращения, собственные значения которых хорошо известны. Полагая $P = f\,\mathrm{rot}$, находим следующие соотношения:

$$P = -M_1^2 - M_2^2 - M_3^2 + N_1^2 + N_2^2 + N_3^2 = -M^2 + N^2, \quad P^2 = -2(M^2 + N^2).$$

Далее учтем, что $M^2 = -l(l+1), \quad N^2 = -k(k+1)$, где l, k принимают любые целые или полуцелые значения. Уравнение

$$(M^2 - N^2)^2 = -2(M^2 + N^2)$$

имеет два решения: $l = k + 1$ и $k = l + 1$. Полагая для первого решения $s = 2k$, $p = s + 2$, получаем

$$l(l+1) = \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}p, \quad k(k+1) = \frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{2}p.$$

Во втором случае полагаем $s = 2l$, $p = s + 2$ и получаем

$$l(l+1) = \frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{2}p, \quad k(k+1) = \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}p.$$

Это означает, что собственные значения оператора $P = f\,\mathrm{rot}$ равны $\pm p$, где $p = 2, 3, 4, \ldots$ Отметим, что векторы подвижных реперов относятся к собственным векторам с минимальным собственным значением

$$P\,\mathbf{m}_\nu = 2\,\mathbf{m}_\nu, P\,\mathbf{n}_\nu = -2\,\mathbf{n}_\nu \quad (\nu = 1,\, 2,\, 3).$$

Обсудим общую ситуацию с решением уравнений спиндинамики. Из гармонических полиномов можно построить полную ортогональную систему векторных полей на трехмерной сфере, включая сюда как потенциальные, так и вихревые векторные поля. Коэффициенты разложения векторных и скалярных полей по этой полной системе будут функциями f. Используя свойства рассматриваемых гармонических полиномов, можно из уравнений спиндинамики вывести систему обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов разложения. Естественно предположить, что эта система будет иметь решения только при определенных значениях таких параметров, как заряд и масса.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Novikov V. A., Rozanov A. N., Vysotsky M. I.* Once More on Extra Quark–Lepton Generations and Precision Measurements // Yad. Fiz. 2010. V. 73. P. 662.
2. *Varshalovich D. A., Moskalev A. N., Hersonskii V. K.* Quantum Theory of Angular Momentum. Singapore: World Sci., 1987.

Получено 20 декабря 2012 г.

Редактор *Е. В. Сабаева*

Подписано в печать 05.03.2013.
Формат $60 \times 90/16$. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 3,19. Уч.-изд. л. 3,78. Тираж 325 экз. Заказ № 57932.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.
E-mail: publish@jinr.ru
www.jinr.ru/publish/